Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

S. Kantor

Quelques théorèmes nouveaux sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 136-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_136_1>

MÉLANGES.

QUELQUES THÉORÈMES NOUVEAUX SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

Par M. S. KANTOR,
à Vienne.

Dans un Mémoire publié dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie impériale des Sciences de Vienne (numéro de juin 1878, IIe Section), j'ai essayé de déduire, par une méthode qui n'avait pas encore été employée, les propriétés les plus essentielles et déjà connues de cette courbe, étudiée avec détail d'abord par Steiner et ensuite par Cremona. A l'aide de cette méthode, qui repose sur des théorèmes susceptibles d'une grande extension, concernant les groupes de points de la circonférence du cercle, j'ai établi, dans la présente Note, un certain nombre de nouveaux théorèmes qui pourront, je crois, offrir assez d'intérêt pour obtenir une place dans le *Bulletin*.

Soient H_4^3 l'hypocycloïde en question, r le rayon et m le centre du cercle qui lui est triplement tangent.

Le segment intercepté par la courbe elle-même sur une tangente est $2r$.

1. *Si d'un point* I *du plan on mène les trois tangentes, et que* t_1, t_2, t_3 *soient les segments compris entre* I *et les points de contact, on aura*

$$t_1 \sin \widehat{t_2 t_3} = t_2 \sin \widehat{t_3 t_1} = t_3 \sin \widehat{t_1 t_2}.$$

2. *Un triangle quelconque étant circonscrit à* H_4^3, *le centre de son cercle circonscrit sera à la même distance de* m *que le point de concours de ses trois hauteurs.*

3. *Deux triangles circonscrits à* H_4^3, *et tels que les côtés de l'un soient respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre, auront le même point de concours des trois hauteurs.*

4. *Si l'on désigne par* r_1, r_2 *les rayons des cercles circonscrits à ces deux triangles, on aura toujours*

$$r_1^2 + r_2^2 = 4r^2.$$

5. *Les troisièmes tangentes* τ', τ'', τ''', *menées à* H_4^3 *des sommets d'un triangle circonscrit* $t't''t'''$, *sont également inclinées sur les côtés opposés du triangle* t, *et font avec eux l'angle* $\arcsin \frac{r_1}{2r}$. *Elles forment un triangle semblable à* $t'\,t''\,t'''$, *dont le cercle circonscrit a pour rayon* $\frac{r_1 r'_1}{r}$ *et pour centre le point de concours des hauteurs du triangle* t.

6. *On obtient le même triangle* τ, *en partant d'un triangle* t,

dont les côtés sont des tangentes perpendiculaires aux côtés du précédent.

7. *Par les points d'intersection* $\tau' t'$, $\tau'' t''$, $\tau''' t'''$, *si nous menons encore des tangentes* τ'_1, τ''_1, τ'''_1 *à la courbe, ces tangentes formeront un triangle dont les angles sont les doubles ou les suppléments des doubles de ceux du triangle* t, *et dont le rayon du cercle circonscrit est le même que celui du triangle* t.

8. *Soit un quadrilatère* $t_1 t_2 t_3 t_4$ *circonscrit à la courbe. La droite* R *qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère est parallèle à sa tangente opposée* (¹), *et située à égale distance de cette tangente et de l'axe de la parabole inscrite au quadrilatère.*

Dans un quadrilatère quelconque, les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles se trouvent eux-mêmes sur un cercle. Soit S_μ le centre de l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points. De plus, les quatre cercles en question se coupent en un point, dit le *point de Miquel* du quadrilatère.

Dans un pentagramme, on sait que les cinq points de Miquel de ses quadrilatères sont situés sur un même cercle, le *cercle de Miquel* du pentagramme.

9. *Le cercle de Miquel de tout pentagramme circonscrit à* H_4^3 *dégénère en une droite* (g_τ).

10. *Soient* t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 *cinq tangentes de notre courbe; les points* S_μ *des cinq quadrilatères* t *sont situés sur un cercle et y déterminent un pentagone dont les angles sont égaux à ceux du pentagramme* t. *Sur ce cercle est situé aussi le centre de la section conique tangente aux cinq* t.

11. *Le produit des axes de cette dernière conique est égal à*

$$\frac{\sqrt{r_{123}r_{124}r_{125}r_{134}r_{135}r_{145}r_{234}r_{235}r_{245}r_{345}}}{4r^3},$$

(¹) *Voir* Cremona, *Introduzione*, 67, V, où est défini le *point opposé* du quadrilatère se réduisant à une droite.

$r_{123}, r_{124}, \ldots$ *désignant les rayons des cercles circonscrits aux triangles* $t_1 t_2 t_3$, $t_1 t_2 t_4$, ...

Si l'on désigne par M le centre du cercle mentionné ci-dessus, qui appartient à un quadrilatère, les cinq points M d'un pentagramme seront situés sur un cercle, que nous nommerons M_γ.

