BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A. MAYER

Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales, et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 125-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__125_1>

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES ABSOLUMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES, ET SUR L'INTÉGRATION SIMULTANÉE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES [1];

Par M. A. MAYER, à Leipzig.

(Suite et fin.)

§ III.

Réduction du système absolument intégrable (1) à un système unique de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

La méthode exposée dans le paragraphe précédent ramène l'intégration du système absolument intégrable (1) à l'inté-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XI, p. 86.

gration de $m-1$ systèmes, chacun de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires. Mais, si l'on avait affaire au cas particulier où l'on pourrait choisir x_1^0 de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, les $(m-2)(n-m+1)$ quantités $a_k^2, a_k^3, \ldots, a_k^{m-1}$ devinssent toutes nulles, les équations (13), auxquelles se ramène le système donné (1) par l'intégration des équations (7), se réduiraient à

$$dx_k^0 = 0,$$

et donneraient par suite immédiatement

$$x_m^0 = \text{const.}, \quad x_{m+1}^0 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad x_n^0 = \text{const.}$$

Alors donc les solutions complètes du premier de ces $n-m+1$ systèmes d'équations différentielles ordinaires, exprimées au moyen de x_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_1^0$, nous donneraient immédiatement les solutions complètes du système (1); dès que l'on y considérerait ces valeurs initiales comme des constantes arbitraires, indépendantes de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Ce cas, en apparence très-particulier, peut toujours être amené par une transformation convenable des équations (1).

Prenons comme nouvelles variables, à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, $m-1$ autres quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, définies par $m-1$ équations arbitraires et indépendantes les unes des autres

$$x_h = x_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}); \tag{14}$$

les équations (1) se transformeront dans les suivantes :

$$dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i \, d\alpha_i, \tag{15}$$

où

$$b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}. \tag{16}$$

On obtient en même temps, en faisant les substitutions (14) dans une fonction quelconque f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i};$$

par suite,

$$(17)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}+\sum_{k=m}^{k=n} b_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k}=\sum_{h=1}^{h=m-1}\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}+\sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Comme nous savons, par ce qui précède, que le système primitif (1) est un système complétement intégrable dès que les identités (3) sont satisfaites, il en résulte immédiatement que, dans cette hypothèse, le système transformé (15) jouira aussi de la même propriété, et, par conséquent, on doit avoir identiquement entre les coefficients b_k^i de ce système les relations

$$(18)\qquad \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma}-\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho}+\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda}-b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\right)=0,$$

dans lesquelles $k=m, m+1, \ldots, n$, ρ et σ étant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, m-1$, et qui, si nous posons en général

$$(19)\qquad \mathrm{B}_\rho(f)=\frac{\partial f}{\partial \alpha_\rho}+\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^\rho \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

entraîneront les suivantes :

$$(20)\qquad \mathrm{B}_\rho[\mathrm{B}_\sigma(f)]=\mathrm{B}_\sigma[\mathrm{B}_\rho(f)].$$

Cela peut être d'ailleurs facilement vérifié par le calcul.

On a, en effet, d'après les équations (16),

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho}-\frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma}&=\sum_{h=1}^{h=m-1}\left(\frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}-\frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\right)\\&=\sum_{h=1}^{h=m-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1}\frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho}-\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho}-b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma}\right)&=\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} a_\lambda^\mu\left(\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho}-\frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right)\\&=\sum_{h=1}^{h=m-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1}\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho}-\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right).\end{aligned}$$

Si l'on forme avec ces valeurs le premier membre de l'équation (18), et qu'on échange entre eux, dans les termes négatifs, les deux indices de sommation h et μ, il viendra

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho} - \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{h=m-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho}\left[\frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_\lambda}\right)\right],$$

formule qui démontre directement que, des deux systèmes de relations identiques (3) et (18), l'un entraîne toujours l'autre comme conséquence.

