Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 7-14

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. *Seconde Partie*. Cours autographié; 335 p., in-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1872.

Dans l'analyse de la première Partie [1], nous avons déjà indiqué dans quel esprit cet Ouvrage était conçu et énuméré les qualités qui le distinguaient. L'auteur s'est écarté, en beaucoup de points, des voies généralement suivies : ainsi il a supprimé la distinction trop tranchée qu'on établit entre le Calcul différentiel et le Calcul intégral ; indépendamment de l'avantage qu'on obtient par là pour les applications pratiques, la disposition des matières adoptées par l'auteur peut se justifier au point de vue logique. M. Hoüel attache avec raison une très-grande importance aux premières notions sur les infiniment petits ; on a remarqué qu'il veut établir les principes avec rigueur et prévenir, autant que possible, les difficultés qui peuvent naître dans l'étude des infiniment petits ; la lecture de la seconde Partie nous montre l'auteur toujours poursuivi par cette préoccupation et toujours fidèle à sa ligne de conduite. Pour prévenir la confusion entre l'infiniment petit et le très-petit, M. Hoüel a renoncé systématiquement à certaines notations généralement

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 257; 1871.

employées et fort commodes; il nous semble qu'en cela ses craintes sont peut-être exagérées.

Voici un résumé succinct des matières que renferme la seconde Partie :

Les quatre premières Leçons comprennent l'intégration des différentielles du premier ordre à plusieurs variables, la formation des équations différentielles par l'élimination des constantes arbitraires et la démonstration de l'existence d'une intégrale générale pour une équation différentielle d'ordre quelconque. Le principe de cette démonstration, qui est une modification de celle qu'a donnée Cauchy, consiste à établir que l'on peut construire, à l'aide de l'équation différentielle donnée, un polygone infinitésimal ayant pour limite déterminée une courbe satisfaisant à n conditions choisies arbitrairement, n étant l'ordre de l'équation différentielle.

Les cinq Leçons suivantes traitent de l'intégration des équations différentielles du premier ordre; une de ces Leçons est consacrée à la recherche des formules d'addition des transcendantes; la IX[e] Leçon a pour objet l'étude des solutions singulières. L'auteur emploie, pour représenter géométriquement l'intégrale générale et les solutions singulières, la considération des lignes de niveau et du contour apparent sur le plan des xy d'une surface dont les coordonnées sont les variables x, y, et la constante arbitraire d'intégration. Cette étude est faite avec soin et éclairée par de nombreux exemples; mais on sait que le dernier mot n'est pas encore dit sur ce sujet (¹). M. Hoüel expose, à la fin de cette Leçon, un critérium des solutions singulières, qui lui a été autrefois communiqué par P.-H. Blanchet, alors maître de conférences à l'École Normale supérieure.

La X[e] Leçon présente l'examen détaillé des cas où l'intégration des équations différentielles d'ordre quelconque peut s'abaisser ou bien être ramenée aux quadratures.

Après ces questions générales, vient l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque (Leçons XI, XII et XIII). Ayant d'abord exposé très-complétement les propriétés des équations différentielles linéaires sans second membre, puis nettement

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, 1873, p. 158.

établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n intégrales particulières soient distinctes, l'auteur développe les méthodes de d'Alembert, de Lagrange, de Cauchy, pour trouver une intégrale particulière de l'équation avec second membre.

Les équations différentielles simultanées sont l'objet des XIV^e, XV^e et XVI^e Leçons.

Après avoir étudié, dans la XVII^e Leçon, les équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré à plusieurs variables, M. Hoüel aborde la théorie des équations aux dérivées partielles et y consacre sept Leçons.

Les deux premières Leçons, en traitant de l'élimination des fonctions arbitraires et des équations aux dérivées partielles de certaines familles de surfaces, montrent ainsi une des origines de ce genre d'équations différentielles. Dans les Leçons suivantes, l'auteur, après avoir donné la formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre non linéaires et indiqué le rôle de l'intégrale complète, présente, d'une manière générale, l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, et celle des équations non linéaires du même ordre entre trois variables.

