BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 145-149
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__145_1>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

KÖNIGSBERGER, Professor an der Universität zu Heidelberg. — VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre. In-8. — Leipzig, Teubner, 1874. Erster Theil, 431 S. Zweiter Theil, 219 S. — Prix : 28 fr. 75 c.

M. Königsberger était déjà connu des géomètres par la publication de plusieurs Mémoires et d'un Ouvrage didactique sur les fonctions ϑ. Il nous donne aujourd'hui la reproduction des Leçons qu'il a faites dans ces dernières années sur la théorie des fonctions elliptiques à l'Université de Heidelberg. L'étendue considérable de cette nouvelle publication, qui ne comprend pas moins de 600 pages, et le plan suivi par l'auteur recommandent ce nouveau Traité à l'attention la plus sérieuse de nos lecteurs, et nous engagent à en faire connaître une analyse détaillée.

Ce qui distingue les Leçons de M. Königsberger des ouvrages du même genre, et en particulier du beau Traité de MM. Briot et Bouquet, c'est l'emploi systématique de la méthode que Riemann a instituée pour l'étude des fonctions de variables complexes. Les avis sont partagés, on le sait, même en Allemagne, au sujet de cette méthode. On peut penser que, si elle offre quelques avantages dans certaines questions difficiles, elle ne se montre nullement supérieure à celle de Cauchy et de ses disciples dans l'étude des fonctions elliptiques. Nous n'avons pas à émettre une opinion sur un point qui divise tant de bons esprits, et nous devons être reconnaissants à M. Königsberger de nous donner une idée aussi claire que possible des méthodes de son illustre maître et des applications qu'elles comportent dans cette vaste théorie des fonctions elliptiques.

Les *Leçons sur les fonctions elliptiques* peuvent être divisées en trois Parties bien distinctes :

La première, qui comprend les Leçons I à XII, contient les bases de la théorie générale des fonctions.

Après avoir donné les règles de calcul et la représentation des variables imaginaires, la définition des fonctions de ces variables et leur classification en fonctions à une seule ou à plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable indépendante, l'auteur aborde la considération des surfaces de Riemann. Une Leçon est consacrée à la distinction des surfaces continues en surfaces à connexion simple ou multiple, et à la réduction de toute surface à une surface à connexion simple par l'emploi des sections (*Querschnitte*). Les Leçons suivantes sont consacrées aux intégrales des fonctions de variables complexes, aux séries de Taylor et de Maclaurin, à l'étude des fonctions algébriques du logarithme et de la fonction exponentielle, des intégrales trigonométriques et elliptiques, à la représentation des fonctions par des produits infinis. Cette première portion, qui comprend environ 240 pages, peut donc être considérée comme un exposé succinct, dans la voie de Riemann, de la théorie générale des fonctions. L'exposition nous a paru très-satisfaisante; mais il nous semble que cette théorie générale est celle qui offrira le plus de difficultés à la lecture.

La deuxième Partie de l'Ouvrage traite des intégrales elliptiques et de leur inversion. Après avoir séparé en trois classes les intégrales elliptiques, et les avoir ramenées à leurs formes normales, l'auteur consacre toute une Leçon à l'étude des relations si intéressantes qui existent entre les périodes des intégrales de diverses espèces. La seizième Leçon est consacrée à l'inversion et à la définition des fonctions ϑ; la dix-septième aux fonctions périodiques considérées d'une manière générale. Les trois Leçons suivantes contiennent les propriétés principales des fonctions ϑ, des fonctions et des intégrales elliptiques, en particulier le théorème de l'addition pour les intégrales normales des trois espèces. Enfin la vingt et unième Leçon est consacrée au théorème d'Abel, qui est exposé sous la forme particulière qu'Abel a déjà fait connaître, mais avec des développements qui en donnent le sens précis.

La dernière division que nous établirions dans l'Ouvrage se composerait des dix dernières Leçons, qui occupent 200 pages et qui traitent surtout de la transformation.

L'auteur se pose le problème de la transformation sous la forme générale qu'Abel lui a donnée, et il montre que l'étude de cette question générale se ramène à celle de la transformation rationnelle, qu'il étudie en prenant pour bases les fonctions ϑ. Nous citerons la vingt-cinquième Leçon, consacrée aux fonctions de M. Weierstrass; la vingt-septième, qui traite des fonctions φ de M. Hermite; la vingt-huitième et la vingt-neuvième, qui traitent des équations modulaires et des équations au multiplicateur. Enfin les deux dernières Leçons traitent de la multiplication et de la division des fonctions elliptiques.

Les méthodes par lesquelles on aborde la théorie des fonctions elliptiques sont si différentes qu'il y aurait une injustice évidente à reprocher à l'auteur de ne pas les avoir fait toutes connaître; mais on a dû voir, par la rapide analyse qui précède, que nous sommes en présence d'un Ouvrage bien ordonné, où tout s'enchaîne, où tout est démontré, où l'on admet seulement chez le lecteur la connaissance des principes du Calcul infinitésimal. G. D.

HENNEBERG (L.). — UEBER SOLCHE MINIMALFLÄCHEN, WELCHE EINE VORGESCHRIEBENE EBENE CURVE ZUR GEODÄTISCHEN LINIE HABEN. — Weitere Ausführung einer von der eidgenössischen polytechnischen Schule als Preisschrift gekrönten und hierauf der hohen philosophischen Facultät der Universität Heidelberg zur Erlangung der Doctorwürde überreichten Abhandlung. — Zürich. Zürcher und Furrer, 1875. In-8°, 68. S. (¹).

La question dont s'occupe un jeune géomètre, M. Henneberg, dans l'Opuscule dont nous venons de citer le titre, et qui a été couronné en même temps qu'un travail de M. Herzog sur le même sujet, est comprise comme cas particulier dans une de celles qui ont été traitées par M. O. Bonnet dans son beau Mémoire : *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (²). Dans ce travail très-étendu, M. Bonnet s'est occupé des surfaces minima, et il a résolu le problème suivant : « Construire la surface minimum qui passe par une courbe donnée, et pour laquelle on connaît la direction de la normale en un point quelconque de cette courbe. » Il remarque, en outre, que la solution de ce problème général comprend celle des cinq questions suivantes : Déterminer une surface minimum, connaissant : 1° une ligne géodésique ; 2° une ligne de courbure ; 3° une ligne asymptotique ; 4° une ligne d'ombre ; 5° une ligne de perspective, et il indique deux applications particulièrement intéressantes de sa solution générale.

Le problème proposé aux élèves de l'École Polytechnique de Zurich était beaucoup moins étendu, mais plus précis. Il s'agissait de déterminer une surface minimum, sachant qu'elle admet pour ligne géodésique une ligne plane donnée.

M. Henneberg a résolu fort élégamment le problème. Il se sert des belles formules de M. Weierstrass, et montre comment on peut en déduire une solution générale de la question proposée, solution qu'il applique ensuite à différents exemples particuliers. C'est ainsi qu'il traite d'une manière détaillée le cas où la ligne plane est une ellipse ou une hyperbole, une parabole de Neill, etc. Les méthodes synthétiques des géomètres français paraissent être bien connues de

(¹) HENNEBERG (L.) — *Sur les surfaces minima qui admettent pour ligne géodésique une ligne plane donnée, etc.*

(²) *Journal de Liouville*, t. V, 2ᵉ série, p. 153.

l'auteur, qui les emploie pour la démonstration d'élégants théorèmes. Nous citerons seulement la proposition suivante :

« Quand une ligne plane est la développée d'une courbe algébrique, la surface minimum dont elle est la ligne géodésique est elle-même algébrique. » G. D.