On peut ainsi employer pour l'intégration du système (15), déduit du système complétement intégrable (1) par les substitutions (14), exactement la même méthode que nous avons obtenue dans le paragraphe précédent pour l'intégration de (1).

D'après cette méthode, nous commencerons par intégrer complétement les $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires

$$(21) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1,$$

et nous exprimerons les constantes d'intégration au moyen des valeurs $x_m^0, \dots, x_n^0$ des variables $x_m, \dots, x_n$, correspondantes à la valeur initiale constante α_1^0 de α_1. Les solutions complètes ainsi obtenues des équations (21) nous donnent aussi en même temps les solutions complètes du système (15), si nous remplaçons dans ces équations $x_m^0, \dots, x_n^0$ par les fonctions de $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$, qui résultent de l'intégration complète du système

$$(22) \qquad dx_k^0 = \sum_{i=2}^{i=m-1} b_k^{i0}\, d\alpha_i,$$

dont les coefficients b_k^{i0} se déduisent des coefficients

$$b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

de l'équation (15), en y faisant $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $x_m = x_m^0$, $\dots$, $x_n = x_n^0$.

Or maintenant le choix des substitutions (14) reste complétement arbitraire, et l'on voit aisément que nous pourrons toujours en disposer de telle sorte que tous les coefficients b_k^{i0} des équations (22) s'évanouissent. Nous n'avons, en effet, pour cela qu'à prendre les substitutions (14) de la forme

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h,$$

α_1^0 et x_h^0 étant des constantes, et $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$, au contraire, $m-1$ fonctions arbitraires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, qui devront seulement, bien entendu, être choisies toujours de telle manière que les équations (23) soient indépendantes entre elles par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$.

On aura ainsi

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left[f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right],$$

et pour $i > 1$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}.$$

Si donc nous attribuons à α_1^0 une valeur constante quelconque, telle qu'aucune des $m-1$ fonctions f_h ne soit infinie ou indéterminée pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, et si nous choisissons en outre les constantes $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0$ de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $x_{m-1} = x_{m-1}^0$, les quantités a_k^h restent finies et déterminées, alors, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, chacun des b_k^i dont l'indice $i > 1$ s'annulera, tandis que les quantités b_k^1 conserveront, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, des valeurs finies et déterminées.

Pour ce choix des substitutions (14), les solutions complètes des $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires (21), exprimées au moyen de α_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, si l'on y considère ces valeurs initiales comme des constantes arbitraires, indépendantes de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1}$, seront également les solutions du système d'équations différentielles totales (15). De ces dernières on déduira les solutions du système donné (1), en y remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ par les valeurs résultant des substitutions (23).

L'intégration du système donné de $n - m$ équations linéaires aux différentielles totales

$$(1) \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \, dx_h, \quad (k = m_1, m+1, \ldots, n),$$

dans l'hypothèse où l'on a entre ses coefficients les relations identiques suivantes :

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0,$$

peut être ainsi ramenée à l'intégration d'un système unique de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, en opérant comme il suit :

Introduisons à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, *par les substitutions*

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h,$$

choisies arbitrairement, sous les restrictions indiquées plus haut, les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ *comme nouvelles variables indépendantes. Le système* (1) *se changera ainsi dans le suivant* :

$$(15) \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i \, d\alpha_i,$$

des coefficients duquel

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_k^1 &= \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left[f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right], \\ b_k^i &= (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}, \quad i > 1, \end{aligned} \right.$$

il faudra éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ *par les substitutions* (23). *Si alors on a complétement intégré les* $n - m + 1$ *équations différentielles ordinaires du premier ordre, déduites de* (15),

$$(25) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1,$$

et, si l'on a exprimé les constantes d'intégration au moyen des *valeurs initiales* $x_m^0, \ldots, x_n^0$ *pour* $\alpha_1 = \alpha_1^0$, *les équations ainsi obtenues entre*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \quad x_m, \ldots, x_n$$

et les constantes arbitraires

$$x_m^0, \ldots, x_n^0,$$

seront les équations intégrales complètes tant des équations différentielles ordinaires (25) *que des équations aux différentielles totales* (15), *et il ne reste plus, par suite, qu'à éliminer de ces équations les quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, *à l'aide des formules* (23), *pour obtenir les équations intégrales complètes du système donné* (1).