Il n'y a qu'une seule Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, et encore ne s'agit-il que des équations linéaires à coefficients constants; mais il ne faut pas perdre de vue que le Traité de M. Hoüel est destiné aux candidats à la licence; il y a cependant des indications suffisantes pour faire comprendre les méthodes de calcul employées dans la Physique mathématique pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Tel est le résumé succinct de la partie qui concerne le calcul intégral proprement dit; tout cela est exposé avec netteté et rigueur; le lecteur est conduit pas à pas jusqu'aux confins du Calcul intégral, et les difficultés principales sont écartées de son chemin; chaque règle est toujours accompagnée de nombreux exemples qui permettent d'en comprendre le mécanisme et fixent en même temps le raisonnement.

Les Leçons XXV, XXVI et XXVII renferment les premières notions du Calcul des variations.

Trois Leçons intéressantes terminent le cours proprement dit et initient le lecteur à l'importante étude des surfaces, en lui faisant connaître la mesure de la courbure des surfaces, le théorème de Gauss sur les surfaces applicables et les propriétés fondamentales des figures formées par les lignes géodésiques.

Ce Cours, déjà si bien rempli, est complété par un *Appendice* de douze leçons, intitulé : *Éléments de la théorie des quantités complexes*. Ces notions, qu'on ne rencontre pas habituellement dans les Traités de Calcul différentiel, sont indispensables pour comprendre la théorie des fonctions, entièrement renouvelée par les découvertes de Cauchy, Riemann, etc. Cet Appendice, qui est un extrait d'un Ouvrage publié par M. Hoüel, sous le titre de : *Théorie élémentaire des quantités complexes,* renferme les questions suivantes :

Notions sur la théorie générale des opérations. — Représentation analytique des points d'un espace à une dimension ; théorie des quantités négatives. — Représentation des points d'un espace à deux dimensions, au moyen des quantités complexes. Opérations algébriques sur les quantités complexes ; addition et soustraction. — Multiplication et division ; puissances et racines des quantités complexes ; proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. — Des fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe, et de leurs fonctions inverses. — Propriétés générales des fonctions d'une variable complexe. — Intégrales des fonctions d'une variable complexe, prises le long d'un contour donné. — Des intégrales prises autour d'un point. Représentation d'une fonction synectique sous forme d'une intégrale prise autour d'un point. Théorèmes de Cauchy et de Laurent, sur le développement des fonctions en série. — Étude d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un zéro ou d'un infini ; applications. — Séries de Bürmann et de Lagrange. — Calcul des intégrales définies. — Application de la théorie des quantités complexes à la Géométrie analytique (Calcul des équipollences de M. Bellavitis).

On voit que ce programme est assez étendu pour initier à la lecture des beaux travaux qui ont été faits sur ce sujet, et cette Partie complémentaire ajoute encore à la valeur du traité de M. Hoüel. L. P.

FOLKIERSKI (Wł.). — ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO Z ZASTOSOWANIAMI, wyłożył w sposób przystępny dla początkujących *W. Folkierski*, inżynier cywilny, b. uczéń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencjat nauk matematycznych Paryzkiego Fakulteta Sorbonny, Professor Mechaniki Szkoły wyższéj przygotowawczéj w Paryżu. — Nakładem Bibljoteki Kórnickiéj. Paryż, księgarnia Luxemburska; Warszawa, księgarnia M. Gluecksberga. — Tom I, 1870; Tom II, 1873. — In-8° (1).

Cet important Ouvrage contient un exposé complet de la partie élémentaire du Calcul infinitésimal. La lecture en est rendue facile par les explications détaillées dans lesquelles l'auteur est entré, et sa publication constitue un grand service rendu aux jeunes mathématiciens appartenant aux pays de langue polonaise. Nous allons donner un aperçu rapide du contenu des deux volumes publiés jusqu'à cette heure.

