BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

V. IMCHENETSKY

Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complètement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 162-183

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__162_0>

MÉLANGES.

APPLICATION DES EXPRESSIONS COMPLEXES IMAGINAIRES A LA FORMATION DE CERTAINS SYSTÈMES COMPLÉTEMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS CANONIQUES ET D'EQUATIONS AUX DERIVÉES PARTIELLES;

PAR M. V. IMCHENETSKY,

Professeur à l'Universite de Kharkof.

Une équation

$$\varphi(z, z') = c, \tag{1}$$

entre deux variables z, z' et une constante arbitraire c, prend la forme

$$H + Gi = a + bi, \tag{2}$$

lorsqu'on y substitue les valeurs

$$z = x + yi, \quad z' = x' + y'i, \quad c = a + bi,$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Entre les dérivées partielles du premier ordre des fonctions H et G de x, y, x', y' existent des relations simples, en vertu desquelles, lorsqu'on établit une certaine correspondance entre x, y, x', y', il est facile de démontrer que l'expression (H, G), connue sous le nom de *parenthèse de Poisson,* est rendue identiquement nulle.

Cette circonstance indique l'existence d'un système canonique d'équations complétement intégrables au moyen des seules quadratures, et dans lesquelles H et G jouent le même rôle que l'intégrale des forces vives dans les équations de la Dynamique.

Lorsqu'on connaît la moitié des intégrales d'un système canonique, l'intégration de ce système peut s'achever par diverses méthodes. La plus simple de ces méthodes, dans le cas donné, exige seulement la résolution algébrique de la seule équation $\varphi(z, z') = c$, par rapport à z ou à z', et le calcul de l'intégrale $\int z'\,dz$ ou $\int z\,dz'$ d'une fonction d'une seule variable; les autres opérations consistent en des substitutions d'expressions complexes et en des différentiations.

En même temps que l'intégration complète d'un système canonique, on obtient toujours, comme résultat parallèle, la solution d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles. Dans le cas donné, ces équations sont $H = a$, $G = b$, où l'on peut prendre deux quelconques des quatre variables x, y, x', y' pour variables indépendantes, et exprimer les deux autres au moyen des dérivées partielles d'une seule fonction de ces variables indépendantes.

Le problème exprimé par l'équation

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z')$$

peut toujours se ramener au problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles; mais ce dernier problème exige la résolution préalable du premier. Toutefois, si l'on remplace les variables z et z' par les expressions complexes $x + yi$, $x' + y'i$, on obtient deux équations aux différentielles ordinaires entre quatre variables, formant un système incomplet d'équations simultanées qui se réduit à un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles. Relativement à ces dernières, on peut remarquer :

1° Qu'au nombre des équations différentielles ordinaires qui leur correspondent n'est pas comprise l'équation donnée $dz' = f(z, z')\,dz$;

2° Que les deux équations aux dérivées partielles forment un système *jacobien* ou système *fermé;*

3° Que, si l'on connaît l'intégrale générale $\varphi(z, z') = c$, ou $H + Gi = a + bi$ de l'équation $dz' = f(z, z')\,dz$, alors une fonction arbitraire de H et de G sera une solution du système fermé en question;

4° Si l'intégrale de l'équation $dz' = f(z, z')\,dz$ est inconnue, il est théoriquement possible de l'obtenir au moyen de l'intégration du système jacobien en question, ce qui constitue finalement un problème d'ordre plus élevé, et alors sa solution ne peut servir à la réalisation du but principal qu'en vertu d'une condition particulière.

Ces considérations, relatives à une seule équation différentielle, peuvent aisément s'étendre à un système de semblables équations.

§ I.

En faisant, dans le premier membre de l'équation (1), $z = x + yi$, il vient

$$\varphi(x + yi, z') = X + Yi,$$

avec les égalités

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{3}$$

Si l'on fait ensuite $z' = x' + y'i$, on a

$$X = X' + Y'i, \quad Y = X'' + Y''i,$$

avec les égalités

$$\frac{\partial X'}{\partial x'} = \frac{\partial Y'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial X''}{\partial y'} = -\frac{\partial Y''}{\partial x'} \tag{4}$$

$$\frac{\partial X'}{\partial y'} = -\frac{\partial Y'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial X''}{\partial x'} = \frac{\partial Y''}{\partial y'}. \tag{5}$$

