Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 248-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__248_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

T. 78; 1874.

LIPSCHITZ (R.). — *Extension de la théorie des surfaces d'aire minimum.* (45 p.)

Les surfaces d'aire minimum ou les surfaces qui renferment la plus petite aire dans un contour donné quelconque sont identiques, d'après une remarque de Meusnier, à celles où s'annule en chaque point la somme des inverses des deux rayons de courbure principaux. Soient maintenant x_1, x_2, x_3 les coordonnées arbitraires d'un point dans l'espace; posons le carré de l'élément linéaire, à partir du point x_1, x_2, x_3, égal à la forme quadratique

$$\begin{aligned}2f(dx) = a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + a_{33}dx_3^2 \\ + 2a_{23}dx_2dx_3 + 2a_{31}dx_3dx_1 + 2a_{12}dx_1dx_2;\end{aligned}$$

soit $y_1 =$ const. l'équation de la surface. Alors l'équation aux rayons principaux et l'expression de l'aire contenue dans un contour fermé ont la propriété de varier à mesure qu'on transforme arbitrairement la forme $2f(dx)$ par de nouvelles variables, et qu'on remplace l'équation $y_1 =$ const. par une équation quelconque équivalente; et l'invariant de cette combinaison, qui représente la somme des inverses des deux rayons de courbure principaux, devra s'évanouir lorsque l'aire d'une partie de la surface, limitée par un contour fermé, deviendra un minimum. L'extension que M. Lipschitz fait de ces conditions se rapporte aux recherches dont il a lui-même donné l'analyse détaillée au tome IV du *Bulletin* (¹). Il se propose actuellement d'examiner si, dans la théorie des formes quadratiques de n différentielles, où l'on a

$$2f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b,$$

la relation entre les inverses des rayons de courbure principaux et les surfaces d'aire minimum se maintient quand on oppose à la fonction $\lambda(dx)$ (définie au *Bulletin*, t. IV, p. 301, éq. 12) une certaine intégrale multiple A, qui correspond à l'expression de l'aire d'une partie de la surface, et qui a la propriété d'être indépendante du choix des variables. En supposant la forme

$$f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a} dx_a^2$$

et le nombre des variables $= n-1$, l'élément de l'intégrale A coïncide avec l'élément d'une autre, définie par M. Kronecker dans le premier Mémoire sur des systèmes de fonctions de plusieurs variables (*Monatsbericht der Berliner Akademie*, 1869), et que ce géomètre y a appelé l'élément de la variété $(n-1)^{\text{uple}}$ représentée par l'équation $y_1 =$ const. La théorie de la fonction $\lambda(dx)$ et de l'intégrale A fournit donc, en effet, à l'auteur une généralisation de la relation entre les rayons de courbure principaux et la propriété connue des surfaces d'aire minimum. Il conclut enfin en donnant une théorie complète et développée du cas spécial où l'intégrale multiple A devient une intégrale double.

Mertens (F.). — *Contribution à la théorie analytique des nombres*. (17 p.)

On trouve, dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3ᵉ édit., 1ʳᵉ Partie, § VIII), ces deux formules remarquables :

$$\sum \frac{1}{g} = l(lG - 0{,}08366) + C,$$

$$\prod\left(1 - \frac{1}{g}\right) = \frac{A}{lG - 0{,}08366},$$

(¹) Extrait de six Mémoires publiés dans le *Journal de Borchardt*, p. 97, etc.

où les signes $\sum$ et $\prod$ (de somme et de produit) s'étendent à tous les nombres premiers qui sont inférieurs à la limite donnée G, où l est le signe des logarithmes népériens, et où C, A désignent certaines constantes numériques inconnues. La valeur du nombre 0,08366 a été déterminée par une voie empirique, et dès lors peut paraître douteuse. Quand on l'omet, les deux équations indiquent que, pour de grandes valeurs de G, on peut poser, par approximation,

$$\sum \frac{1}{g} = llG + C,$$

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = C' lG.$$

C'est la forme que M. Tchebychef a donnée aux formules de Legendre dans un Mémoire où il en a aussi développé une démonstration. Cependant le procédé de M. Tchebychef n'est pas à l'abri de toute incertitude; c'est pourquoi M. Mertens cherche à en donner une nouvelle démonstration rigoureuse et à déterminer les constantes C et C'. Une analyse subtile, qui s'appuie sur les travaux analogues de Tchebychef, de Dirichlet et surtout d'Euler, lui fournit enfin ces valeurs

$$\sum_{2}^{G} \frac{1}{g} = llG + \mathfrak{C} - H + \delta,$$

$$\prod_{2}^{G} \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = e^{\mathfrak{C}+\delta'} lG,$$

où δ est toujours inférieur à

$$\frac{7}{l(G+1)} + \frac{2}{G lG}, \quad \text{et} \quad \delta' < \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G lG} + \frac{1}{2G};$$