La manière la plus simple de satisfaire aux conditions exigées pour les substitutions (23) est de poser

$$x_1 = \alpha_1,$$

et, pour $h = 2, 3, \ldots, m-1$,

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\,\alpha_h,$$

où l'on doit seulement choisir les constantes $\alpha_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0$ de telle sorte que, pour

$$x_1 = \alpha_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = x_{m-1}^0,$$

aucune des quantités α_k^h ne devienne infinie ou indéterminée. On obtient ainsi

$$b_k^1 = a_k^1 + \alpha_2 a_k^2 + \ldots + \alpha_{m-1} a_k^{m-1},$$
$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0)\,\alpha_k^i, \quad i > 1.$$

Dans la démonstration du théorème précédent, on n'a pas fait usage de l'équivalence des systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales avec les systèmes jacobiens d'équations linéaires aux différentielles partielles, pour le but déterminé de tirer l'intégration de ceux-ci de l'étude des premiers. Mais, si l'on veut s'aider des propriétés connues des systèmes jacobiens, on peut encore se convaincre, par une autre voie plus courte et sans aucun calcul, de la possibilité de ramener le système absolument intégrable (1) au système d'équations différentielles ordinaires (25). Pour ne pas interrompre l'ordre de ces recherches, je renvoie à la fin de ce Mémoire (§ VII) cette seconde démonstration du théorème précédent, qui se rattache d'une manière encore plus intime que la précédente au raisonnement par lequel M. P. du Bois-Reymond a démontré cette réductibilité pour le cas spécial d'une seule équation linéaire aux différentielles totales.

§ IV.

Intégration du système jacobien $A_k(f) = 0$.

En vertu du paragraphe précédent, les intégrales complètes des équations différentielles ordinaires (25), exprimées en fonction de α_1 et des valeurs initiales constantes de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, sont aussi les équations intégrales complètes du système d'équations aux différentielles totales (15) qui se déduit du système donné (1) par les substitutions (23).

Mais les intégrales complètes d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre jouissent de la propriété d'être résolubles à la fois par rapport, soit aux variables dépendantes, soit aux valeurs initiales de ces variables. On peut utiliser, d'après cela, les équations intégrales complètes du système (25), pour en tirer d'abord $x_m, \ldots, x_n$, et ensuite $x_m^0, \ldots, x_n^0$. Soient

$$x_k = \psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0) \tag{26}$$

et

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) \tag{27}$$

les valeurs ainsi obtenues pour x_k et x_k^0.

Les équations (27) doivent être identiquement satisfaites par les substitutions (26), et, par conséquent, les expressions

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h}$$

doivent être identiquement nulles. Mais comme, d'après ce qui précède, ces substitutions satisfont également au système (15), c'est-à-dire aux équations

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h} = b_\lambda^h,$$

les expressions

$$B_h(\chi_k) = \frac{\partial \chi_h}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda}$$

doivent également s'annuler, comme cela résulte d'ailleurs directement de ce fait, que les expressions $B_h(\chi_k)$ doivent devenir, par les substitutions (26), indépendantes de α_1, puisque, d'après nos suppositions, $B_1(\chi_k) = 0$, et par suite, en vertu de l'identité

$$B_1[B_h(f)] = B_h[B_1(f)],$$

on a aussi immédiatement

$$B_1[B_h(\chi_k)] = 0;$$

mais ces expressions s'annulent quand on pose $\alpha_1 = \alpha_1^0$, puisqu'alors χ_k doit se réduire à x_k, et que, de plus, chaque $b_\lambda^h = 0$ pour $h > 1$.