En même temps les équations (3) prennent la forme

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial x}i = \frac{\partial X''}{\partial y} + \frac{\partial Y''}{\partial y}i, \quad \frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y}i = -\frac{\partial X''}{\partial x} - \frac{\partial Y''}{\partial x}i,$$

et elles se décomposent dans les suivantes :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} = \frac{\partial Y''}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial y} = -\frac{\partial Y''}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial X'}{\partial y} = -\frac{\partial X''}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial x} = \frac{\partial Y''}{\partial y}. \tag{7}$$

Si l'on pose encore $c = a + bi$, l'équation (1) prend la forme

$$H + Gi = a + bi,$$

où l'on a

$$H = X' - Y'', \quad G = Y' + X''. \tag{8}$$

Il est maintenant aisé de remarquer que les dérivées partielles des fonctions H et G, tant par rapport à x et y que par rapport à x' et y', sont assujetties à des conditions semblables à (3). En effet, les équations (8) donnent

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial X'}{\partial x} - \frac{\partial Y''}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial X''}{\partial y}.$$

Or les seconds membres de ces équations sont égaux en vertu des équations (6); par suite,

$$(9) \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}.$$

On tire de même de l'équation (8), en vertu de (7),

$$(10) \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x};$$

en vertu de (4),

$$(11) \qquad \frac{\partial H}{\partial x'} = \frac{\partial G}{\partial y'},$$

et, en vertu de (5),

$$(12) \qquad \frac{\partial H}{\partial y'} = -\frac{\partial G}{\partial x'}.$$

De ces équations découle immédiatement une conséquence importante pour notre objet, et consistant en ce que l'expression différentielle formée avec les dérivées partielles de H et de G, et connue sous le nom de *parenthèse de Poisson,* se réduit immédiatement à zéro, si l'on prend pour couples de variables correspondantes soit x et y', y et x', soit x et x', y' et y.

En effet, en multipliant l'équation (9) par l'équation (11) écrite sous la forme $\frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial H}{\partial x'}$, et faisant passer tous les termes dans le premier membre, il vient

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

On tire de même des équations (10) et (12)

$$-\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} = 0.$$

En ajoutant les deux dernières équations, on aura

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

égalité dont le premier membre est une parenthèse de Poisson, où l'on a fait correspondre les variables x et y', y et x'; nous représenterons d'après cela cette égalité d'une manière abrégée par

$$(13) \qquad (H, G) = 0.$$

On trouve absolument de la même manière, en vertu des équations (9) et (12),

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} + \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

et, en vertu des équations (10) et (11),

$$\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

et, en soustrayant la dernière équation de la précédente, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

dont le premier membre est encore une parenthèse de Poisson, où l'on a fait correspondre les variables x et x', y' et y. Nous représenterons cette égalité, pour la distinguer de (13), par

$$(14) \qquad [H, G] = 0.$$

§ II.

En conservant la double notation pour les parenthèses de Poisson, établie dans le § I, formons les équations

$$(H, \psi) = 0, \quad [H, \chi] = 0, \quad (\omega, G) = 0, \quad [\varpi, G] = 0,$$

linéaires par rapport aux dérivées partielles des fonctions inconnues ψ, χ, ω, ϖ de x, y, x', y'.

Ayant écrit les systèmes d'équations différentielles ordinaires correspondants à ces équations et auxquels se ramène leur intégration, il est facile de se convaincre, en vertu des équations (9), (10) (11), (12), que les systèmes appartenant aux équations $(H, \psi) = 0$, et $[\varpi, G] = 0$, et ceux qui appartiennent aux équations $[H, \chi] = 0$ et $(\omega, G) = 0$, sont parfaitement identiques.

D'après cela, si l'on veut intégrer les équations précédentes, il suffira de considérer seulement deux de ces équations, différentes entre elles, par exemple

$$(H, \psi) = 0, \quad \text{et} \quad (\omega, G) = 0.$$

Mais la première de ces deux équations peut aussi s'écrire sous la forme $(\psi, H) = 0$, et il suffit évidemment de considérer la marche de l'intégration d'une seule de ces équations; tout ce que l'on trouvera pour celle-là pourra s'appliquer à l'équation $(\omega, G) = 0$, en y changeant H en G, et réciproquement.

