Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

A. Clebsch

Sur un nouvel élément fondamental de la géométrie analytique du plan

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 234-249

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__234_1>

MÉLANGES.

SUR UN NOUVEL ÉLÉMENT FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DU PLAN.

PAR M. A CLEBSCH [3].

Dans un Mémoire qui a paru dans le 17e volume des *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Gottingue* [4], j'ai cherché à caractériser les éléments essentiels que l'on a à considérer dans la

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 120.
[2] Voir *Bulletin*, t. VII, p. 35.
[3] *Mathematische Annalen*, t. VI, 1873.
[4] *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.*

théorie des invariants. Dans la Géométrie analytique plane (l'Algèbre des formes ternaires), il y a nécessité de chercher un ensemble géométrique comprenant les courbes algébriques comme un cas très-particulier, et qui soit en même temps le plus général dont l'étude puisse être entreprise dans la théorie des invariants des formes ternaires.

Cet ensemble géométrique, dont l'étude constitue pour ainsi dire la Géométrie analytique tout entière, notre but, dans le présent article, est de le définir et d'en étudier les propriétés les plus essentielles, en réservant de plus amples développements pour une publication ultérieure.

I.

DÉFINITION DU CONNEXE.

La figure dont il est ici question est donnée par une équation contenant les coordonnées d'un point mobile (x) et d'une droite mobile (u) entrant séparément d'une manière homogène :

$$f(x, u) = 0.$$

Ce sont les formes de la nature de celles que l'on appelle, dans la nouvelle Algèbre, formes adjointes (*Zwischenformen*), et qui, considérées comme formes fondamentales indépendantes, donnent lieu par leur évanouissement aux figures que nous devons considérer ici. Dans la fonction f les x entrent au m^{ieme} ordre, les u au n^{ieme}. J'appelle la figure représentée par l'équation (1) *connexe du m^{ieme} ordre et de la n^{ieme} classe,* ou, plus brièvement, *connexe* (m, n).

On peut construire une pareille figure par un procédé analogue à celui que Grassmann a employé pour les figures algébriques en général et pour les courbes algébriques en particulier. En général, à chaque droite u correspondent une infinité de points x qui forment une courbe C_m du m^{ieme} ordre, et à chaque point une infinité de droites u qui enveloppent une courbe K_n de la n^{ieme} classe.

Pour saisir facilement ces rapports, il est convenable de ne considérer ni le point ni la droite comme *éléments essentiels* du plan; j'appelle élément la combinaison d'un point avec une droite. Les éléments conjoints (x, u) forment alors, d'après la désignation ordinaire, un système quadruplement infini. D'après cela, l'équation d'un connexe détermine la série triplement infinie des éléments qui satisfont à son équation. Ce qui précède peut encore s'exprimer de la manière suivante : Les points qui avec une droite donnée sont les éléments du connexe (m, n) forment une courbe C_m du $m^{ième}$ ordre; les droites qui avec un point donné sont les éléments de ce connexe enveloppent une courbe K_n de la $n^{ième}$ classe.

C'est seulement dans des cas particuliers que chaque point du plan forme un élément du connexe avec une droite déterminée, ou chaque droite du plan avec un point déterminé. On peut trouver de tels points ou de telles droites singulières en nombre quelconque dans certains connexes particuliers; il peut même y en avoir une infinité.

Ce dernier cas se présente dans les connexes irréductibles quand l'équation $f = 0$ ne contient pas les x ou ne contient pas les u; si elle ne contient pas les u, on a l'équation d'une courbe en coordonnées ponctuelles; on peut la considérer comme un connexe, en formant les éléments de ce connexe avec chaque point de la courbe et une droite prise à volonté. On peut faire des remarques analogues si $f = 0$ ne contient pas les x et par suite est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles.

Les connexes (1, 1) conduisent à la collinéation, et cela de telle manière que ces cas particuliers du connexe, qui n'ont aucun intérêt pour l'étude de la collinéation, conservent encore un sens défini quand on les rattache au connexe.