Or le résultat nul de la substitution des valeurs (26) dans les expressions $B_h(\chi_k)$ ne peut pas être changé si, à la place des x_k^0, on remet leurs valeurs (27), ce qui détruit l'effet de la substitution (26). Donc, avant cette substitution, on doit avoir déjà identiquement

$$B_h(\chi_k) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$f = \chi_m, \quad \chi_{m+1}, \quad \ldots, \quad \chi_n$$

sont les solutions du système jacobien de $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles

$$B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Mais le système jacobien provient, comme le montre la formule (17), du système

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$

lorsque, par les substitutions (23), on introduit comme variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et il est clair que la substitution inverse devra réciproquement transformer le système jacobien dans le système (17). Les solutions $f = \chi_m, \chi_{m+1}, \ldots,$

χ_n du premier système, dès que nous y mettons pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ les valeurs résultant des substitutions (23), donnent donc aussi en même temps les solutions du second système jacobien, équivalent au système donné (1).

De là résulte la méthode suivante pour l'intégration complète du système jacobien donné des $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles

$$(28)\qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m-1).$$

On exprimera, au moyen de $m-1$ substitutions, choisies arbitrairement sous les restrictions indiquées au paragraphe précédent,

$$(23)\qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}),$$

les quantités

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left[f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right]$$

et

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial \alpha_1}{\partial f_h}, \quad i > 1,$$

au moyen de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n$, et l'on formera avec les premières les $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1.$$

Lorsqu'on aura intégré complétement ces équations et exprimé les constantes d'intégration au moyen des valeurs initiales $x_m^0, \ldots, x_n^0$ des variables dépendantes pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, la résolution des équations intégrales ainsi obtenues par rapport à ces valeurs initiales donnera $n-m+1$ fonctions

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n),$$

qui seront les $n-m+1$ solutions du système jacobien

$$(29)\qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$

et qui, par l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, *à l'aide des équations* (23), *nous donneront les solutions du système jacobien donné* (28).

§ V.

Pour trouver une solution du système jacobien donné (28), il suffit de connaître une intégrale quelconque des équations differentielles ordinaires (25).

D'après le théorème précédent, la détermination de *toutes* les solutions d'un système jacobien de la forme (28) se ramène à l'intégration *complète* d'un seul système de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Mais, dans la plupart des applications des systèmes de Jacobi et dans les plus importantes, par exemple dans l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre et dans le problème de Pfaff, il ne s'agit nullement d'obtenir la solution générale des systèmes jacobiens que l'on rencontre, mais il suffit toujours de trouver une seule solution de chacun d'eux. Dès lors il est de la plus grande importance de rechercher si l'on ne pourrait pas trouver, sans avoir besoin d'intégrer complétement le système (25), une solution du système jacobien (28) ou (29).

Supposons que l'on ait une intégrale quelconque

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

des équations (25). Les solutions complètes de ces équations différentielles, exprimées au moyen de α_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, satisfont alors à l'équation

$$(30)\quad U = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) - F(\alpha_1^0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Or, d'après le § III, ces solutions, quand on y considère $x_m^0, \ldots, x_n^0$ comme indépendants de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, satisfont aussi aux équations aux différentielles totales (15) ou aux équations

$$(31)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_h} = b_k^h.$$

Elles doivent, par conséquent, aussi satisfaire identiquement aux équations

$$(32)\qquad B_h(U) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

que l'on obtient par la différentiation de l'équation $U = 0$ par rapport à α_h, en ayant égard aux relations (31) [1]. La forme de l'équation $U = 0$ est ici entièrement arbitraire. Il en est absolument de même pour toute équation $V = 0$, déduite de l'équation (30) par des opérations algébriques quelconques.

Des $m - 1$ équations (32), la première est toujours identique, ou, dans le cas où cette équation n'a pas été formée directement avec l'équation (30), mais avec une autre équation quelconque équivalente à (30), elle est du moins une simple conséquence algébrique de l'équation $U = 0$. Quelquefois aussi une partie des autres équations peut être identique ou être une conséquence de l'équation $U = 0$. Mais toutes celles des équations (32) qui ne possèdent pas cette propriété sont de nouvelles intégrales du système (25). Avec chacune de ces nouvelles intégrales on pourra maintenant procéder tout comme avec l'équation $U = 0$, et l'on reconnaît ainsi la possibilité de déduire d'une seule intégrale des équations différentielles ordinaires (25), par la simple différentiation, toute une série de nouvelles équations intégrales, qui appartiennent toutes au système d'équations intégrales complètes de ces équations différentielles, au moyen de quoi les variables dépendantes se déterminent en fonction de α_1 et des valeurs initiales correspondantes à $\alpha_1 = \alpha_1^0$.