12. *La droite* g_γ, *mentionnée plus haut, appartenant à* $t_1 \ldots t_5$, *passe par le centre de* M_γ. *Ce centre et celui du cercle des* S_μ *sont situés sur une droite passant par* m, *de telle sorte que la distance de* m *au premier est double de la distance de* m *au second.*

13. *Les tangentes* $t_1, \ldots, t_5$ *forment par leur combinaison dix triangles. Les intersections des hauteurs de ceux-ci sont les sommets d'un pentagramme complet, qui jouit de propriétés remarquables. Ses divers quadrilatères ont des droites* R (*voir* le n° 8), *qui sont perpendiculaires aux cinquièmes côtés respectifs du pentagramme. Les centres des cercles circonscrits à tous ses dix triangles sont situés sur le cercle triplement tangent à la courbe* H_4^3 *donnée et qui a pour centre* m. *Le produit des axes de la conique tangente aux cinq côtés de ce pentagramme est égal à*

$$8r^2\sqrt{\cos t_1 t_2 \cos t_1 t_3 \cos t_1 t_4 \ldots \cos t_3 t_4 \cos t_3 t_5 \cos t_4 t_5}.$$

La conique qui touche les tangentes $t_1, \ldots, t_5$ de H_4^3 a encore une autre tangente commune avec H_4^3, puisque H_4^3 est de la troisième classe. J'appellerai cette sixième tangente *tangente adjointe* des cinq premières.

14. *La droite* g_γ *du pentagramme* t *touche également la conique inscrite, et est parallèle à la tangente adjointe du pentagramme.*

15. *Si, avec six tangentes de* H_4^3 *on forme un hexagramme de Brianchon, deux* TRIANGLES COMPLÉMENTAIRES *quelconques de cet hexagramme, c'est-à-dire deux triangles contenant à eux deux les six côtés de la figure, auront deux cercles circonscrits d'égal rayon.*

16. *Soit* $t_1 \ldots t_6$ *un hexagramme quelconque circonscrit à* H_4^3;

les droites qui joignent deux à deux les centres des divers couples de triangles complémentaires de cet hexagramme concourent en un même point, qui est leur milieu commun.

17. *Soient* $t_1, \ldots, t_6$ *six tangentes quelconques de* H_4^3; *les centres des six coniques tangentes aux droites* t, *prises cinq à cinq, sont situés sur un cercle et forment sur ce cercle un hexagone, dont les angles sont égaux à ceux que forment entre elles les droites* t. *Le centre de ce cercle est le point d'intersection des six cercles* S_μ (*voir* plus haut), *et son rayon est*

$$r \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_6$ *désignant les angles que font les* t *avec une même tangente de rebroussement de* H_4^3.

18. *A cinq quelconques des six tangentes* t *correspond une tangente adjointe, et chacune de ces tangentes adjointes fait le même angle avec la sixième tangente* t *correspondante.*

19. *Si l'on considère dix tangentes de notre courbe, les tangentes adjointes de deux pentagrammes complémentaires quelconques se coupent sur une nouvelle tangente de* H_4^3, *qui est la* TANGENTE ADJOINTE *du décagramme* (¹).

Etc., etc.

20. *Tous les triangles circonscrits à* H_4^3 *et semblables à un triangle donné ont les centres de leurs cercles circonscrits situés sur un cercle de centre* m *et de rayon* $r\sqrt{1 - 8\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *étant les angles du triangle. Sur le même cercle sont situées aussi les intersections de hauteurs de tous ces triangles, et leurs droites d'Euler enveloppent une seconde courbe* H_4^3, *située symétriquement, par rapport à* m, *avec la courbe donnée.*

Quelques autres théorèmes sont relatifs aux coniques triplement tangentes à la courbe.

(¹) Le théorème général correspondant se trouve dans le Mémoire cité.

21. *Toutes les coniques triplement tangentes* (1) *sont des ellipses* V, *et leurs triangles de tangentes communs avec* H_4^3 *ont tous le rayon* $2r$ (*et par suite le plus grand rayon que puisse avoir un triangle circonscrit à* H_4^3).

22. *D'un point du plan on mène trois normales à la courbe. Leurs pieds sont les points de contact avec* H_4^3 *d'une ellipse* V, *dont le centre est le milieu de la droite* P_m.

23. *Autour d'un point quelconque* I *du plan comme centre on peut décrire une ellipse* V *et une seule. Les demi-axes de cette ellipse sont* $r+h$ *et* $r-h$, *h désignant la distance du point* I *au point m.*

24. *Par deux points du plan on peut faire passer neuf ellipses* (*réelles ou imaginaires*) *triplement tangentes à* H_4^3.