Le tome Ier se divise en quatre Parties, dont la première, intitulée *Notions préliminaires,* contient les six premiers Chapitres : Généralités sur les fonctions; leur représentation géométrique; quantités imaginaires et leur théorie géométrique; méthode des limites; séries; infiniment petits.

La deuxième Partie, comprenant les Chapitres VII à XII, a pour titre *Calcul différentiel.* La méthode d'exposition employée par l'auteur ne diffère pas de la méthode habituelle. Dérivées et différentielles; Méthodes de différentiation; Dérivées et différentielles d'ordre supérieur, leur calcul direct; Différentiation des fonctions de plusieurs variables; Changement des variables indépendantes. Les points les plus importants sont traités avec détail, et éclaircis par un grand nombre d'exemples.

La troisième Partie est consacrée aux *Applications analytiques du Calcul différentiel,* et se compose des Chapitres XIII à XVIII : Accroissements finis des fonctions (traités d'après la méthode de

---

(1) *Éléments de Calcul différentiel et intégral,* avec des applications, exposés d'une manière accessible aux commençants; par Ladislas FOLKIERSKI, ingénieur civil, ancien élève de l'École Polytechnique de Carlsruhe, licencié ès Sciences mathématiques de la Faculté de Paris, professeur de Mécanique à l'École préparatoire supérieure de Paris. — Édité par la Bibliothèque de Kórnik. Paris, librairie du Luxembourg; Varsovie, chez Glücksberg. — T. I, 1870, XLVI-1090 p.; t. II, 1873, XIII-742 p. — Le tome I est épuisé. Le tome II se vend séparément 12 fr. Le tome III est sous presse. — Voir *Bulletin,* t. VI, p. 158.

Cauchy); Séries de Taylor, de Maclaurin, de Bernoulli; Développement des fonctions en séries; Vraies valeurs des expressions indéterminées; Maxima et minima; Fonctions de variables imaginaires (fonctions monodromes); Convergence des séries à termes complexes; Fonctions élémentaires d'une variable complexe; différentiation; condition de monogénéité.

Dans la quatrième Partie, formée des six derniers Chapitres, M. Folkierski traite des *Applications du Calcul différentiel à la Géométrie :* Tangentes, asymptotes, contacts des divers ordres, etc., des courbes planes; Points singuliers (exposition claire et complète de cette théorie); Courbure, développées, courbes enveloppes; Tangentes, etc. aux courbes dans l'espace, plans tangents, etc. aux surfaces courbes, contacts des divers ordres, lignes et surfaces osculatrices, points singuliers des surfaces; Double courbure des lignes dans l'espace, développées, enveloppes; Courbure des surfaces, théorèmes de Meusnier et d'Euler, indicatrice, lignes de courbure, théorème de Dupin.

La plupart des Chapitres sont terminés par un recueil d'exercices, avec l'indication des solutions.

A la fin du volume se trouve un Appendice, par M. Lad. Trzaska (p. 1031-1087), intitulé *Notions élémentaires sur les déterminants,* et où les principes de cette théorie sont présentés d'une manière claire et élégante. Nous ferons seulement à M. Trzaska un léger reproche; c'est de transcrire tous les noms propres qu'il cite avec l'orthographe polonaise, qui ne parvient pas toujours à en reproduire exactement la prononciation, mais qui les rend souvent méconnaissables (par exemple, Kele, Kąbeskiur, Pęwę, etc., pour Cayley, Combescure, Painvin, etc.).