Si l'on ajoute à ce qui vient d'être dit la remarque [que l'on eût déjà pu utiliser dans le paragraphe précédent pour montrer que les expressions $B_h(\chi_\lambda)$ obtenues dans ce paragraphe doivent être nulles identiquement], que des équations qui appartiennent à un

---

(1) On peut aussi demontrer cela directement. Par hypothèse, on a

$$B_1(F) = 0,$$

et par suite

$$B_1(U) = 0,$$

et, a cause de la relation

$$B_1[B_h(f)] = B_h[B_1(f)],$$

on a aussi

$$B_1[B_h(U)] = 0.$$

La valeur que prend $B_h(U)$ pour les solutions complètes des equations différentielles (25) est donc independante de α_1. Mais cette valeur s'evanouit pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, puisqu'on a alors $x_m = x_m^0, \ldots, x_n = x_n^0$; il en resulte que, d'après (30), $\frac{\partial U}{\partial \alpha_h} = 0$, et qu'en meme temps chacune des quantites b_h^λ s'evanouit.

tel système d'équations intégrales complètes, jamais aucune ne peut être complétement indépendante des valeurs initiales des variables dépendantes, ou que, si une telle équation se présente, elle doit être nécessairement identique, on est conduit à la marche suivante pour *parvenir de l'intégrale donnée* $F = \text{const.}$ *ou* $U = 0$ *des équations* (25) *à une solution du système jacobien* (29).

En résolvant l'intégrale $U = 0$ relativement à une quelconque des valeurs initiales des variables dépendantes qu'elle contient, par exemple, relativement à x_m^0, ramenons cette équation à la forme

$$(33) \qquad x_m^0 = U_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

et formons ainsi les $m - 1$ équations

$$(34) \qquad B_h(U_m) = \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U_m}{\partial x_k} = 0,$$

dont la première est identique. Aucune de ces équations ne peut être une simple conséquence algébrique de l'équation (33), puisque x_m^0 n'y entre pas. Si elles sont, comme la première, toutes identiques par elles-mêmes, la valeur U_m de x_m^0 tirée de $U = 0$ est alors une solution commune des $m - 1$ équations linéaires aux différentielles partielles (29). S'il n'en est pas ainsi, on devra toujours pouvoir encore tirer des équations (34) une partie des autres valeurs initiales $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$, puisque, d'après ce qui précède, il est impossible d'éliminer complétement toutes ces valeurs initiales. Admettons que nous puissions déterminer $x_{m+1}^0, \ldots, x_{m+h-1}^0$ au moyen des équations (34); nous pourrons opérer maintenant avec chacune des valeurs ainsi obtenues :

$$x_{m+1}^0 = U_{m+1}^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+h}^0, \ldots, x_n^0),$$
$$\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{m+h-1}^0 = U_{m+h-1}^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

comme on a opéré avec l'équation (33), et nous parviendrons ainsi à obtenir des équations qui ne pourront être de simples conséquences algébriques des précédentes, puisqu'elles ne contiendront pas les quantités

$$x_m^0, \ldots, x_{m+h-1}^0,$$

et qui, au contraire, seront identiques par elles-mêmes, ou qui serviront à leur tour à déterminer une partie des valeurs initiales restantes. De cette manière, si l'on n'est pas déjà parvenu à une solution commune des $m-1$ équations (29), on devra nécessairement finir par arriver à exprimer, au moyen des seules quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n$, toutes les valeurs initiales des variables dépendantes contenues dans l'intégrale donnée $U=0$. Si l'on forme maintenant, avec une quelconque de ces expressions, les $m-1$ équations $B_h(f)=0$, celles-ci ne contiendront aucune des valeurs initiales, et devront, par conséquent, être identiques par elles-mêmes. Chacune de ces expressions est ainsi (ce qui résulte d'ailleurs du paragraphe précédent) une solution du système jacobien (29), et par suite aussi, lorsqu'on aura remis pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ leurs valeurs tirées des substitutions (23), une solution du système jacobien (28).