À l'équation linéaire

$$(\psi, H) = 0$$

correspond le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial y'}} = \frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial x'}} = -\frac{dx'}{\frac{\partial H}{\partial y}} = -\frac{dy'}{\frac{\partial H}{\partial x}}. \tag{15}$$

Une intégrale de ce système est évidemment $H = a$, et l'on démontre, au moyen de (13), qu'il admet aussi l'intégrale $G = b$. Enfin la dernière intégrale, qui complète la solution, peut toujours s'obtenir par l'emploi de la théorie du multiplicateur généralisée par Jacobi, en se fondant sur le théorème suivant [1] :

Étant donné un système d'équations différentielles

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

si l'on connaît $n - 1$ de ses intégrales

$$f_2 = \alpha_2, \quad f_3 = \alpha_3, \quad \ldots, \quad f_n = \alpha_n,$$

et aussi la solution M *de l'équation différentielle*

$$X\frac{d\log M}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0, \tag{α}$$

---

(1) *Vorlesungen über Dynamik*, p. 112.

alors, en ramenant, au moyen de ces intégrales, le système proposé à l'équation différentielle

$$(\beta) \qquad X\,dx_1 - X_1\,dx = 0$$

entre les deux variables x *et* x_1, *cette équation aura pour facteur d'intégration*

$$(\gamma) \qquad \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Il faut remarquer que le système (15) est canonique; par suite, pour ce système, tous les termes de l'équation (α), à l'exception du premier, se détruisent, quelle que soit l'équation du système (15) que l'on ait prise pour (β); par suite, M est ici une quantité constante, et l'on pourra la supposer égale à l'unité.

Pour l'équation (β), ce qu'il y a de plus simple, c'est de prendre l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial x'} dx - \frac{\partial H}{\partial y'} dy = 0,$$

ou l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx' - \frac{\partial H}{\partial y} dy' = 0.$$

L'intégration de ces équations, à l'aide des facteurs d'intégration donnés par la formule (γ) et pour $M = 1$, se ramène aux quadratures

$$\int \frac{\frac{\partial H}{\partial x'} dx - \frac{\partial H}{\partial y'} dy}{\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x'}} = \text{const.},$$

et

$$\int \frac{\frac{\partial H}{\partial x} dx' - \frac{\partial H}{\partial y} dy'}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}} = \text{const.}$$

Mais, avant de calculer ces quadratures, il faut, sous le signe $\int$, éliminer de la première x' et y', et de la seconde x et y, à l'aide des équations $H = a$ et $G = b$. Cela exige, à ce qu'il semble, la résolution de ces deux équations à deux inconnues; mais, ces équations étant équivalentes à l'équation unique

$$\mathrm{H}+\mathrm{G}i=a+bi,\quad \text{ou}\quad \varphi(z,z')=c,$$

il suffira de tirer de cette dernière la valeur de z' ou celle de z, et, après avoir remplacé de nouveau z, z' et c par leurs expressions complexes, de décomposer le résultat en deux équations, pour obtenir les valeurs de x', y' en x, y, ou *vice versa*.

Il est évident que, pour tout autre choix de la dernière équation à intégrer du système (15), on n'éviterait pas la résolution algébrique de deux équations $\mathrm{H}=a$, $\mathrm{G}=b$ à deux inconnues.

§ III.

On peut encore achever autrement l'intégration du système (15). Introduisons dans ces équations une nouvelle variable t, en égalant sa différentielle à chacun des rapports (15). Nous aurons de cette manière

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y'}, & \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x'},\\ \frac{dx'}{dt}&=-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}, & \frac{dy'}{dt}&=-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Nous connaissons deux intégrales de ces équations, H et G, satisfaisant à l'identité

$$(\mathrm{H},\mathrm{G})=0;$$

par suite, en vertu d'un théorème de M. Liouville [1], les expressions différentielles

$$y'\,dx+x'\,dy,\quad \text{et}\quad y\,dx'+x\,dy'$$

deviennent des différentielles exactes, si l'on élimine x' et y' de la première, x et y de la seconde, au moyen des équations $\mathrm{H}=a$ et $\mathrm{G}=b$, ce qui, d'après le § II, n'exige que la résolution algébrique d'une seule équation $\varphi(z,z')=c$.