Le Tome II, qui a paru le jour du quatre-centième anniversaire de la naissance de Copernic, comprend la première moitié du Calcul intégral. Il est divisé en quinze Chapitres, dont les deux premiers traitent des définitions et des méthodes élémentaires d'intégration. Dans le Chapitre III, l'auteur expose l'intégration des fonctions rationnelles, en suivant, pour la décomposition en fractions simples, la marche tracée par M. Serret dans son *Cours d'Algèbre supérieure.*

Dans le Chapitre IV, il est question de l'intégration des fonctions algébriques irrationnelles. Après avoir traité les cas connus où l'intégration s'effectue au moyen des fonctions élémentaires, l'auteur s'occupe des fonctions rationnelles de x et d'un radical carré portant sur un polynôme du troisième ou du quatrième degré, et il ramène leurs intégrales aux types connus des intégrales elliptiques. Il donne ensuite les formules de réduction des intégrales binômes, et termine par des exemples d'intégration de fonctions qui ne rentrent dans aucun des cas généraux considérés. Le Chapitre V contient les calculs analogues relatifs à l'intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Le Chapitre VI a pour titre : *Méthode générale d'intégration,* et s'occupe de la solution de ce double problème : 1° Étant donnée une différentielle, reconnaître si elle est intégrable au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques, et, si elle l'est, déterminer son intégrale; 2° si elle ne l'est pas, ramener son intégrale au type le plus simple, et trouver les propriétés de la nouvelle transcendante. Théorèmes d'Abel et de Liouville; classification des transcendantes, leur irréductibilité.

L'auteur expose ensuite, dans le Chapitre VII, les principales méthodes pour le calcul des intégrales définies spéciales, prises entre des limites réelles. Intégrales singulières, leurs valeurs principales.

Dans le Chapitre VIII, intitulé *Intégrales multiples,* M. Folkierski traite d'abord de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$. Il donne ensuite la transformation d'une intégrale du $n^{\text{ième}}$ ordre en une somme d'intégrales du premier ordre, le théorème sur l'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double, l'interprétation géométrique des intégrales doubles et triples, et le changement de variables dans les intégrales multiples.

Les Chapitres IX et X ont pour objet les applications de l'intégration à la rectification et à la quadrature des courbes planes, à la complanation et à la cubature des surfaces.

Le Chapitre XI traite des *Intégrales définies à limites imaginaires.* L'auteur rappelle d'abord la condition pour qu'une expression $u = X + Yi$ soit une fonction (monogène) d'une variable complexe $z = x + yi$. Il définit ensuite l'intégrale d'une différentielle complexe, et donne une limite supérieure de la grandeur de son module. Il démontre le théorème fondamental de Cauchy, $\int_{z_0}^{z_0} f(z)\,dz = 0$, et en déduit les principales conséquences. Cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie; intégrale de Cauchy $\int_{(K)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz$. Intégrales multiformes; fonctions périodiques et indices de périodicité. Exemples du calcul d'intégrales définies à limites imaginaires.

Dans le Chapitre XII, *Intégration des séries*, on donne les théorèmes relatifs à l'intégration et à la différentiation d'une série, et au développement en série d'une fonction synectique. Application à la théorie des fonctions; résidus. Propriétés générales des fonctions synectiques multiformes. Intégrales considérées comme sommes de séries; développements en séries des intégrales elliptiques, du logarithme intégral, etc.

Les séries de Lagrange et de Fourier font l'objet du Chapitre XIII. L'auteur traite la série de Lagrange par la méthode de M. Rouché, et il en donne quelques applications. Il établit ensuite le théorème de Fourier par la méthode de Lejeune-Dirichlet. Séries et intégrales de Fourier.

Le Chapitre XIV est consacré à l'étude des intégrales eulériennes, dont les propriétés sont exposées avec détail.

Le Chapitre XV et dernier traite de l'Application du Calcul intégral au Calcul des Probabilités, et de la méthode des moindres carrés. L'auteur s'est servi principalement de l'Ouvrage de Gauss, traduit par M. Bertrand, et du travail de M. Dienger, intitulé : *Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrat-Summen* (Brunswick, 1867).

Les divers Chapitres de ce volume, comme ceux du précédent, contiennent des recueils de questions à traiter. Le volume est terminé (p. 713-738) par une Table d'intégrales indéfinies.

L'auteur annonce la publication prochaine du troisième et dernier volume, qui doit contenir l'intégration des équations différentielles et le calcul des variations. A. P.