Ainsi, pour trouver une solution du système jacobien de $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles contenant n variables indépendantes, il n'est besoin que de connaître une intégrale quelconque des équations différentielles ordinaires (25).

Les meilleures méthodes [1] connues exigeaient, pour arriver au même résultat, la connaissance d'une intégrale de chacun de $m-1$ systèmes, dont le premier comprenait $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, et les autres autant ou un moindre nombre de ces équations.

VI.

L'intégration des équations aux differentielles partielles du premier ordre et le problème de Pfaff.

On sait que Jacobi a ramené l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre au problème de la détermination successive d'une solution de chaque système d'une suite de systèmes jacobiens d'équations linéaires aux différentielles partielles de la forme (28). Si, dans l'équation aux différentielles partielles donnée, que l'on peut supposer ne pas contenir la fonction inconnue elle-même, il y a n variables indépendantes, ces sys-

[1] *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, p. 261.

tèmes jacobiens contiendront alors respectivement

$$1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\ \ldots,\ n-1$$

équations linéaires aux différentielles partielles, avec

$$2n-1,\ 2n-2,\ \ldots,\ 2n-m+1,\ \ldots,\ n+1$$

variables indépendantes.

D'après la méthode exposée dans le paragraphe précédent, on sait que, *pour obtenir la solution complète de l'équation donnée, on n'a besoin que de connaître une seule intégrale de chacun des systèmes de*

$$2(n-1),\ 2(n-2),\ 2(n-m+1),\ \ldots,\ 2$$

équations différentielles ordinaires du premier ordre, tandis que, anciennement [1], on avait besoin d'une intégrale pour un système de $2(n-1)$ équations différentielles ordinaires et pour deux systèmes de

$$2(n-2),\ \ldots,\ 2(n-m+1),\ \ldots,\ 2$$

équations différentielles ordinaires, et que, dans les cas défavorables, ce nombre d'intégrations pouvait n'être pas encore suffisant.

Quand on choisit la forme la plus simple des substitutions (23), l'intégration s'effectue de la manière suivante :

En général, le $(m-1)^{\text{ieme}}$ système jacobien [1] est de la forme

$$\text{(35)}\qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial q_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial p_h}{\partial q_\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial p_h}{\partial p_\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\right) = 0,$$
$$h = 1,\ 2,\ldots,\ m-1,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_m, \ldots, p_n$ déterminées au moyen du système jacobien précédent, et pour lesquelles les expressions

$$A_h[A_i(f)] - A_i[A_h(f)]$$

sont identiquement nulles.

---

[1] *Voir* CLEBSCH, *Journal de Crelle,* t. 65, p. 265.

[2] *Voir* JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik,* p. 292, et *Journal de Crelle,* t. 60, p. 23.

Si l'on pose maintenant

$$(36)\quad q_1=\alpha_1,\quad q_2=q_2^0+(\alpha_1-\alpha_1^0)\alpha_2,\quad \ldots,\quad q_{m-1}=q_{m-1}^0+(\alpha_1-\alpha_1^0)\alpha_{m-1},$$

$\alpha_1^0, q_2^0, \ldots, q_{m-1}^0$ étant des constantes choisies arbitrairement, sous la condition que les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ conservent des valeurs finies et déterminées pour

$$q_1=\alpha_1^0,\quad q_2=q_2^0,\quad \ldots,\quad q_{m-1}=q_{m-1}^0,$$

et qu'on élimine par ce moyen $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ des expressions

$$(37)\qquad \begin{cases} \omega_1=p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_{m-1}p_{m-1}, \\ \omega_i=(\alpha_1-\alpha_1^0)p_i,\quad i>1, \end{cases}$$

on transforme ainsi le système jacobien (35) dans le suivant :

$$(38)\qquad B_h(f)=\frac{\partial f}{\partial\alpha_h}+\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial\omega_h}{\partial q_\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial\omega_h}{\partial p_\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\right)=0.$$