Mais, pour obtenir les intégrales des deux expressions différentielles précédentes par une voie encore plus simple, supposons que

---

[1] *Journal de Mathématiques*, t. XX, 1855, p. 137.

les valeurs de z' et de z, tirées de l'équation $\varphi(z, z') = c$, soient

$$z' = \psi(z,c), \quad \text{et} \quad z = \chi(z', c).$$

Multipliant la première par dz, la seconde par dz' et intégrant, on trouve

$$\int z'\,dz = \int \psi(z,c)\,dz = Z, \quad \int z\,dz' = \int \chi(z',c)\,dz' = Z'.$$

On peut maintenant démontrer que les quadratures cherchées

$$\int (y'\,dx + x'\,dy) = u, \quad \text{et} \quad \int (y\,dx' + x\,dy') = v$$

sont les coefficients de i dans les résultats de la substitution des expressions complexes de z, z', c dans les fonctions Z et Z'. En effet,

$$Z = \int (x' + iy')(dx + i\,dy) = \int (x'\,dx - y'\,dy) + i\int (y'\,dx + x'\,dy),$$
$$Z' = \int (x + iy)(dx' + i\,dy') = \int (x\,dx' - y\,dy') + i\int (y\,dx' + x\,dy').$$

Ayant trouvé une des fonctions u, v, on aura, d'après le théorème de M. Liouville que nous venons de citer, une troisième intégrale du système (16) sous la forme de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial b} = \text{const.}$$

Ces intégrales doivent être complétement identiques avec celles qu'on a obtenues au § II, ce qu'il suffit de démontrer pour l'une d'elles, par exemple, pour la première. On a

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int \left(\frac{\partial y'}{\partial b}\,dx + \frac{\partial x'}{\partial b}\,dy\right).$$

Mais, en considérant x' et y' comme des fonctions implicites de x, y, a, b, déterminées au moyen des équations $H = a$ et $G = b$, et différentiant ces dernières partiellement par rapport à b, on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial G}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b} = 1,$$

d'où

$$\frac{\partial x'}{\partial b} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial y'}}{\dfrac{\partial H}{\partial x'}\dfrac{\partial G}{\partial y'} - \dfrac{\partial H}{\partial y'}\dfrac{\partial G}{\partial x'}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial b} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial x'}}{\dfrac{\partial H}{\partial x'}\dfrac{\partial G}{\partial y'} - \dfrac{\partial H}{\partial y'}\dfrac{\partial G}{\partial x'}},$$

et en substituant ces valeurs, on trouve une expression de l'intégrale

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int \frac{\frac{\partial H}{\partial x'}dx - \frac{\partial H}{\partial y'}dy}{\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x'}} = \text{const.},$$

parfaitement identique avec celle qu'on a obtenue au § II.

L'introduction dans le système (15) d'une nouvelle variable t, au moyen de sa différentielle, augmente d'une unité le nombre des intégrales des équations ainsi transformées; cette nouvelle intégrale, la seule qui renferme t, s'exprime par l'une ou l'autre des équations

$$\frac{\partial u}{\partial a} = t + \text{const.}, \quad \frac{\partial v}{\partial a} = \text{const.} - t,$$

que l'on peut encore ramener à la forme suivante :

$$t + \text{const.} = \int\left(\frac{\partial y'}{\partial a}dx + \frac{\partial x'}{\partial a}dy\right) = \int \frac{\frac{\partial G}{\partial y'}dy - \frac{\partial G}{\partial x'}dx}{\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x'}},$$

$$\text{const.} - t = \int\left(\frac{\partial y}{\partial a}dx' + \frac{\partial x}{\partial a}dy'\right) = \int \frac{\frac{\partial G}{\partial y}dy' - \frac{\partial G}{\partial x}dx'}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}},$$

où l'on devra encore, avant d'intégrer, éliminer, sous le signe $\int$, x' et y' dans la première formule, x et y dans la seconde, au moyen de l'équation $H + Gi = a + bi$.

§ IV.

L'avantage que présente la méthode d'intégration exposée au § III sur celle du § II consiste en ce que, en intégrant le système (16), on résout en même temps un autre problème de Calcul intégral. Il est clair, en effet, que la solution commune des deux équations aux dérivées partielles $H = a$ et $G = b$, ainsi que l'intégrale complète de chacune d'elles en particulier, sera

$$u + \text{const.}, \quad \text{ou} \quad v + \text{const.},$$

en ayant soin, si l'on prend pour variables indépendantes x et y, de poser $y' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $x' = \frac{\partial u}{\partial y}$, ou *vice versa*, si l'on prend pour variables indépendantes x' et y', de poser $y = \frac{\partial v}{\partial x'}$, $x = \frac{\partial v}{\partial y'}$.