L'étude de la collinéation, en prenant pour base une expression qui contient linéairement x et u, a déjà été donnée par M. Gordan et par moi dans le premier volume de ces *Annales* (1). Si l'on part de la notion des connexes, on voit qu'à chaque point x du plan correspond un point y, qui est le sommet d'un faisceau de droites (courbes de première classe). Toutes les droites qui passent par y forment avec x des éléments de connexe, et pareillement y est le point qui correspond à x dans la collinéation. Ainsi, à chaque droite u en correspond une autre v (courbes de premier ordre), dont les points forment avec u des éléments, et pareillement la droite u est celle

(1) *Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln.* — Voir *Bulletin*, t. I, p. 132.

qui correspond à ν dans la collinéation. Cette manière de comprendre la collinéation conduit à différents problèmes et théorèmes intéressants. Je mentionne seulement la construction des figures collinéaires qui ne sont pas données par quatre couples de points correspondants, mais par huit points et par huit droites sur lesquelles les points correspondants doivent être situés. On a ainsi le théorème suivant :

« Dans toute collinéation, dans laquelle les points correspondant à cinq points donnés sont situés sur cinq droites données, il existe toujours un sixième point pour lequel les points correspondants sont tous situés sur une droite donnée, et ce point et cette droite peuvent être construits linéairement. »

II.

COÏNCIDENCE ET COUPLE DE COURBES.

De même que l'on peut obtenir les courbes algébriques comme intersection des surfaces algébriques, de même on peut déduire du connexe d'autres figures que comprennent les éléments communs à plusieurs connexes.

A la totalité des éléments qui sont communs à deux connexes, ou, si ces éléments peuvent être rationnellement distribués en diverses parties, à chacune de ces parties je donne le nom de *coïncidence*.

Dans une coïncidence il ne correspond en général à chaque droite qu'un nombre fini (μ) de points qui peuvent former avec elle un élément; de même, à chaque point correspond un nombre fini (ν) de droites. On peut désigner par μ l'ordre, par ν la classe de la coïncidence, et donner à cette dernière le nom de *coïncidence* (μ, ν).

La coïncidence comprend la notion la plus générale des transformations réciproques, c'est-à-dire de celles qu'on obtient lorsqu'on a deux systèmes A et B, situés l'un et l'autre dans un plan, qu'à chaque point de A correspond un certain nombre de droites de B, et qu'à chaque droite de B correspond un certain nombre de points de A. L'inverse n'a généralement pas lieu; aux points d'une droite de A correspondent en général dans B les tangentes d'une courbe; et inversement, à un point dans B, c'est-à-dire aux droites du faisceau qui passent par ce point correspondent les points A qui décrivent une courbe. D'après cela, il y a à remplir des conditions particulières pour que la coïncidence commune à deux connexes (1, 1) soit équivalente à la transformation collinéaire réciproque, qui peut à la vérité être obtenue de la manière la plus générale par un choix convenable des deux connexes.

La totalité des éléments qui sont communs à trois connexes, ou une fraction pouvant être représentée rationnellement de cette totalité, forme *un couple de courbes*. Au moyen des équations de ces connexes, en général, les u peuvent être exprimés rationnellement au moyen des x aussi bien que les x au moyen des u, tandis que l'on obtient par l'élimination des x une équation entre les u, et par l'élimination des u une équation entre les x; on a ainsi une courbe en coordonnées ponctuelles, ou une courbe en coordonnées tangentielles, et les points de l'une correspondent d'une manière unique aux tangentes de l'autre.

Il n'est pas sans intérêt de considérer la correspondance uniforme (*eindeutig*) entre deux courbes, de la manière même qui se présente ici; car c'est cette forme non résolue d'équations, telle que nous l'offre notre théorie, que l'on rencontre le plus souvent dans la plupart des recherches relatives à ce sujet.

III.

DES COVARIANTS ET DE LA DÉPENDANCE DES FORMES BINAIRES DOUBLES.

Chaque connexe donne lieu à un certain nombre de covariants connexes, coïncidences ou couples de courbes, de même que d'autre part les figures de cette dernière sorte peuvent donner lieu à des covariants des trois espèces. On obtient une coïncidence covariante d'un connexe donné lorsqu'on n'associe pas chaque droite du plan avec tous les points de la courbe correspondante C_m, mais seulement, par exemple, avec les points d'inflexion de celle-ci, ou encore les points de contact des tangentes doubles; ou si l'on n'associe pas chaque point du plan avec toutes les tangentes de la courbe correspondante K_n, mais par exemple avec les tangentes aux points d'inflexion ou de rebroussement. Un couple de courbes est formé par les points doubles et les points de rebroussement qui se trouvent dans le système des C_m, et les droites correspondantes, aussi bien que dans le système des K_n par les tangentes doubles et les tangentes d'inflexion et les points correspondants.

