LAGUERRE

Sur les surfaces homofocales du second ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 14-26

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_14_0>

MÉLANGES.

SUR LES SURFACES HOMOFOCALES DU SECOND ORDRE

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant données trois droites A, B et B′, menons, par un point a pris arbitrairement sur la première, une droite qui rencontre respectivement B et B′ aux points b et b'. La droite abb' décrit, lorsque le point a se déplace sur A, une surface du second ordre, et le conjugué harmonique du point a, par rapport au segment bb', décrit une génératrice de cette surface. Je dirai que cette génératrice est la *polaire de la droite* A *relativement aux droites* B *et* B′.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société Mathématique* (¹), j'ai énoncé et démontré, par des considérations de Géométrie pure, la proposition suivante :

Étant donné un système (Σ) *de surfaces homofocales du second ordre et une droite fixe* D, *si par* D *on mène des plans tangents à une surface quelconque* Σ *du système et si l'on prend la polaire de* D *relativement aux normales menées à* Σ *aux deux points de contact, cette polaire est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère.*

On peut dire que cette polaire est l'adjointe de D relativement au système homofocal (Σ), et il est facile de construire l'adjointe d'une droite quelconque quand on connaît une des focales du système. Que l'on mène en effet, par la droite donnée D, des plans rencontrant le plan de la focale suivant des tangentes à cette courbe et que, par les points de contact, on mène des perpendiculaires à ces plans, la droite adjointe de D sera la polaire de D relativement à ces perpendiculaires.

2. La proposition qui précède me paraît assez intéressante pour

(¹) *Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (*Bulletin de la Soc. Math.*, t. III, p. 179).

qu'il soit désirable d'en avoir une démonstration analytique; il est du reste utile, dans diverses recherches relatives aux surfaces du second ordre, de posséder les équations de l'adjointe d'une droite donnée.

Soient donc

$$\frac{x-\alpha}{\mathrm{L}}=\frac{y-\beta}{\mathrm{M}}=\frac{z-\gamma}{\mathrm{N}}$$

les équations d'une droite D et

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\mathrm{A}}+\frac{y^2}{\mathrm{B}}+\frac{z^2}{\mathrm{C}}=1$$

l'équation d'une surface quelconque Σ du système homofocal considéré.

Menons par D deux plans tangents à cette surface, et appelons T′ et T″ les deux points de contact. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un quelconque de ces points, on a les relations

$$\frac{x\alpha}{\mathrm{A}}+\frac{y\beta}{\mathrm{B}}+\frac{z\gamma}{\mathrm{C}}=1$$

et

$$\frac{x\mathrm{L}}{\mathrm{A}}+\frac{y\mathrm{M}}{\mathrm{B}}+\frac{z\mathrm{N}}{\mathrm{C}}=0,$$

qui expriment que le plan tangent au point (x, y, z) contient la droite D; en désignant par t une quantité indéterminée, posons en outre

$$\frac{x}{\mathrm{A}}+\frac{y}{\mathrm{B}}+\frac{z}{\mathrm{C}}=t.$$

Les trois équations précédentes, étant résolues par rapport à x, y et z, donnent les formules suivantes :

$$\frac{x}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}+t(\mathrm{N}\beta-\mathrm{M}\gamma)}{\omega},$$

$$\frac{y}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{N}-\mathrm{L}+t(\mathrm{L}\gamma-\mathrm{N}\alpha)}{\omega},$$

$$\frac{z}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{L}-\mathrm{M}+t(\mathrm{M}\alpha-\mathrm{L}\beta)}{\omega},$$

où ω représente le déterminant [1]

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ L & M & N \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées du point de contact devant satisfaire à l'équation (1), on aura, en posant, pour abréger,

$$p = \Sigma A(M - N)^2 - \omega^2,$$
$$q = \Sigma A(M - N)(N\beta - M\gamma), \quad \text{et} \quad r = \Sigma A(N\beta - M\gamma)^2,$$

l'équation suivante, qui détermine la quantité t :

$$(2) \qquad p + 2qt + rt^2 = 0.$$

Si donc on désigne par t' et t'' les racines de cette équation, les coordonnées du point T′ sont données par les formules