Mais, dans les équations $H = a$ et $G = b$, on peut aussi prendre pour variables indépendantes deux quelconques des quatre variables x, y, x', y', en exprimant en même temps, de la manière connue, les deux autres variables au moyen des dérivées partielles du premier ordre d'une seule et même fonction, prises par rapport à ces variables indépendantes. Cette fonction inconnue peut toujours s'obtenir au moyen d'une quadrature, et, celle-ci étant complétée par la simple addition d'une constante arbitraire, on aura la solution commune des deux équations simultanées $H = a$ et $G = b$, et l'intégrale complète de chacune d'elles en particulier.

Les diverses combinaisons deux à deux des quatre variables x, y, x', y' présentent six cas, dont deux ont été déjà considérés, de sorte qu'il reste les quatre cas suivants :

1° En prenant pour variables indépendantes x et x', on pourra poser

$$y = \frac{\partial P}{\partial x'}, \quad y' = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

En effet, si, dans les équations $H = a$ et $G = b$, on regarde y et y' comme des fonctions de x et x', on trouve

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}},$$

et l'on en tire, en vertu de l'égalité (13),

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{(H, G)}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}} = 0;$$

par conséquent,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial x'}dx' = -y'\,dx + y\,dx',$$

et

$$P = \int(-y'\,dx + y\,dx') + \text{const.}$$

2° En prenant pour variables indépendantes x et y', on pourra poser

$$x' = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial Q}{\partial y'}.$$

Si l'on considère maintenant, dans les équations $H = a$ et $G = b$, x' et y comme des fonctions de x et y', il vient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}},$$

d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (14),

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{[H, G]}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}} = 0;$$

par conséquent,

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y'}dy' = x'\,dx + y\,dy',$$

et

$$Q = \int (x'\,dx + y\,dy') + \text{const.}$$

3° Quand on prend pour variables indépendantes y et y', il faut alors poser, pareillement à ce qu'on a fait dans le cas 1°,

$$x = \frac{\partial R}{\partial y'}, \quad x' = -\frac{\partial R}{\partial y}.$$

En effet, on trouve, absolument de la même manière que dans le cas 1°,

$$\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{(H, G)}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}} = 0,$$

et partant

$$R = \int (x\,dy' - x'\,dy) + \text{const.}$$

4° Enfin, le cas où l'on prend pour variables indépendantes y et x' est semblable au cas 2°; on posera alors

$$x = \frac{\partial S}{\partial x'}, \quad y' = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Comme on tire des équations $H = a$, $G = b$,

$$\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x'} = - \frac{[H, G]}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x}} = 0,$$

on a, par suite,

$$S = \int (x\,dx' + y'\,dy) + \text{const.}$$

Les fonctions P, Q, R, S ont, par rapport au système canonique du § III, la même importance que les fonctions u et v; c'est-à-dire que, au moyen des dérivées partielles de chacune de ces quatre fonctions par rapport aux constantes arbitraires a et b, on peut exprimer les deux intégrales qui constituent, avec $H = a$ et $G = b$, le système complet des intégrales des équations canoniques considérées (16).

Pour se convaincre que cette propriété appartient, par exemple, à la fonction P, en désignant a ou b par α, prenons la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$; substituons-y H à la place de a et G à la place de b; enfin, prenons la dérivée totale par rapport à t du résultat de la substitution; ce qui donne

$$\frac{d.\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{dt} = \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial H}\frac{dH}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial G}\frac{dG}{dt}.$$

Or, H et G sont des intégrales, et par suite $\frac{dH}{dt} = 0$ et $\frac{dG}{dt} = 0$. De plus,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -y', \quad \frac{\partial P}{\partial x'} = y;$$

donc

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x} = -\frac{\partial y'}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Enfin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y};$$

par conséquent

$$\frac{d.\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right).$$

L'expression entre parenthèses dans le second membre de la seconde égalité représente le résultat de la différentiation partielle, par rapport à α, de la première des deux équations $H = a$ et $G = b$, dans laquelle on a substitué à y et à y' leurs valeurs tirées de ces équations. Par suite, si $\alpha = b$, on a $d.\frac{\partial P}{\partial b} = 0$; si $\alpha = a$, alors $d.\frac{\partial P}{\partial a} = -dt$.

En intégrant, on tire de là les deux intégrales cherchées du système canonique,

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \text{const.}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial a} = \text{const.} - t.$$

Le même mode de démonstration s'appliquerait exactement aux fonctions Q, R, S.