Au début de cette théorie des invariants, il est intéressant d'étudier une classe particulière de connexes covariants déduits du premier, et que l'on obtient de la manière suivante.

Considérons un élément arbitraire (y, v) n'appartenant pas au connexe donné. Le point y est le sommet d'un faisceau de droites u, la droite v contient une série de points x. Si (x, u) est un élément du connexe donné, à chaque valeur de x correspondra un groupe Γ_n de n droites u; à chaque valeur de u un groupe C_m de m points x. Considérons un élément de cette sorte (x, u) appartenant au connexe donné, et le groupe Γ_n correspondant à x (qui contient u), ainsi que le groupe C_m correspondant à u (qui contient x). Que l'on suppose maintenant que le groupe Γ_n possède une des propriétés des invariants binaires et que C_m possède la même propriété ou bien une autre; il en résulte alors une condition pour (y, v), et cet élément appartient à un connexe covariant.

Une propriété caractéristique des connexes covariants ainsi formés est que leurs équations peuvent se déduire de la théorie des formes binaires. Les formes binaires que l'on a à considérer ici contiennent des séries de variables, et les invariants dont il vient d'être question jouissent encore de la propriété des invariants, si une des séries de variables est assujettie à une transformation linéaire, l'autre série à une autre transformation linéaire arbitraire. Si l'on représente symboliquement une semblable forme doublement binaire par

$$\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2)^n,$$

les invariants dont il est ici question ont alors pour expression

$$J = \Sigma c . \Pi(ab) \Pi(\alpha\beta),$$

où c représente des coefficients numériques; a, b,... sont les symboles de l'un, α, β,... sont les symboles de l'autre, mais ces deux classes de symboles ne se rencontrent jamais simultanément.

Soit maintenant

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^n = 0$$

l'équation symbolique du connexe donné; on trouvera alors l'équation du connexe covariant, qui avec la représentation de l'invariant J peut se mettre sous la forme

$$o = \Sigma c . \Pi(abv)\Pi(\alpha\beta\gamma).$$

Cette classe de connexes covariants est ainsi ramenée à l'étude des invariants de certaines formes binaires doubles; de même que l'équation tangentielle d'une courbe, donnée en coordonnées ponctuelles, se ramène à l'étude du discriminant d'une forme binaire contenant une seule série de variables.

IV.

CONNEXES CONJUGUÉS.

Parmi les invariants d'une forme binaire double

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2; u_1, u_2),$$

il y en a un qui satisfait aux conditions données plus haut et qui est analogue, dans un certain sens, aux discriminants d'une forme binaire ordinaire.

Si nous donnons dans φ aux x des valeurs arbitraires fixes, les systèmes de valeurs des u résultant de l'équation $\varphi = o$ formeront un groupe Γ_n; de même, si nous attribuons aux u un système de valeurs déterminé, les systèmes de valeurs correspondants des x formeront un groupe C_m. L'évanouissement des invariants dont il est ici question exprime qu'il existe un système de valeurs de x_1, x_2, u_1, u_2, pour lequel, dans le groupe Γ_n correspondant aux x, les u doivent former une double solution, comme inversement, dans le groupe C_m correspondant aux u, les x doivent former une double solution. On obtient ces invariants égalés à zéro, après qu'on a éliminé les x et les u des quatre équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = o, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = o, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = o, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = o,$$

équations qui tiennent simplement lieu de trois et ne donnent lieu, pour cette raison, qu'à une seule résultante. Celle-ci est en général, par rapport aux coefficients de φ, du degré

$$2[mn + 2(m-1)(n-1)].$$

Cet invariant conduit à un covariant connexe particulièrement remarquable, de l'ordre

$$n[mn + 2(m-1)(n-1)]$$

et de la classe

$$m[mn + 2(m-1)(n-1)],$$

auquel je donne le nom de *conjugué* par rapport au connexe proposé. Il y a réciprocité entre les deux connexes; le conjugué du conjugué est le connexe donné, et ces rapports sont tout à fait analogues à ceux qui existent entre une courbe considérée comme lieu de points et comme enveloppe de droites.