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x'}{A} &= \frac{M - N + t'(N\beta - M\gamma)}{\omega}, \\ \frac{y'}{B} &= \frac{N - L + t'(L\gamma - N\alpha)}{\omega}, \\ \frac{z'}{C} &= \frac{L - M + t'(M\alpha - N\beta)}{\omega}, \end{aligned} \right.$$

et celles du point T″ par les formules

$$(3') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x''}{A} &= \frac{M - N + t''(N\beta - M\gamma)}{\omega}, \\ \frac{y''}{B} &= \frac{N - L + t''(L\gamma - N\alpha)}{\omega}, \\ \frac{z''}{C} &= \frac{L - M + t''(M\alpha - N\beta)}{\omega}. \end{aligned} \right.$$

3. Les coordonnées d'un point quelconque S′ de la normale à

---

(1) Je suppose nécessairement ce déterminant différent de zéro; pour une droite donnée ne passant pas par l'origine, on peut toujours du reste, en choisissant convenablement les directions positives des axes, faire en sorte que sa valeur ne soit pas nulle.

la surface menée au point T′ sont données par les formules

$$x = x'\left(1 + \frac{\rho'}{A}\right), \quad y = y'\left(1 + \frac{\rho'}{B}\right) \quad \text{et} \quad z = z'\left(1 + \frac{\rho'}{C}\right),$$

où ρ' désigne un paramètre arbitraire; de même, en désignant par ρ'' un autre paramètre arbitraire, les coordonnées d'un point quelconque S″ de la normale menée en T″ sont données par les formules

$$x = x'\left(1 + \frac{\rho''}{A}\right), \quad y = y''\left(1 + \frac{\rho''}{B}\right) \quad \text{et} \quad z = z''\left(1 + \frac{\rho''}{C}\right).$$

Considérons sur la droite S′S″ deux points V′ et V″ divisant harmoniquement les segments S′S″; λ désignant un paramètre arbitraire, les coordonnées de ces points sont respectivement déterminées par les formules suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x'\left(1 + \frac{\rho'}{A}\right) + \lambda x''\left(1 + \frac{\rho''}{A}\right)}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y'\left(1 + \frac{\rho'}{B}\right) + \lambda y''\left(1 + \frac{\rho''}{B}\right)}{1 + \lambda}, \\ z &= \frac{z'\left(1 + \frac{\rho'}{C}\right) + \lambda z''\left(1 + \frac{\rho''}{C}\right)}{1 + \lambda}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x'\left(1 + \frac{\rho'}{A}\right) - \lambda x''\left(1 + \frac{\rho''}{A}\right)}{1 - \lambda}, \\ y &= \frac{y'\left(1 + \frac{\rho'}{B}\right) - \lambda y''\left(1 + \frac{\rho''}{B}\right)}{1 - \lambda}, \\ z &= \frac{z'\left(1 + \frac{\rho'}{C}\right) - \lambda z''\left(1 + \frac{\rho''}{C}\right)}{1 - \lambda}. \end{aligned}\right.$$

J'exprime que le point V′ est situé sur la droite D, ce qui donne les relations

$$\sum \frac{x'^2}{A} + \rho' \sum \frac{x'^2}{A^2} + \lambda \sum \frac{x'x''}{A} + \lambda\rho'' \sum \frac{x'x''}{A^2} = 1 + \lambda$$

et

$$\sum \frac{x'x''}{A} + \rho' \sum \frac{x'x''}{A^2} + \lambda \sum \frac{x''^2}{A} + \lambda\rho'' \sum \frac{x''^2}{A^2} = 1 + \lambda.$$