$\mathfrak{C}$ est la constante connue 0,5772156649 et H une autre constante déterminée par l'auteur $= 0,3157184520 5$. Cette recherche ressemble, par sa méthode et ses principes, à une autre, entreprise par le même auteur au tome 77 du même Journal sur la valeur asymptotique de quelques fonctions dans la théorie des nombres. Aussi

M. Mertens résout-il encore un autre problème semblable à ceux qu'il a traités dans le Mémoire que nous venons de citer : c'est de trouver la valeur de la somme de tous les nombres premiers inférieurs à une limite donnée G et compris dans les formes respectives $4m+1$, $4m+3$, $a+mk$, où a et k n'ont pas de facteur commun.

Schläfli. — *Sur la possibilité générale de la représentation conforme, sur un demi-plan, d'une figure plane limitée par des droites.* (18 p.)

M. Christoffel a donné (*Annali di Matematica*, sér. 2, t. I) une expression intégrale pour une fonction u qui représente d'une manière conforme le demi-plan de la variable indépendante t sur une surface plane limitée par des droites. M. Schläfli a repris ce problème pour prouver qu'on peut toujours assigner aux constantes des valeurs tellement déterminées, qu'un polygone rectiligne quelconque donné u est représenté d'une manière conforme sur le demi-plan t, quand même la figure contiendrait à l'intérieur des points de ramification ou des horizons. La question des constantes n'a été abordée par M. Christoffel ni dans le Mémoire que nous venons de citer, ni dans un autre inséré dans les *Gottinger Nachrichten*. Les travaux plus généraux de M. Schwarz embrassent aussi notre problème comme cas spécial; cependant l'auteur a cru que ses recherches directes de la question ne sont pas pour cela dépourvues d'intérêt. Pour obtenir l'expression de u, il revient à des considérations présentées par M. Schwarz dans deux Mémoires antérieurs. N'oublions pas enfin de reproduire une remarque de M. Schläfli où il dit que ce sont MM. Schwarz et Casorati qui l'ont engagé à entreprendre ces recherches.

Netto (E.). — *Sur la théorie des groupes composés.* (12 p.)

La théorie des groupes composés joue un rôle important dans celle des substitutions; M. Jordan lui a consacré plusieurs paragraphes dans son *Traité des substitutions*, et y est revenu dans des recherches ultérieures. M. Netto se propose de remplir quelques lacunes dans cette théorie récente et d'élucider quelques points restés obscurs jusqu'à présent.

Reye (Th.). — *Généralisation de la théorie des polaires de surfaces algébriques.* (17 p.)

Reye (Th.). — *Démonstration géométrique du théorème de Sylvester : Toute forme cubique quaternaire peut être représentée par la somme de cinq cubes de formes linéaires.* (9 p.)

Reye (Th.). — *Représentation des formes biquadratiques par la somme de dix bicarrés.* (7 p.)

Ces trois Mémoires sont étroitement liés : le premier développe une nouvelle théorie des polaires, les deux autres en font l'application à deux problèmes connus.

Les nouvelles recherches de M. Reye se rattachent aux idées qu'il a exposées dans le Mémoire *Sur les moments d'inertie et de degré supérieur d'un système de masses par rapport à un plan* (*Journal de Borchardt*, t. 72, p. 293; *Bulletin*, t. III, p. 145). C'est là qu'il définit le $n^{\text{ième}}$ moment, par rapport à un plan, d'un système (continu ou non) de points matériels par l'intégrale $\int r^n dm$ étendue à tous les points du système, et où r désigne la distance de la masse dm au plan. Si l'équation du plan, sous la forme normale, est $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$, on a

$$r_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p,$$

et la somme

$$\sum m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = \text{const.},$$

ou bien l'intégrale équivalente, où les m_i sont supposés constants, les α, β, γ, p variables, dénote une surface de la classe n, si n est pair, de la classe $2n$, si n est impair; pour tous les plans tangents à cette surface, le $n^{\text{ième}}$ moment a une valeur constante. Si cette constante est nulle, l'auteur appelle la surface *surface nulle des* $n^{\text{ièmes}}$ *moments*, ou bien $n^{\text{ième}}$ *surface nulle* du système matériel.