On peut, en se servant des explications données dans le paragraphe précédent, trouver une solution de ce système, dès que l'on connaîtra une intégrale du système de $2(n-m+1)$ équations différentielles ordinaires

$$(39)\qquad \frac{dq_\lambda}{d\alpha_1}=\frac{\partial\omega_1}{\partial p_\lambda},\quad \frac{dp_\lambda}{d\alpha_1}=\frac{\partial\omega_1}{\partial q_\lambda},$$
$$\lambda=m,\quad m+1,\quad \ldots,\quad n,$$

et il suffit dans cette solution de poser

$$\alpha_1=q_1,\quad \alpha_2=\frac{q_2-q_2^0}{q_1-\alpha_1^0},\quad \ldots,\quad \alpha_{m-1}=\frac{q_{m-1}-q_{m-1}^0}{q_1-\alpha_1^0},$$

pour en déduire une solution du système donné (35).

Par une méthode tout à fait analogue à celle qu'on a employée pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, on peut aussi, dans le problème de Pfaff, c'est-à-dire dans le problème de l'intégration de l'équation différentielle linéaire donnée

$$\chi_1\,dx_1+\chi_2\,dx_2+\ldots+\chi_{2n}\,dx_{2n}=0,$$

réduire, par le procédé indiqué, le nombre des intégrations nécessaires presque de moitié. On reconnaît, en effet, sans difficulté, en examinant la méthode que Clebsch a donnée pour la résolution de ce problème [1], que celui-ci peut se ramener à la détermination d'une solution de chacun de n systèmes jacobiens de la forme (28), composés respectivement de $1, 2, \ldots, n$ équations aux différentielles partielles à $2n$ variables indépendantes chacune. En vertu de ce qui précède, la détermination d'une solution du $i^{\text{ième}}$ de ces systèmes ne dépend que du calcul d'une intégrale de $2n - i$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Mais ce $i^{\text{ième}}$ système, que l'on ne peut former qu'après avoir trouvé une solution de chacun des précédents, possède lui-même, par suite de la manière dont il résulte de ceux-ci, $i - 1$ solutions connues. Aucune de ces solutions n'est celle que l'on emploie réellement (celle-ci devant être indépendante de celles-là); mais chacune d'elles, exprimée au moyen des nouvelles variables α et égalée à une constante, nous fournit une intégrale de ces $2n - i$ équations différentielles ordinaires. On connaît donc d'avance $i - 1$ intégrales de ces équations, et l'on peut par leur moyen ramener les $2n - i$ équations différentielles à

$$2n - i - (i - 1) = 2n - 2i + 1.$$

La détermination d'une solution utile du $i^{\text{ième}}$ système jacobien n'exige par conséquent que la connaissance d'une intégrale de $2n - 2i + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Ainsi :

Pour la solution complète du problème de Pfaff, il suffit de connaître une intégrale de chacun des systèmes de

$$2n - 1,\ 2n - 3,\ 2n - 5,\ \ldots,\ 1,$$

équations différentielles ordinaires du premier ordre.

§ VII.

Autre démonstration du théorème du § III.

Dans l'hypothèse où l'on a les identités

$$(40) \qquad A_i(a_k^h) - A_h(a_k^i) = 0,$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 65, p. 260.

les $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles

$$(41) \qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

possèdent, comme Clebsch l'a remarqué ([1]), $n-m+1$ solutions indépendantes entre elles, que nous désignerons par

$$f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n.$$

Puisque, en posant

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n),$$

on a

$$A_h(f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} A_h(f_k) \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda},$$

on voit que ces solutions sont indépendantes entre elles par rapport à $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Si l'on pose donc

$$(42) \qquad f_m = c_m, \quad f_{m+1} = c_{m+1}, \quad \ldots, \quad f_n = c_n,$$

on devra pouvoir, au moyen de ces équations, déterminer x_m, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ en fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et des quantités $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n$.