Les deux points T′ et T″ étant sur la surface Σ, on a

$$\sum \frac{x'^2}{A} = \sum \frac{x''^2}{A} = 1,$$

et les relations précédentes deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \rho' \sum \dfrac{x'^2}{A^2} + \lambda\rho'' \sum \dfrac{x'x''}{A^2} = \lambda\left(1 - \sum \dfrac{x'x''}{A}\right), \\ \rho' \sum \dfrac{x'x''}{A^2} + \lambda\rho'' \sum \dfrac{x''^2}{A^2} = \quad 1 - \sum \dfrac{x'x''}{A}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\rho' = \frac{1 - \sum \dfrac{x'x''}{A}}{\sum \dfrac{x'^2}{A^2} \sum \dfrac{x''^2}{A^2} - \sum^2 \dfrac{x'x''}{A^2}} \left(\lambda \sum \frac{x''^2}{A^2} - \sum \frac{x'x''}{A^2}\right)$$

et

$$\lambda\rho'' = \frac{1 - \sum \dfrac{x'x''}{A}}{\sum \dfrac{x'^2}{A^2} \sum \dfrac{x''^2}{A^2} - \sum^2 \dfrac{x'x''}{A^2}} \left(\sum \frac{x'^2}{A^2} - \lambda \sum \frac{x'x''}{A^2}\right).$$

Si l'on porte maintenant ces valeurs dans les équations (4′), on aura, en fonction du paramètre arbitraire λ, les coordonnées du point V″ qui décrit la polaire cherchée; mais, avant de faire cette substitution, il est d'abord nécessaire d'introduire les quantités qui définissent la droite D.

4. Si l'on pose, pour abréger,

$$P = \Sigma(M - N)^2,\quad Q = \Sigma(M - N)(N\beta - M\gamma),\quad \text{et}\quad R = \Sigma(N\beta - M\gamma)^2,$$

on obtient facilement les expressions suivantes :

$$\sum \frac{x'^2}{A^2} = \frac{P + 2Qt' + Rt'^2}{\omega^2},\qquad \sum \frac{x'x''}{A^2} = \frac{P + Q(t' + t'') + Rt't''}{\omega^2},$$

$$\sum \frac{x''^2}{A^2} = \frac{P + 2Qt'' + Rt''^2}{\omega^2},\quad \text{et}\quad 1 - \sum \frac{x'x''}{A} = \frac{(t' - t'')^2 r}{2\omega^2}.$$

On en déduit

$$\sum \frac{x'^2}{A^2} \sum \frac{x''^2}{A^2} - \sum{}^2 \frac{x'x''}{A^2} = \frac{(t'-t'')^2(PR - Q^2)}{\Delta^4},$$

et, par suite,

$$\rho' = \frac{r}{2(PR-Q^2)}[\lambda(P + 2Qt'' + Rt''^2) - P - Q(t'+t'') - Rt''t''],$$

$$\lambda\rho'' = \frac{r}{2(PR-Q^2)}\{P + 2Qt' + Rt'^2 - \lambda[P + Q(t'+t'') + Rt't'']\};$$

si l'on pose

$$\lambda = \frac{t'-\mu}{t''-\mu},$$

d'où

$$\lambda - 1 = \frac{t'-t''}{t''-\mu},$$

les valeurs précédentes deviennent

$$\rho' = \frac{r(\lambda-1)}{2(PR-Q^2)}[P + Qt'' + \mu(Q + Rt'')],$$

$$\lambda\rho'' = \frac{r(1-\lambda)}{2(PR-Q^2)}[P + Qt' + \mu(Q + Rt')].$$

Portons maintenant ces valeurs dans les équations ($4'$); en y remplaçant également x', y', z', x'', y'' et z'' par leurs valeurs, en faisant quelques réductions faciles et en remarquant qu'en vertu de l'équation (2)

$$t' + t'' = -\frac{2q}{r} \quad \text{et} \quad t't'' = \frac{p}{r},$$

on obtiendra les formules suivantes, qui donnent, en fonction d'un paramètre arbitraire μ, les coordonnées d'un point quelconque de la droite Δ adjointe à la droite D :

$$(6)\left\{\begin{aligned} x\omega &= A(M-N) - \frac{(M-N)(Pr - Qq) + (N\beta - M\gamma)(Qp - Pq)}{PR - Q^2} \\ &\quad + \mu\left[A(N\beta - M\gamma) - \frac{(M-N)(Qr - Rq) + (N\beta - M\gamma)(Rp - Qq)}{PR - Q^2}\right], \\ y\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $y\omega$ et de $z\omega$ se déduisant de celle de $x\omega$ par de simples permutations de lettres, je me dispense de les transcrire ici.