Nous ferons encore la remarque suivante. Dans le § III, nous avons trouvé les formules

$$Z = \int z'\, dz, \quad Z' = \int z\, dz',$$

où les valeurs de z et de z' étaient tirées de l'équation $\varphi(z, z') = c$; en y substituant les expressions complexes de z, z', c, et posant

$$u = \int (y'\, dx + x'\, dy), \quad v = \int (y\, dx' + z\, dy'),$$
$$u_1 = \int (x'\, dx - y'\, dy), \quad v_1 = \int (x\, dx' - y\, dy'),$$

nous aurons

$$Z = u_1 + ui, \quad Z' = v_1 + vi.$$

Les fonctions u_1 et v_1 jouissent, relativement au système canonique considéré (16), de la même propriété que les fonctions u, v, P, Q, R, S; en sorte que, connaissant les deux intégrales $H = a$, $G = b$ de ce système, on peut obtenir les deux intégrales restantes au moyen, par exemple, de la fonction u_1, sous la forme des équations

$$\frac{\partial u_1}{\partial a} = \text{const.}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial b} = \text{const.} - t.$$

Il est superflu d'en donner la démonstration, qui se ferait par un calcul presque littéralement identique à celui que nous avons donné pour la fonction P.

Ajoutons à cela que, en considérant, dans les équations $H = a$ et $G = b$, x et y comme les variables indépendantes, et posant $x' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $y' = -\frac{\partial u_1}{\partial y}$, on trouvera que $u_1 +$ const. représentera l'intégrale complète de chacune des deux équations précédentes aux dérivées partielles, et la solution commune de leur système.

Nous avons vu que u, v, u_1, v_1 s'obtiennent au moyen des intégrales $Z = \int z'\,dz$ et $Z' = \int z\,dz'$ de fonctions d'une seule variable, tandis que la détermination de P, Q, R, S exige le calcul de quadratures dépendant de deux variables. En conséquence, il n'est pas inutile de remarquer que le calcul de ces dernières fonctions se ramène au calcul des premières, en vertu des formules suivantes, faciles à vérifier :

$$\begin{aligned}
dP - dv &= -d(xy'), & dP + du &= d(x'y),\\
dQ + dv_1 &= d(xx'), & dQ - du_1 &= d(yy'),\\
dR - dv &= -d(x'y), & dR + du &= d(xy'),\\
dS - dv_1 &= d(yy'), & dS + du_1 &= d(xx'),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$\begin{aligned}
P &= v - xy' = x'y - u,\\
Q &= xx' - v_1 = u_1 + yy',\\
R &= v - x'y = xy' - u,\\
S &= v_1 + yy' = xx' - u_1,
\end{aligned}$$

en omettant, pour plus de simplicité, les constantes arbitraires.

§ V.

Prenons maintenant une équation différentielle de la forme générale

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

Remplaçons les variables z, z' par leurs expressions complexes $x + yi$, $x' + y'i$, ce qui donne

$$f(x + yi, x' + y'i) = X + Yi.$$

en désignant par X, Y des fonctions de x, y, x', y', assujetties nécessairement (§ I) aux conditions

$$(c)\qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y},\quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x},\quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y'},\quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y'} = -\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x'}.$$

L'équation différentielle précédente prendra la forme

$$dx' + i\,dy' = \mathrm{X}\,dx - \mathrm{Y}\,dy + i(\mathrm{Y}\,dx + \mathrm{X}\,dy),$$

et se décomposera dans les deux suivantes :

$$dx' = \mathrm{X}\,dx - \mathrm{Y}\,dy,\quad dy' = \mathrm{Y}\,dx + \mathrm{X}\,dy.$$

Ces équations forment un système *incomplet* d'équations différentielles, dont l'intégration peut se ramener à l'intégration d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Une équation de la forme

$$\mathrm{U} = \text{const.},$$

où U est une fonction de x, y, x', y', sera une équation intégrale relativement aux équations précédentes, et la fonction U en sera une intégrale, si sa différentielle totale s'annule identiquement en vertu de ces mêmes équations. Or on a

$$d\mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}dy',$$

et, après la substitution des valeurs de dx' et de dy' tirées des équations données, il vient

$$d\mathrm{U} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} + \mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}\right)dx + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} + \mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}\right)dy.$$

On voit par là que, dx et dy étant arbitraires, on aura

$$d\mathrm{U} = 0,$$

si U satisfait aux deux équations simultanées

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} + \mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} + \mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'} = 0.$$

Il est facile de s'assurer que ces deux équations forment ce qu'on appelle un *système jacobien* ou *système fermé*, jouissant, comme on sait, de cette propriété que toute intégrale de l'une d'elles dans le résultat de la substitution dans le premier membre de l'autre donne une intégrale de la première équation.