Géométriquement, on définit le connexe conjugué de la manière suivante :

On part d'un élément (x, u) du connexe donné, x étant un point de C_m correspondant à u, u une tangente de K_n correspondante à x. Soient maintenant y le point de contact de u avec K_n, v la tangente à C_m en x. Alors (y, v) est un élément du connexe conjugué, et l'on obtient le connexe conjugué tout entier, si l'on fait parcourir à l'élément (x, u) le connexe donné tout entier. On obtient, d'après cela aussi, l'équation du connexe conjugué en éliminant les x et les u des équations

$$\rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0.$$

Un connexe et son conjugué se correspondent l'un à l'autre, élément à élément (*eindeutig*); mais l'ordre et la classe du connexe conjugué surpassent en général ceux du connexe donné. Aussi, si le connexe conjugué du connexe donné doit être le connexe lui-même, il faut que ce dernier possède certaines propriétés qui abaissent l'ordre et la classe du conjugué. On reconnaît ces propriétés dans l'introduction des *singularités nécessaires*.

Par singularités nécessaires, j'entends une classe de singularités qui se rencontrent toujours dans un connexe ou dans son conjugué. Si l'on donne à un connexe le nom de *général*, lors même qu'il ne contient pas des coefficients complétement arbitraires, pourvu qu'il ne contienne que ces sortes de singularités, alors il en est de même du connexe conjugué. Les connexes qui possèdent ces singularités forment un système fermé, tel que les connexes conjugués en font également partie; cette conception est tout à fait analogue à celle dont on fait usage pour les courbes planes, lorsque à chaque courbe en coordonnées ponctuelles on adjoint cette courbe elle-même en coordonnées tangentielles, comme plus haut le connexe conjugué au connexe primitif. Les singularités nécessaires sont ici celles qui se présentent dans les formules de Plücker : points doubles et points d'inflexion d'une part, tangentes doubles et tangentes d'inflexion de l'autre. Si l'on part d'une courbe qui possède des points doubles et des points de rebroussement distribués d'une manière arbitraire, le nombre des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion pourra être, il est vrai, modifié, mais ces tangentes ne pourront être amenées à des singularités plus élevées. Si l'on considère l'ordre de la courbe comme lieu de points, il peut y avoir dans cette courbe des singularités nécessaires de toutes sortes, sans que la même courbe, considérée comme enveloppe de droites, contienne d'autres singularités que celles que nous appelons *nécessaires*. On peut caractériser de même la notion des singularités nécessaires dans toutes les figures algébriques.

De même que dans les courbes algébriques planes, ce sont les points doubles et les tangentes doubles (y compris les points de rebroussement et les tangentes d'inflexion) qui constituent les singularités nécessaires, dans les surfaces, les courbes doubles et les points doubles ou triples, de même ici les singularités nécessaires se forment avec des figures doubles, triples, quadruples; et même les figures doubles peuvent s'élever à une double infinité, c'est-à-dire jusqu'à la coïncidence, les images triples jusqu'au couple de courbes, tandis que les éléments quadruples se rencontrent seulement à l'état isolé comme singularités nécessaires.

V.

LA COÏNCIDENCE PRINCIPALE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE.

J'appelle *connexe identique* le connexe (1, 1) qui est défini par l'équation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0;$$

dans ce connexe, à chaque point correspond la totalité des droites qui y passent, et à chaque droite la totalité des points qui y sont situés. Les éléments du connexe sont d'ailleurs les combinaisons des points et des droites associées.

Tous les éléments qui sont communs au connexe donné $f=0$ et au connexe identique forment une coïncidence covariante particulièrement importante pour l'étude du connexe $f=0$; je lui donne le nom de *coïncidence principale* du connexe. Dans cette coïncidence, à chaque point correspondent n droites passant par ce point; ces droites sont les tangentes menées de ce point à la courbe K_n correspondante; et à chaque droite correspondent m points, qui sont les points d'intersection de cette droite avec la courbe correspondante C_m.

La recherche de la coïncidence principale est identique à la recherche de l'équation différentielle algébrique la plus générale du premier ordre. Considérons avec chaque point du plan les n éléments infiniment petits, qui partent de ce point dans la direction des n droites correspondantes, il existe simultanément avec ces éléments un système de courbes, tel que par chaque point du plan passent n branches du système et que chaque droite du plan est touchée par m droites du système.