Maintenant il remplace encore le plan P par une surface quelconque F^n d'ordre n. A cet effet, imaginons un point du système m_i, ayant pour coordonnées x_i, y_i, z_i; menons par m_i, à la surface F^n, une sécante suivant une direction fixe donnée; appelons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les n segments de cette sécante, comptés à partir du point m_i jusqu'aux points d'intersection de la surface F^n : alors la somme $\sum_i m_i \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n$, étendue à toutes les masses m_i du système, peut être appelée *moment du système matériel* par rapport à la surface F^n. Mais, comme cette somme est proportionnelle à cette autre $\sum_i m_i F^n(x_i, y_i, z_i)$, $F^n(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la surface, et que cette nouvelle somme est indépendante de la direction choisie au préalable, l'auteur définit la somme $\sum_i m_i F^n(x_i, y_i, z_i)$ comme *le moment du système matériel par rapport à la surface* F^n.

Si la surface F^n se décompose en une autre F^k et la $(n-k)^{\text{ième}}$ puissance d'un plan, son moment sera exprimé par la somme $\sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i) \cdot (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k}$, et l'on pourra la remplacer par les $(n-k)^{\text{ièmes}}$ moments d'un autre système matériel dont les masses M_i sont concentrées aux points (x_i, y_i, z_i) et ont les valeurs respectives $M_i = m_i . F^k(x_i, y_i, z_i)$. La $(n-k)^{\text{ième}}$ surface nulle de ce nouveau système matériel, partant la surface de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe représentée par l'équation

$$\sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i)(\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^{n-k} = 0,$$

sera appelée la *polaire de la surface* F^k *d'ordre k par rapport à l'autre surface de* $n^{\text{ième}}$ *classe*

$$\sum_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = 0.$$

Cette dernière surface est la $n^{\text{ième}}$ surface nulle d'un système matériel. On peut donc aussi définir la polaire de F^k par cette proposition : Si l'on élève l'ordre d'une surface d'ordre k à l'ordre n en y joignant $n-k$ fois un plan tangent de sa polaire, le moment du système matériel par rapport à la surface d'ordre n sera nul. La nouvelle théorie des polaires est, en effet, une généralisation de l'ancienne : la polaire devient identique à celle d'un groupe de k points si la surface F se réduit à ces points.

Un intérêt particulier s'attache aux surfaces de $k^{\text{ième}}$ ordre, telles que *toutes* les valeurs des α, β, γ, p satisfassent à l'équation de leur polaire; alors elles n'ont plus de polaires distinctes : une surface quelconque de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe en peut être regardée comme une polaire. Dans ce cas, l'auteur dit que la surface F^k est *apolaire* *à la surface* $\sum_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p) = 0$ de $n^{\text{ième}}$ classe. Une surface F^n entraîne toutes ses surfaces apolaires; mais, réciproquement, ce n'est qu'un certain nombre de ces surfaces qui servent à déterminer F^n. Et voilà le point de départ pour des recherches spéciales auxquelles sont consacrés surtout les deux derniers Mémoires.

Meyer (O.-E.). — *Sur la théorie du frottement intérieur.* (7 p.)

Si l'on suppose qu'une force qui sollicite un corps élastique ait besoin d'un certain temps pour parcourir la distance entre deux points du corps, ou que la cause et l'effet ne coïncident pas au même instant, cette hypothèse influencera la théorie de l'élasticité : on obtient des formules qui se distinguent des expressions connues par des termes qui, comme le fait voir leur forme, tiennent compte du frottement intérieur du milieu élastique. Cette considération donne lieu à une nouvelle déduction théorique des équations différentielles pour le frottement intérieur; il se présente ici comme un manque de parfaite élasticité provenant d'un retard de temps. M. Meyer remplace par cette nouvelle analyse une autre qu'il avait donnée au tome 59 du même Journal, et dont il ne reconnaît plus la validité.

Aron (H.). — *L'équilibre et le mouvement d'une calotte élastique infiniment mince et douée d'une courbure quelconque.* (39 p.)

Dans ce Mémoire, M. Aron établit les équations différentielles qui régissent l'équilibre et le mouvement de surfaces courbes quelconques, ou bien de calottes élastiques très-minces qui peuvent subir des déformations finies, mais dont les éléments ne permettent que des dilatations infiniment petites, ce qui est la seule hypothèse de l'élasticité; après cela, il aborde aussi le cas des glissements infiniment petits. Élève de M. Kirchhoff, il a presque exclusivement utilisé les travaux et les leçons de son maître. Voici les sources où il a puisé les idées de ses méthodes :

Kirchhoff. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe (*Crele's Journ.*, t. 40).

Kirchhoff. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastichen Stabes (même recueil, t. 56).