Pour le faire voir, introduisons les symboles A et B pour désigner respectivement les opérations

$$\frac{\partial}{\partial x} + X\frac{\partial}{\partial x'} + Y\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} - Y\frac{\partial}{\partial x'} + X\frac{\partial}{\partial y'},$$

de sorte que les équations données seront représentées par

$$A(U) = o, \quad B(U) = o;$$

il suffira de démontrer l'identité symbolique de l'égalité

$$B[A(U)] = A[B(U)],$$

pour une valeur arbitraire de la fonction U. Mais pour cela il faut et il suffit que les conditions

$$B(X) = A(-Y), \quad B(Y) = A(X)$$

soient satisfaites. En introduisant de nouveau, à la place des symboles A et B, leurs valeurs, ces conditions prennent la forme

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + X\left(\frac{\partial X}{\partial y'} + \frac{\partial Y}{\partial x'}\right) - Y\left(\frac{\partial X}{\partial x'} - \frac{\partial Y}{\partial y'}\right) = o,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} + X\left(\frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial X}{\partial x'}\right) - Y\left(\frac{\partial Y}{\partial x'} + \frac{\partial X}{\partial y'}\right) = o,$$

et, en vertu des conditions (c) auxquelles sont assujettis X et Y, il est clair que les dernières conditions sont aussi remplies.

L'équation $A(V) = o$ a pour intégrale y, et soit α une autre de ses intégrales, différente de y; α ne sera pas exprimable au moyen de y seul.

En faisant successivement $V = y, \alpha$, dans l'expression $B(V)$, on trouvera

$$B(y) = 1, \quad B(\alpha) = \beta.$$

Si $\beta = o$, α sera alors la solution commune cherchée des équations $A(V) = o$ et $B(V) = o$.

Si β s'exprime au moyen des seules quantités y et α, de sorte que $\beta = f(y, \alpha)$, en supposant alors que

$$V = F(y, \alpha)$$

soit la solution commune cherchée, on voit que la fonction F devra satisfaire à la condition

$$B(F) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} f(y, \alpha) = 0.$$

Celle-ci conduit à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{1} = \frac{d\alpha}{f(y, \alpha)}, \quad \text{ou} \quad f(y, \alpha)\,dy - d\alpha = 0,$$

et il est clair que l'intégrale de celle-ci s'obtiendra immédiatement au moyen des quadratures, si β s'exprime au moyen de y seul sans α, ou au moyen de α seul sans y, ou enfin se réduit à une valeur constante quelconque.

Si β ne peut s'exprimer au moyen des seules variables y et α, alors, en posant $V = \beta$ dans l'expression $B(V)$, il viendra

$$B(\beta) = \gamma.$$

Il est clair que β sera la solution commune cherchée, si $\gamma = 0$; dans le cas contraire, γ sera une constante, ou devra nécessairement s'exprimer au moyen de y, α et β seulement. En effet, si γ ne s'exprimait pas en y, α, β, on aurait alors, outre ces trois intégrales, une quatrième intégrale, distincte des précédentes, de l'équation $A(V) = 0$, ou ce qui revient au même, du système des équations

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y},$$

tandis que ces dernières ne peuvent admettre que trois intégrales distinctes.

Ainsi, si $\gamma = f(y, \alpha, \beta)$, en supposant alors que la solution commune cherchée soit

$$V = F(y, \alpha, \beta),$$

on parviendra à la condition nécessaire

$$B(F) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial F}{\partial \beta}\mathrm{f}(y, \alpha, \beta) = 0,$$

conduisant à l'intégration du système d'équations

$$\frac{dy}{1} = \frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\beta}{\mathrm{f}(y, \alpha, \beta)},$$

lequel se ramène à son tour à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} = \mathrm{f}\left(y, \alpha, \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

La connaissance de l'une des deux intégrales premières de cette équation suffit pour la détermination de la solution commune des équations $A(V) = 0$ et $B(V) = 0$.

Il est évident que, si l'expression de γ est indépendante d'une ou de deux ou de trois des variables y, α, β, il en résultera dans l'intégration de l'équation précédente une plus ou moins grande simplification.