Je nomme ces courbes les courbes connexes correspondantes à $f=0$; elles représentent l'intégrale d'une équation différentielle algébrique qui est donnée par le connexe et qui possède tous les coefficients généraux qui se trouvent dans le connexe. On a ainsi une représentation géométrique de cette intégrale qui se présente d'elle-même, qui fait ressortir le caractère dualistique de l'intégrale; car l'équation différentielle peut être formée de deux manières, suivant que l'on considère les x ou bien les u comme variables. On obtient la première en remplaçant u par les quantités

$$x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2,\quad x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3,\quad x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1;$$

la seconde, en mettant à la place des x les quantités

$$u_2\,du_3 - u_3\,du_2,\quad u_3\,du_1 - u_1\,du_3,\quad u_1\,du_2 - u_2\,du_1$$

dans l'équation du connexe.

Une équation différentielle du premier ordre à coefficients algébriques peut être obtenue de cette manière. On peut représenter la connexion qui existe entre l'équation différentielle algébrique et la coïncidence principale d'un connexe de la manière suivante.

A une coïncidence principale appartiennent une infinité de connexes. Si l'on représente l'un d'entre eux par $f = 0$, ils sont représentés par l'équation $f + M u_x = 0$, dans laquelle M est une fonction arbitraire de x, u des degrés convenables par rapport aux deux séries de variables.

Soit maintenant une équation algébrique entre ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi} = p$,

$$\varphi(\xi, \eta, p) = 0.$$

Mettons l'équation $\varphi = 0$ sous la forme

$$f(\xi, \eta; -p, \xi p - \eta) = 0,$$

ce qui peut se faire d'une infinité de manières;

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}; \frac{u_1}{u_2}, \frac{u_3}{u_2}\right) = 0$$

est toujours l'équation d'un connexe dont les courbes connexes sont données par l'équation $\varphi = 0$.

Tant qu'on ne fait aucune hypothèse particulière sur les coefficients du connexe, l'équation différentielle n'a aucune intégrale singulière; mais il est facile de représenter ces courbes, parmi lesquelles l'une est le lieu des points de rebroussement des courbes qui forment l'intégrale, tandis que l'autre est enveloppée par les tangentes d'inflexion de ces mêmes courbes. Ces courbes se transforment dans l'intégrale singulière toutes les fois que la direction de la tangente en un point de rebroussement coïncide constamment avec la tangente à la courbe formée par les points de rebroussement, ou encore que le lieu qui est enveloppé par les tangentes d'inflexion coïncide avec le lieu des points d'inflexion lui-même.

VI.

THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE.

Les considérations qui précèdent conduisent à une application intéressante de la théorie précédente, en même temps qu'elles fournissent une classification des équations différentielles algébriques du premier ordre tout à fait analogue à celle que Riemann a donnée pour la classification des intégrales abéliennes.

Ces recherches se rattachent à l'extension que nous avons donnée au théorème de Riemann sur la conservation du nombre p par des transformations uniformes ou, en langage géométrique, à l'invariabilité du genre des surfaces algébriques, dans les *Comptes rendus*, année 1868, méthode que M. Nöther a étendue, dans le deuxième volume de ces *Annales*, aux figures algébriques contenant un nombre quelconque de variables.

Représentons par (x, u) un élément du connexe $f = 0$; par $d'x$ un accroissement de la variable x contenue dans le connexe pour lequel u reste invariable; de même, par $d''u$ un accroissement de u pour lequel x demeure invariable; enfin par dx, du des accroissements quelconques des variables x et u dans l'étendue du connexe. Désignons par α, β des quantités arbitraires, et par Θ une fonction entière, qui est respectivement de l'ordre $m - 3$ et $n - 3$ par rapport aux x et aux u; on a alors

$$dJ = \frac{\Theta.(x\alpha d'x)(u\,du\,d''u)}{\Sigma\alpha_i f'x_i} = -\frac{\Theta.(x\,dx\,d'x)(u\beta d''u)}{\Sigma\beta_i f'u_i}$$