Dans le second Mémoire, M. Kirchhoff a déjà remarqué (p. 308) que la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique infiniment mince pourrait être développée d'une manière plus précise qu'il ne l'avait fait dans le premier, par une voie semblable à celle qu'il a prise dans le second, et que cette voie se prête même au cas où la plaque a une élasticité variant avec la direction. Conformément à ces indications, M. Gehring présenta, en 1860, à la Faculté de Philosophie de Berlin une dissertation inaugurale qui traite de l'équilibre et du mouvement des plaques très-minces susceptibles de petites déformations, en admettant en même temps une structure cristalline des plaques. Enfin Clebsch, tout en adoptant les méthodes de M. Kirchhoff, donne, dans son livre sur la *Théorie de l'élasticité*, les équations pour les déformations finies de plaques minces dont les éléments ne subissent que des dilatations infiniment petites, équations d'où découlent aussi les glissements infiniment petits. M. Aron vient donc de continuer la série de ces recherches, en y ajoutant la courbure des plaques.

Frobenius (G.). — *Sur l'échange de l'argument et du paramètre dans les intégrales des équations différentielles linéaires.* (4 p.)

Milinowski. — *Deux produits géométriques d'éléments curvilignes.* (2 p.)

Soient C^n et C^n_1 deux courbes d'ordre n; on établit entre les points de ces courbes une homographie telle, qu'à un point de C^n corresponde un seul point de C^n_1. Il s'agit de trouver l'ordre et la classe de la courbe engendrée par les droites qui joignent deux points correspondants.

Milinowski. — *Sur la Géométrie des courbes de troisième ordre.* (46 p.)

Dans un Mémoire inséré au tome 47 du même Journal et intitulé : *Propriétés générales des courbes algébriques,* Steiner a énoncé une série de théorèmes sans démonstrations. M. Milinowski en démontre une partie, en tant qu'ils se rapportent aux courbes de troisième ordre. Ses méthodes, empruntées à la Géométrie synthétique, s'appliquent quelquefois aussi à des courbes d'un ordre supérieur, et l'auteur a signalé des exemples de cette généralisation dans quelques endroits; mais, dans la plupart des cas, ses démonstrations se refusent à une extension : c'est que la courbe polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe de troisième ordre est du même ordre, tandis qu'en général l'ordre de la polaire harmonique est différent de celui de la courbe donnée.

THOMÉ (L.-W.). — *Sur la théorie des équations différentielles linéaires* (suite de Mémoires publiés aux tomes **74**, **75** et **76** du même Journal). (22 p.)

L'auteur fait l'application de ses recherches antérieures sur ce sujet à des équations différentielles dont les coefficients sont rationnels. Les valeurs de la variable indépendante x pour lesquelles les coefficients ne restent pas finis, et la valeur $x = \infty$, si, après la substitution de $x = t^{-1}$, les coefficients ne restent pas finis pour $t = 0$, s'appellent *points singuliers* de l'équation différentielle. Si, pour tous les points singuliers qui ne sont pas à l'infini, l'équation d'ordre m a le même indice caractéristique (*Bulletin*, t. IV, p. 238) $h > 0$, et pour $x = t^{-1}$, $t = 0$ l'indice caractéristique $\overline{\gtrless} h$, on peut demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle d'ordre m contienne les intégrales d'une équation différentielle d'ordre $m - h$ qui ne possède pas d'autres points singuliers que l'équation donnée et dont les intégrales soient toutes régulières. M. Thomé trouve les coefficients rationnels de cette nouvelle équation différentielle en les décomposant en fractions simples, qui se déterminent alors séparément. La question finale de voir si les intégrales de cette équation différentielle sont comprises parmi celles de l'équation donnée ne demande que les opérations qui se présentent quand on différentie des fonctions rationnelles.

LIPSCHITZ (R.). — *Réduction du mouvement d'un ellipsoïde liquide homogène au problème de variation d'une intégrale simple, et détermination du mouvement pour le cas limite d'un cylindre elliptique infini.* (28 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur la théorie de l'Électrodynamique* (3e Mémoire). *Les forces de l'Électrodynamique dans des corps conducteurs en mouvement.* (52 p.)