Si l'on considère ces dernières quantités comme des constantes arbitraires, les valeurs de $x_m, \ldots, x_n$ tirées des équations (42) satisferont aux $n-m+1$ équations

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial f^k}{\partial x_\lambda}\left(dx_\lambda - \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h dx_h\right) = 0,$$

que l'on obtient par la différentiation complète des équations (42) en ayant égard aux identités $A_h(f_k) = 0$. D'ailleurs le déterminant de ces équations :

$$\sum \pm \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

([1]) *Voir* notamment *Journal de Crelle*, t. 61, p. 153, et t. 65, p. 266.

ne s'annulant pas de lui-même, et ne pouvant conséquemment devenir identiquement nul par la substitution de ces valeurs, il s'ensuit que ces valeurs doivent aussi satisfaire aux $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales

$$(43) \qquad dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h dx_h.$$

Mais, si les identités (40) ont lieu, il existera toujours $n-m+1$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et de $n-m+1$ constantes arbitraires $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_n$ (fonctions indépendantes entre elles par rapport à cescons tantes), lesquelles, mises pour $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, satisferont identiquement aux équations (43).

Représentons les solutions du système (43) par

$$(44) \qquad x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n),$$

et désignons par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ des constantes indéterminées; les $n-m+1$ équations

$$x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, c_m, \ldots, c_n)$$

pourront toujours être résolues par rapport à $c_m, \ldots, c_n$. Par la substitution de ces valeurs, les solutions (44) prendront la forme

$$(45) \qquad x_\lambda = \psi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

la fonction ψ_h devant, en vertu de son origine, se réduire à x_λ^0 pour

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = x_{m-1}^0.$$

En introduisant maintenant à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ les nouvelles variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, au moyen des $m-1$ équations

$$(46) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - x_1^0) f_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}),$$

ce qui donne

$$(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \\ \quad = \Psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_1^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \end{array} \right.$$

on obtiendra, en vertu de (45), les solutions

$$(48) \qquad x_\lambda = \Psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_1^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n)$$

du système d'équations linéaires aux différentielles totales entre $x_m, \ldots, x_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$,

$$(49) \qquad dx_\alpha = \sum_{h=1}^{h=m-1} b_\lambda^h \, d\alpha_h,$$

dans lequel le système (43) se change par la substitution (46).

D'après cela, les équations (48) satisfont aussi en particulier aux $n-m+1$ équations différentielles ordinaires

$$(50) \qquad \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_1} = b_\lambda^1.$$

Si l'on a choisi la constante α_1^0 de telle sorte qu'aucune des $m-1$ fonctions f_h ne devienne infinie ou indéterminée pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, chacune des quantités x_h se réduira à x_h^0 pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, et par suite, d'après (47), on aura aussi

$$\Psi_\lambda = x_\lambda^0.$$

Ainsi les équations (48) sont précisément les solutions des équations différentielles ordinaires (50) qui se réduisent, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, aux valeurs des variables dépendantes x_λ qui correspondent à la valeur initiale α_1^0 de α_1.

Réciproquement, il doit être toujours possible de déterminer les constantes d'intégration d'un système de solutions complètes des $n-m+1$ équations différentielles ordinaires (50), de telle sorte que, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, ces solutions prennent les valeurs encore arbitraires $x_m^0, x_{m-1}^0, \ldots, x_n^0$, et les solutions ainsi obtenues devront, si l'on y considère ces valeurs initiales comme indépendantes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, satisfaire en même temps aux équations aux différentielles totales (49); et par suite, lorsqu'on y a remis pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ leurs valeurs tirées des substitutions (46), elles devront aussi satisfaire aux équations aux différentielles totales (43).

Leipzig, fevrier 1872.