25. *Toutes les ellipses triplement tangentes* V, *dont les centres remplissent une droite g, ont un point commun. Chacune d'elles coupe la courbe* H_4^3 *en deux points, et les deux tangentes à* H_4^3 *menées en ces points ont un point d'intersection; tous ces points d'intersection sont eux-mêmes situés sur une ellipse* V. *Le centre de celle-ci est le pôle de g par rapport au cercle* m^2.

De plus :

26. *Parmi les coniques qui touchent trois tangentes de* H_4^3, *il y en a trois qui sont osculatrices à la courbe en un autre point. Les trois tangentes aux points d'osculation forment un triangle équilatéral ayant le même rayon du cercle circonscrit que le triangle formé par les tangentes données.*

Pour terminer cette Note, j'indiquerai encore quelques lieux dont la recherche me paraît être le premier exemple de l'application des méthodes géométriques à des problèmes généraux, relatifs à des courbes d'ordres supérieurs (2).

(1) *Voir* WEYR, *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse*, p. 10, Note C, art. III.

(2) L'application de l'Analyse à ces problèmes, il est vrai, a été déjà indiquée, entre autres par Lacroix, et, dans le *Journal de Schlömilch*, t. XIX, par M. Enneper.

27. *En chaque point de* H_4^3 *il existe une seule conique* (¹) *ayant avec la courbe un contact du quatrième ordre. Je trouve, pour le produit des axes de cette conique, la formule*

$$\frac{\rho^5}{4^6 r^3},$$

ρ *désignant le rayon de courbure en ce point.*

28. *Les centres de toutes ces coniques ayant un contact du quatrième ordre avec* H_4^3 *ont pour lieu une hypocycloïde à six points de rebroussement, dont trois coïncident avec les points de rebroussement de* H_4^3.

29. *Les centres de toutes les coniques qui touchent une tangente donnée t de la courbe, et qui ont en outre avec celle-ci, en un point variable, un contact du troisième ordre, sont situés sur une hypocycloïde à cinq points de rebroussement, qui sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{5}{2}r$. *Le centre de ce cercle ou le point de concours des cinq tangentes de rebroussement est le point milieu de la droite ms, s étant le* MILIEU (²) *de la tangente donnée.*

30. *En un point* P *de la courbe, celle-ci est touchée par une infinité de coniques ayant un contact du premier ordre; les centres de toutes celles qui ont avec* H_4^3 *un contact du second ordre ont pour lieu une hypocycloïde à quatre rebroussements, dont le cercle a pour rayon* $2r$ *et pour centre le* MILIEU *de la tangente fixe* (*en* P).

31. *Il y a, de plus, une infinité de coniques ayant, en un point* P *de* H_4^3, *un contact du second ordre avec cette courbe; le lieu des centres de celles qui touchent encore la courbe en un autre point est encore une hypocycloïde à trois rebroussements* (H_4^3), *dont le point de symétrie divise extérieurement la droite ms* (*s étant*

(¹) Pour notre courbe, cette conique est toujours une ellipse.

(²) C'est ainsi que Steiner appelle celui des points d'intersection de t_1 avec le cercle m^2 par lequel ne passe pas la tangente perpendiculaire à t_1.

le MILIEU *de la tangente fixe en* P) *dans le rapport de* 3 : 1, *et dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon r.*

32. *Les centres de toutes les coniques qui touchent deux tangentes données de* H_4^3 *et qui, de plus, ont avec cette courbe un contact du second ordre ont pour lieu une hypocycloïde à quatre rebroussements, dont le centre est le point milieu de la distance des* MILIEUX *des deux tangentes fixes, et dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$.

33. *Les centres de toutes les coniques qui touchent trois tangentes données d'une courbe* H_4^3 *et qui touchent encore celle-ci en un autre point ont pour lieu une nouvelle courbe* H_4^3, *dont les sommets sont situés sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$ *et dont le centre est au milieu de la droite qui joint m au centre du cercle circonscrit au triangle des trois tangentes données.*

Si par un point de la courbe on mène une parallèle à l'axe de la parabole qui a en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe, on peut, avec Cayley, appeler cette droite l'*axe de déviation* (1) pour ce point de la courbe. On a alors ce théorème :

34. *Les axes de déviation pour tous les points de notre courbe* H_4^3 *enveloppent une épicycloïde à six rebroussements, ayant pour centre m, et dont les sommets se trouvent sur un cercle de rayon* $\frac{3r}{2}$.

On trouve aussi *a priori* que cette courbe coïncide avec celle du théorème 28.

35. *Le paramètre de la parabole* $y^2 = 2px$ *ayant en* P *un contact du troisième ordre est*

$$2p = 4r(\sin 3\mu)^4,$$

(1) *Voir* aussi TRANSON, *Journal de Liouville*, t. VI, 1841.

μ étant l'angle de la tangente en P *avec une des tangentes de rebroussement.*

36. *Les foyers des paraboles ayant un contact du troisième ordre ont pour lieu une épicycloïde à trois points de rebroussement, lesquels coïncident avec ceux de* H_4^3.