Le premier Mémoire (t. **72**) traite des phénomènes électrodynamiques dans des corps conducteurs au repos; dans ce cas, les effets se réduisent à l'induction de forces électromotrices, et la recherche théorique en paraissait en quelque sorte assez simple, parce que le mouvement électrique qui existe représente nécessairement une certaine quantité de travail, c'est-à-dire qu'il a un potentiel et que la valeur de ce potentiel pouvait être considérée comme bien connue pour des conducteurs fermés. La grandeur qui indique, comme la force vive de masses pondérables, la quantité d'énergie correspondant au mouvement de l'électricité, et qu'on peut donc nommer, avec M. Cl. Maxwell, l'*énergie actuelle du mouvement électrique,* est égale à la valeur négative du potentiel électrodynamique défini par M. F. Neumann père, et c'est aussi le sens attaché en général par M. Helmholtz à l'expression du mot dans le premier Mémoire. Cette notion, employée sans aucun égard aux phénomènes qui découlent du mouvement des conducteurs, n'est donc pas atteinte par les objections qui ont été faites par plusieurs géomètres et physiciens contre une application plus étendue aux forces motrices exercées mutuellement par des conducteurs de courants électriques (*forces pondéromotrices,* d'après la nomenclature expressive de M. C. Neumann fils). C'est une autre signification du potentiel électrodynamique qui n'est pas nécessairement unie à celle que nous venons de mentionner; mais c'est elle qui s'est développée la première et qui a déterminé la terminologie. Dans ce sens, le potentiel électrodynamique donne l'énergie potentielle des forces pondéromotrices d'origine électrodynamique, et le travail produit par les forces par suite d'un déplacement des corps conducteurs, les intensités des courants restant toujours invariables, équivaut à la différence dont la valeur du potentiel a diminué pendant le déplacement.

M. Helmholtz s'est donc proposé cette fois de rechercher si la notion primitive du potentiel électrodynamique comme potentiel des forces pondéromotrices est admissible vis-à-vis des faits connus. Suivant M. C. Neumann, il appelle *loi du potentiel des forces électrodynamiques pondéromotrices* l'hypothèse qui dit que les forces pondéromotrices d'origine électrodynamique ont un potentiel si l'intensité de tous les courants électriques reste constante dans les fils conducteurs matériels. Quand on se donne la valeur du potentiel et que l'on pose l'hypothèse que la grandeur et la direction des forces pondéromotrices sont indépendantes des déplacements virtuels ou actuels des éléments conducteurs, la grandeur de ces forces est parfaitement déterminée.

Comme la loi d'Ampère embrasse tous les faits qui portent sur la grandeur des forces pondéromotrices exercées par deux ou plusieurs courants fermés, il faudra prouver que, si l'on calcule les forces pondéromotrices qui dérivent de la loi du potentiel, on obtient exactement les mêmes valeurs qui s'ensuivent de la loi d'Ampère, les éléments conducteurs étant supposés flexibles, dilatables et capables de se déplacer à un degré quelconque. Cette preuve a été donnée par M. F. Neumann pour le cas des corps conducteurs linéaires, de forme et de grandeur invariables; il fallait alors cette restriction, parce que la théorie des courants dans des conducteurs à trois dimensions n'avait pas encore été créée; à présent, il est possible d'aborder aussi le cas général. Mais, quoique les deux lois (la loi potentielle et celle d'Ampère) soient tout à fait d'accord pour des courants fermés, elles montrent un désaccord marqué dans les effets pondéromoteurs de courants non fermés; car, si la loi du potentiel subsiste aussi pour les courants non fermés, il faut qu'il y ait : 1° outre les forces d'Ampère entre les éléments des courants, encore des forces attractives et répulsives; 2° entre les éléments et les bouts des courants, et 3° entre les extrémités des courants. M. Helmholtz discute ces relations au paragraphe 15 (les numéros font suite à ceux des deux premiers Mémoires) pour des conducteurs linéaires qui ne se ramifient pas; au paragraphe 16, pour des corps conducteurs à trois dimensions; au paragraphe 17, il montre comment il faut traiter les expressions analytiques pour des endroits où les éléments des conducteurs peuvent glisser. Comme il n'y a pas encore d'expériences directes sur les forces pondéromotrices d'origine électrodynamique qui se présentent aux extrémités des courants, il restait seulement à démontrer que la loi du potentiel satisfait à la loi de la constance de l'énergie quand on l'applique à des conducteurs de forme variable. A cet effet, l'auteur développe au paragraphe 18 les expressions analytiques pour l'induction électrodynamique provenant du mouvement de corps conducteurs à trois dimensions, et au paragraphe 19 il prouve la constance de l'énergie; enfin, au paragraphe 20, il a cherché à résoudre cette question : Quels écarts de la loi du potentiel pourrait-on établir dans les valeurs des forces électromotrices et induites par le mouvement sans déroger à la loi de la conservation de la force vive et sans changer les effets pondéromoteurs de courants fermés ?