La résolution des équations $A(U) = 0$, $B(U) = 0$ se fera immédiatement, si l'on a trouvé préalablement l'intégrale générale

$$\varphi(z, z') = c$$

de l'équation différentielle

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

Dans ce cas, on aura l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f(z, z')\frac{\partial\varphi}{\partial z'} = 0.$$

En remplaçant z et z' par leurs expressions complexes, il viendra

$$f(x + yi, x' + y'i) = X + Yi, \quad \varphi(x + yi, x' + y'i) = H + Gi,$$

avec les conditions (c) pour X et Y, et les conditions (9) à (12) pour H et G.

En vertu de ces dernières, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{H} + \mathrm{G}i) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}i,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'}(\mathrm{H} + \mathrm{G}i) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}i.$$

Par conséquent, l'équation précédente, exprimée à l'aide des dérivées partielles de φ, peut s'exprimer à l'aide des dérivées partielles de H seul ou de G seul. En substituant également les expressions complexes dans $f(z, z')$, on trouvera ainsi les deux égalités

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}) - i\mathrm{B}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{G}) + i\mathrm{A}(\mathrm{G}) = 0,$$

lesquelles se décomposent dans les quatre suivantes :

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{G}) = 0, \quad \mathrm{A}(\mathrm{G}) = 0;$$

ce qui démontre que les équations linéaires $\mathrm{A}(\mathrm{U}) = 0$ et $\mathrm{B}(\mathrm{U}) = 0$, étant satisfaites par les valeurs H et G de U, le seront aussi par la valeur $\mathrm{U} = \Pi(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, Π désignant une fonction arbitraire.

La question de savoir à quelles conditions la solution commune U des deux équations $\mathrm{A}(\mathrm{U}) = 0$, $\mathrm{B}(\mathrm{U}) = 0$ peut représenter une des parties composantes de l'intégrale *inconnue* $\varphi(z, z') = \mathrm{H} + \mathrm{G}i$, peut se résoudre de la manière suivante.

Si, par exemple, $\mathrm{U} = \mathrm{H}$, il devra exister une fonction V, représentant la seconde composante G de l'intégrale φ, de sorte que l'on devra avoir $\mathrm{V} = \mathrm{G}$. Il s'ensuit de là que

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}.$$

Mais on a

$$d\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}dx + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}dy',$$

et, en vertu des égalités précédentes, il viendra

$$d\mathrm{V} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dy - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}dx' + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'}dy';$$

par conséquent, V se déterminera au moyen de la fonction connue U par une quadrature, si les conditions d'intégrabilité

$$\alpha = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \qquad \beta = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x'} - \frac{\partial^2 U}{\partial y' \partial x} = 0,$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x'} = 0, \quad \delta = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} = 0$$

sont satisfaites.

Or des équations

$$A(U) = \frac{\partial U}{\partial x} + X \frac{\partial U}{\partial x'} + Y \frac{\partial U}{\partial y'} = 0,$$

$$B(U) = \frac{\partial U}{\partial y} - Y \frac{\partial U}{\partial x'} + X \frac{\partial U}{\partial y'} = 0,$$

en ayant égard aux conditions (c), on tire sans peine les égalités suivantes :

$$\frac{\partial A(U)}{\partial x} + \frac{\partial B(U)}{\partial y} = \alpha + X\gamma - Y\beta = 0,$$

$$\frac{\partial A(U)}{\partial x'} + \frac{\partial B(U)}{\partial y'} = \gamma + X\delta = 0,$$

$$\frac{\partial B(U)}{\partial x'} - \frac{\partial A(U)}{\partial y'} = \beta - Y\delta = 0,$$

lesquelles démontrent que, si l'une des quatre quantités α, β, γ, δ s'annule, il en sera de même aussi des trois autres.

Par conséquent, si la solution commune U des deux équations $A(U) = 0$, $B(U) = 0$ satisfait à l'une des quatre conditions

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

on pourra alors, par son moyen, calculer l'intégrale générale

$$\varphi(z, z') = c$$

de l'équation

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

En introduisant les expressions complexes des variables dans un système d'équations différentielles, il est facile d'obtenir des transformations et des conséquences semblables aux précédentes; mais nous ne les développerons pas, parce qu'elles sont des applications particulières des §§ I-IV. Une de ces applications, qui s'était présentée à moi avant le problème général, a été communiquée par moi à la rédaction du *Journal de la Société Mathématique de Moscou*, au commencement de cette année.

Kharkof, 1876.