pour l'élément d'une intégrale triple. Si l'on détermine maintenant les constantes qui entrent dans Θ, de telle sorte que cette intégrale ne devienne jamais discontinue, le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans Θ détermine le genre du connexe; ce nombre demeure invariable, de quelque manière qu'on transforme le connexe. On peut traiter de la même manière la question du genre d'une coïncidence et d'un couple de courbes. Ce dernier est identique avec le genre qui, d'après la théorie des fonctions abéliennes, convient à chacune des deux courbes. Pour la définition du genre d'une coïncidence, je désigne par $f = 0$, $\varphi = 0$ l'équation des connexes dont l'intersection totale ou partielle forme la coïncidence, par m, n et m', n' l'ordre et la classe de ces connexes. Soient d'ailleurs dx, du; $d'x$, $d'u$ deux directions quelconques d'accroissement, dans la coïncidence, a, α, b, β étant les grandeurs arbitraires, et Θ une fonction entière qui est par rapport à x de l'ordre $m + m' - 3$, par rapport à u de l'ordre $n + n' - 3$; on a alors

$$\begin{aligned} dJ &= \frac{\Theta.(dx\,d'x\,x)(ub\beta)}{\Sigma b_i f'u_i.\Sigma\beta_i\varphi'u_i - \Sigma b_i\varphi'u_i.\Sigma\beta_i f'u_i} \\ &= \frac{\Theta.(du\,d'u\,u)(xa\alpha)}{\Sigma a_i f'x_i.\Sigma\alpha_i\varphi'x_i - \Sigma\alpha_i f'x_i.\Sigma a_i\varphi'x_i}, \end{aligned}$$

qui est un élément d'une intégrale double. Si l'on détermine maintenant les constantes dans Θ, après qu'on a réduit leur nombre le plus possible, au moyen des équations $f=0$, $\varphi=0$, de manière que l'intégrale double ne devienne jamais infinie, le nombre des constantes arbitraires qui subsistent indique le genre de la coïncidence; ce nombre ne change pas par les transformations uniformes de la coïncidence.

C'est ce qui a lieu particulièrement pour la coïncidence principale d'un connexe. Une transformation uniforme ne transforme pas toujours de cette manière la coïncidence principale d'un connexe; mais, parmi toutes les transformations uniformes dont une coïncidence principale est susceptible, il en existe particulièrement un groupe qui la transforme de nouveau en coïncidence principale, et, pour cette dernière, le genre reste le même. On voit maintenant que ces transformations sont précisément les transformations uniformes de l'équation différentielle correspondante du premier ordre. Représentons celle-ci avec la notation habituelle

$$f\left(x, y\,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

où f est une fonction entière; cette transformation algébrique uniforme consiste plus généralement à poser

$$\left\{\begin{aligned}\xi &= \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),\\ \eta &= \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right);\end{aligned}\right. \tag{2}$$

φ et ψ sont d'ailleurs deux fonctions rationnelles quelconques. Admettons que l'on puisse, au moyen de (1) et (2) et de l'équation qui en résulte, exprimer rationnellement x, y, $\frac{dy}{dx}$ au moyen de ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$, en même temps que l'on exprime $\frac{d\eta}{d\xi}$ au moyen de $x, y, \frac{dy}{dx}$. L'équation finale en ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$, à laquelle on parvient, est alors une équation différentielle transformée pour laquelle le nombre des constantes a la même valeur que dans l'équation primitive.

On peut, d'après cela, convenir que ce nombre représente le genre de l'équation différentielle, et l'on a alors une classification des équations différentielles algébriques du premier ordre, qui comprend dans le même groupe les équations différentielles du même genre, et dans laquelle on considère comme identiques toutes celles qui dérivent l'une de l'autre par une transformation uniforme. Je remarque, en particulier, que le genre est toujours nul, lorsque l'équation différentielle est intégrable de telle manière que l'on puisse exprimer y au moyen de x, par une intégrale abélienne; c'est-à-dire lorsque l'équation différentielle se déduit des équations de la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\zeta, \xi), \quad f(\zeta, \xi) = 0$$

par l'élimination de ζ, où φ et f sont des fonctions rationnelles de leurs arguments.

VII.

RAPPORT AVEC LA GÉOMÉTRIE DE LA LIGNE DROITE.

Pour terminer cet article, nous allons examiner un rapport qui existe entre les connexes et les complexes de Plücker, et nous verrons que ces dernières figures ne sont essentiellement que d'autres interprétations de la même conception algébrique.