Nous avons évité d'entrer dans la discussion des points de la théorie qui ont provoqué de vives objections de la part de MM. Bertrand, Neumann fils et Riecke. M. Helmholtz a amplement répondu à ses adversaires scientifiques ; mais la question est si délicate que nous avons préféré donner un sommaire du travail et renvoyer le lecteur, pour plus de détails, au Mémoire.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes.* (4 p., fr.)

LIPSCHITZ (R.). — *Démonstration d'un théorème de la théorie de l'élasticité.* (9 p.)

Le mouvement des parties d'un corps solide élastique qui n'est pas sollicité par des forces extérieures se détermine à l'aide de l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) dx\,dy\,dz \\ &\qquad\qquad + \iiint \delta \mathrm{F}\, dx\,dy\,dz = 0. \end{aligned}\right.$$

La fonction F est une fonction homogène du second degré par rapport aux quantités

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Le produit de la fonction F et de l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ peut être regardé comme la mesure du travail produit par la déformation de ce volume, et M. Kirchhoff a déjà énoncé l'assertion que cette fonction n'est jamais négative pour tous les corps qu'il y a au monde, et qu'elle ne s'évanouit qu'avec l'ensemble des six arguments (2). Cette même assertion se trouve reproduite dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Thomson et Tait. Maintenant M. Lipschitz fait faire à cette proposition un progrès remarquable ; car il montre que, si l'on suppose que les parties d'un corps solide élastique qui n'est pas sollicité de forces extérieures soient ébranlées dans chaque perturbation de l'équilibre de manière que le mouvement porte le caractère de stabilité, la fonction F possède nécessairement la propriété mentionnée.

Fuchs (L.). — *Sur la représentation à l'aide de fonctions algébriques* (supplément du Mémoire, t. 77, p. 339 du même Journal). (2 p.)

Stern. — *Sur la valeur de quelques intégrales.* (5 p.)

Détermination directe de la valeur de quelques intégrales signalées par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse,* p. 260.

Reye (Th.) — *Sur les surfaces sphériques qu'on peut circonscrire aux tétraèdres polaires d'une surface du second degré.*

Toutes les sphères qu'on peut circonscrire aux tétraèdres polaires d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont coupées orthogonalement par une sphère concentrique à la surface respective. Les centres de toutes les sphères qu'on peut circonscrire à un paraboloïde sont situés dans un plan normal à l'axe principal. E. L.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY (1).

T. II; 1873.

Studnička (F.-J.). — *Nicolas Copernic.* (56 p., avec portrait.)

Cet article a été rédigé à l'occasion du 400e anniversaire de la naissance du grand astronome. Ce qui donne un intérêt particulier à cet écrit, c'est que l'auteur y fait voir que les ancêtres de Nicolas Copernic descendaient d'une famille noble bohême. Voici la traduction de quelques passages relatifs à ce sujet :

« Les renseignements que nous possédons sur l'origine et sur la vie de Copernic n'offrent pas toute la précision que l'on pourrait désirer sur une question de si haut intérêt.

» Il est néanmoins avéré (2) qu'au xive siècle il existait en

---

(1) Voir *Bulletin,* t. VI, p. 88.

(2) « En 1831, M. Palacký écrivait, dans le *Journal du Musée national,* à Prague, p. 435 :

« Des recherches assidues, faites par les savants polonais sur la famille du célèbre

Bohême des seigneurs (*vladykové*) de Koprník, qu'on trouve mentionnés dans des documents du xv^e et du xvi^e siècle. Cette famille noble résidait à Koprník, village qui existe encore aujourd'hui entre Kněžmost, Kosmonosy et Bakov, au nord-ouest de Prague. On voit de plus, dans les *Acta consularia Cracoviensia,* qu'en 1396 Mikulàš Koprník *fut reçu citoyen de Cracovie,* et, à cette occasion, il fut certifié, par le témoin Dambrova, qu'il était *originaire de Bohême.*

» astronome Nicolas Copernic, il résulte que ses parents sont partis de Cracovie pour » aller se fixer à Thorn (Toruň); mais Cracovie n'était point le lieu d'origine de cette » famille, et, d'après certains indices, les historiens polonais ont été conduits à penser » que cette famille y était venue de Bohême. On s'est alors enquis s'il ne se rencontrait » pas dans ce dernier pays quelque chose pouvant rappeler les Copernic, ou s'il n'était » pas possible de retrouver leurs armes. La réponse à cette question se trouve dans les » *Misc. hist. r. Boh.,* Dec. I, Lib. V, p. 239 (Prague, 1683), dans les Extraits tirés des » Livres du Chapitre de Prague, intitulés *Libri Erectionum,* vol. XII, lit. D. 10 : « *Laneus* » *emtus pro ecclesia in Kosmanos a Nicolao plebano ecclesiæ prædictæ, decano Boles-* » *laviensi, ab honesta matrona Elsska conthorali Martini, dicti Zly, clientis de Stakor* » *seu de Borzejov cum ejus consensu, et fratris ejus Bohunkonis plebani ecclesiæ in* » *Sezemicz, anno* 1391, 25. *oct. Sigillum Martini et Bohunkonis galeæ super galeas* » *figura navis, hoc est arma natalitia personarum, scilicet Martini et Bohunkonis. In* » *tertio sigillo Wilhelmi de Zwierzeticz clypeus bipartitus et supra clypeum galea cum* » *duabus alis* « : *S. Wilhelmi de Lemberg, dicti de Zwierzeticz* ». *In quinto humana* » *imago securim in manibus tenens :* « S. Udalrici de Koprnik ». *In sexto galea, super* » *quam caput hirci cornuti erat sculptum :* « *S. Joannis dicti Lulak de Stakorecz* ». » 1391, 25 oct.

» Voilà une preuve certaine et saisissante de l'existence d'une famille noble bohême » du nom de *Koprník,* mais dont il a été impossible à Balbin et à moi de retrouver » aucune autre trace dans les Mémoires postérieurs du xv^e et du xvi^e siècle. Il est vrai- » semblable, d'après cela, que les Koprník quittèrent la Bohême vers la fin du xiv^e siècle » ou au commencement du xv^e, pour s'établir à Cracovie, les relations entre la Pologne » et la Bohême, et, en particulier, entre les villes de Cracovie et de Prague étant alors » beaucoup plus fréquentes et plus étroites qu'à aucune autre époque. C'est aux savants » polonais à examiner si les temps s'accordent. Le doute disparaîtrait entièrement si l'on » venait à découvrir que Nicolas Copernic avait les mêmes armes que nos seigneurs de » Koprník, c'est-à-dire qu'il portait sur son blason un *homme à hache.* Le village de » *Koprník* se trouve encore aujourd'hui dans le district (*kraj*) de Boleslav, entre » Kněžmost et Kosmonosy; il n'est pas douteux que c'était là la résidence de ces » seigneurs, qui, à la vérité, appartenaient à la petite noblesse bohême. »

» Quant aux armes de Nicolas Copernic, on a reconnu qu'elles contenaient aussi un homme; mais quelques-uns l'ont pris pour Apollon. Julian Bartoszewicz, dans la biographie étendue qu'il a composée pour l'édition des *OEuvres de Copernic,* publiée, en 1854, par J. Barovski, n'en fait aucune mention; il suppose que la famille de Copernic était polonaise, et originaire du bourg de Koprník (*) en Silésie; mais il n'en fournit point la preuve. »

(*) Aujourd'hui Köpprich, près Frankenstein.

» Enfin les armes des Koprník tchèques ressemblent à celles que portait l'illustre astronome ; dans celles-ci se trouvait *un homme*, que quelques-uns ont pris, on ne sait comment, pour Apollon ; les nobles tchèques du même nom, comme leurs parents les *Vanžura* de Řehnic, dont la famille s'est éteinte il n'y a pas longtemps, avaient dans leurs armes *un homme portant une hache*.

» En considérant ces trois circonstances et les relations très-intimes qui existaient à cette époque entre la Pologne et la Bohême, et spécialement entre Cracovie et Prague, il est impossible de douter que, vers la fin du XIVe siècle, le seigneur de Koprník n'ait quitté la Bohême pour aller habiter Cracovie, et qu'il n'ait été reçu, en 1396, citoyen de cette ville. Ainsi devient évidente l'*origine bohême des Koprník polonais*.

» Les orthographes diverses du nom de Copernic : *Koppernick, Koppirnig*, etc., ne prouvent rien, les noms propres n'ayant pas dans ce temps-là d'orthographe fixe. Cette circonstance, au contraire, ne fait que confirmer notre opinion, parce que le nom de *Koprník*, qui n'est pas polonais, n'est pas aussi facile à prononcer pour les Polonais que pour les Tchèques. La forme latine *Copernicus*, dont il se servait lui-même suivant l'usage du temps, tire évidemment son origine du mot tchèque *Koprník*, par lequel nous le désignons, et qui a pour racine le mot *kopr* (= douille). »

Studnička (F.-J.). — *Sur l'esprit mathématique, et sur quelques-uns de ses caractères.* (8 p.)