Supposons d'abord que le système des droites u, situées dans le plan d'un connexe donné, soit représenté collinéairement par les points y d'un second plan. A chaque élément (x, u) du premier plan correspond alors une droite qui établit la liaison entre le point x et le point y correspondant à u. Les droites de l'espace se trouvent ainsi liées de cette manière à la totalité des éléments (x, u).

Si l'on donne entre les éléments du plan une équation (celle du connexe), il en résulte une relation à laquelle les droites correspondantes de l'espace doivent satisfaire. Au connexe correspond ainsi un complexe; de même, quand on donne deux équations, à une coïncidence correspondra une congruence, et quand on donne trois équations, à un couple de courbes correspondra une surface réglée.

On peut de la même manière transformer l'équation d'un connexe dans celle d'un complexe. Soient ξ, η les coordonnées de points de l'espace, $p_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$ les coordonnées d'une droite. Que l'on pose, dans l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$$

du connexe,

$$\begin{array}{ll} \rho x_1 = p_{14}, & \sigma u_1 = p_{13}, \\ \rho x_2 = p_{24}, & \sigma u_2 = p_{23}, \\ \rho x_3 = p_{31}, & \sigma u_3 = p_{43}, \end{array}$$

l'équation du connexe prend alors la forme

$$(1) \qquad \varphi(p_{13}, p_{23}, p_{14}, p_{24}, p_{34}) = 0.$$

La quantité p_{12} n'entre pas, de sorte qu'on n'a pas à se servir de l'identité. Le complexe (1) est du degré $m+n$; mais il se distingue du complexe général du $(m+n)^{\text{ième}}$ degré par des singularités caractéristiques; car son équation est, par rapport à p_{14}, p_{24}, p_{31}, homogène et du m^{ieme} degré; par rapport à p_{13}, p_{23}, p_{43}, homogène et du $n^{\text{ième}}$ degré; par conséquent le complexe renferme un plan singulier d'ordre m et un autre plan singulier d'ordre n; chaque droite située dans l'un de ces plans est m fois ou n fois droite du complexe, et ces plans ne sont autre chose que les plans des x et des y des constructions précédentes.

Si l'on veut, inversement, revenir d'un complexe donné au connexe qui lui correspond, en employant la méthode précédente, on peut y arriver en éliminant p_{12} au moyen de l'identité. Si le complexe donné est du $r^{\text{ième}}$ degré et contient des coefficients arbitraires, il faut multiplier son équation par p_{34}^r, c'est-à-dire qu'il faut adjoindre au complexe r fois une droite (la droite d'intersection des plans singuliers) ou, ce qui est la même chose, le complexe linéaire spécial qui la contient.

Quand on entreprend ainsi l'étude de ces figures, en les considérant, d'une part, comme connexes, d'autre part comme complexes, on voit que la différence consiste essentiellement dans ce que nous nommons, dans les deux cas, la *figure générale*. Dans la première manière de voir, un complexe du $r^{\text{ième}}$ degré doit être considéré comme général, lorsque son équation écrite avec tous les six p contient les coefficients généraux. La circonstance d'un plan m fois et n fois singulier $(m+n=r)$ n'est qu'une dégénérescence. Dans la seconde manière de voir, c'est, au contraire, cette dernière circonstance qui constitue la généralité : elle consiste dans la séparation répétée r fois du complexe dans un complexe linéaire spécial.

Pour les connexes, la différence entre les deux manières de considérer les choses est toute pareille, quoiqu'elle se produise en sens inverse.

Une pareille différence dans la manière de considérer les choses, motivée par diverses définitions de ce qu'on appelle le *cas général,* se présente dans plusieurs théories qui ne se rapportent pas seulement aux figures géométriques et n'est pas toujours assez remarquée. C'est ainsi que les propriétés générales des équations différentielles sont différentes, suivant que l'on considère les équations différentielles ou les équations intégrales comme données par des fonctions générales. Un autre cas, bien connu, qui se rattache aux considérations précédentes, se présente dans l'étude de la forme normale des équations algébriques, que l'on rencontre dans la théorie des fonctions abéliennes, suivant qu'on la considère comme Riemann, ou, comme nous l'avons fait, M. Gordan et moi, dans notre *Théorie des fonctions abéliennes*.