Dans ce discours, prononcé lors de la première réunion de la *Société Mathématique* dans l'année scolaire 1872-1873, l'auteur rappelle les trois remarques suivantes :

S'il s'agit de traduire en langage mathématique une proposition quelconque, ou, réciproquement, de présenter, sous la forme ordinaire, un résultat obtenu par la voie du calcul, il faut prendre le plus grand soin pour que ces traductions soient exactes.

La démonstration d'un théorème devient d'autant plus courte qu'on se sert de théorèmes plus voisins du théorème proposé.

Toutes les démonstrations d'un même théorème sont, au fond, également longues, c'est-à-dire qu'elles exigent finalement le même travail de l'esprit.

L'auteur développe un nombre suffisant d'exemples pour faire bien saisir la portée de ces trois remarques.

WEYR (Em.). — *Sur les coniques et leurs cercles osculateurs.* (4 p.)

On donne aux coordonnées des points d'une conique la forme de fonctions rationnelles d'un *paramètre*. A l'aide de ce paramètre, on démontre facilement diverses propositions relatives à plusieurs points situés sur la conique, et, en particulier, ce théorème de Steiner : « Par chaque point d'une conique passent trois cercles, qui osculent la conique en d'autres points; leurs points de contact et le point considéré se trouvent sur un même cercle. »

STUDNIČKA (F.-J.). — *Application géométrique de quelques théorèmes sur les déterminants.* (4 art.; 23 p.)

Dans cet article, qui s'adresse aux commençants, l'auteur résout plusieurs problèmes relatifs au triangle et au tétraèdre, en faisant partout usage de la théorie des déterminants.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Démonstration directe de la formule d'interpolation de Lagrange.* (2 p.)

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur la capitalisation continue de l'intérêt.* (1 p.)

Supposons l'année divisée en α parties égales, et qu'au bout de chacun de ces intervalles les intérêts du capital K_0, à p pour 100, soient joints au capital; le capital deviendra, au bout de n années,

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100\alpha}\right)^{\alpha n}.$$

On obtient la capitalisation continue pour $\lim \alpha = \infty$, ce qui donne

$$K_n = K_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

HERVERT (J.). — *Sur la force électromotrice.* (5 p.)

LOŠT'ÁK (J.) — *Sur la désignation des poids et mesures métriques.* (2 p.)

Le système métrique des poids et mesures devant être introduit officiellement en Autriche à partir du 1er janvier 1876, l'auteur propose les désignations abrégées *m., a., l.*, etc., pour *mètre, are, litre,* etc.; D., H., K., M. pour *déca, hecto,* etc.; *d., c., m.* pour *déci, centi, milli.*

WEYR (Em.). — *Détermination des éléments à l'infini dans les figures géométriques de l'espace.* (13 p.)

Suite du Mémoire intitulé : « Détermination des éléments à l'infini des figures géométriques planes ([1]) ». A l'aide des coordonnées homogènes dans l'espace, de Hesse, l'auteur développe la notion du plan à l'infini dans l'espace, et, après avoir considéré les plans et les droites parallèles, il passe à la détermination des points à l'infini des courbes dans l'espace (particulièrement les courbes rationnelles) et des courbes à l'infini des surfaces (particulièrement des surfaces du second degré). Il termine par la considération du cercle sphérique imaginaire à l'infini.

SEYDLER (A.). — *Sur le rayonnement de la chaleur dans différents milieux.* (14 p.)

Dans le huitième Mémoire de son Ouvrage bien connu sur la *Théorie mécanique de la Chaleur*, Clausius démontre cette proposition, que le pouvoir émissif d'un corps est en raison inverse du carré de la vitesse avec laquelle a lieu le rayonnement, ou en raison directe du carré de l'indice de réfraction du milieu dans lequel le corps rayonne. Clausius fonde sa démonstration sur ce théorème, que le rayon décrit sa route dans le moindre temps possible; il a, de plus, invoqué d'autres théorèmes de Physique supérieure, ce qui a rendu la démonstration très-générale et très-élégante, mais non accessible à tous les lecteurs. A cause de la grande importance du théorème en question, l'auteur du présent Mémoire a tenté d'en donner une démonstration plus élémentaire et plus facile à saisir. La quantité de chaleur qu'un élément superficiel d'un corps envoie à un autre élément est proportionnelle au pouvoir émissif, à la grandeur de l'élément superficiel, et à l'ouverture du cône de rayons partant du premier élément et ayant pour base le second. En calculant d'après cela cette quantité de chaleur, on parvient finalement au théorème ci-dessus.

La fin du Mémoire traite de quelques cas où un examen superficiel, même fondé sur le théorème en question, pourrait faire croire que la chaleur peut passer sans compensation d'un corps plus froid à un corps plus chaud. (*A suivre.*) E. W.

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 93.