5. Pour démontrer maintenant la proposition que j'ai rappelée au commencement de cette Note, il suffit de faire voir que les équations que je viens d'obtenir restent les mêmes quand, au lieu de considérer la surface définie par l'équation (1), on considère une surface quelconque du système, c'est-à-dire quand on change respectivement A, B et C en $A + \rho$, $B + \rho$ et $C + \rho$, ρ désignant une constante arbitraire.

Or, des valeurs données ci-dessus de p, q et r il résulte aisément que, quand on effectue le changement dont je viens de parler, p, q et r deviennent respectivement $p + \rho P$, $q + \rho Q$ et $r + \rho R$, et il est facile de vérifier que les valeurs de x, y et z données par les formules (6) ne sont pas changées.

La proposition est donc démontrée.

6. On peut chercher quelles sont les droites de l'espace qui sont perpendiculaires à leurs adjointes. Si l'on remarque que les cosinus directeurs de la droite adjointe à D sont proportionnels aux coefficients de μ dans les valeurs de $x\omega$, $y\omega$ et $z\omega$, on voit que les droites cherchées sont définies par la relation

$$\sum AL(N\beta - M\gamma) - \frac{1}{PR - Q^2}$$
$$\times \left[(Qr - Qq) \sum L(M - N) + (Rp - Qq) \sum L(N\beta - M\gamma) \right] = 0,$$

relation qui se réduit évidemment à

$$\Sigma AL(N\beta - M\gamma) = 0;$$

elle exprime, on le voit aisément, que la droite donnée est perpendiculaire relativement à une des surfaces du système.

D'où la proposition suivante :

Si une droite est perpendiculaire à son adjointe, elle est également perpendiculaire à sa polaire relativement à une quelconque des surfaces du système (Σ).

7. Supposons que la droite D soit une génératrice d'une des

surfaces du système, par exemple de la surface déterminée par l'équation (1). L'équation (2) est alors identiquement satisfaite, et l'on a

$$p = q = r = 0.$$

Les équations de la droite adjointe Δ deviennent alors

$$\frac{x\omega}{A} = M - N + \mu(N\beta - M\gamma),$$

$$\frac{y\omega}{B} = N - L + \mu(L\gamma - N\alpha),$$

$$\frac{z\omega}{C} = L - M + \mu(M\alpha - L\beta);$$

multipliant successivement ces trois équations par α, β, γ et faisant la somme, on en déduit, en remarquant que

$$\omega = \Sigma\alpha(M - N),$$

l'équation suivante :

$$\frac{x\alpha}{A} + \frac{y\beta}{B} + \frac{z\gamma}{C} = 1.$$

C'est évidemment l'équation du plan polaire, par rapport à Σ, du point (α, β, γ), de la droite D, et ce plan contient l'adjointe Δ. Comme le point (α, β, γ) est un point quelconque de la droite D, il en résulte que Δ est l'enveloppe des plans polaires, par rapport à Σ, des divers points de D, et, comme D est sur la surface, c'est la droite D elle-même.

Donc :

Si une droite est une génératrice d'une quelconque des surfaces du système (Σ), *cette droite se confond avec son adjointe.*

8. Par une droite D menons les plans tangents à une surface du système et les normales aux points de contact. Ces deux droites étant perpendiculaires à D, la droite qui les rencontre et leur est perpendiculaire est parallèle à D; par suite, le point milieu du segment compris entre les pieds de cette perpendiculaire se trouve sur la droite adjointe Δ.

Donc :

Si, par une droite quelconque D, *on mène les plans tangents* *à une surface quelconque du système, puis les normales aux points de contact; si, en outre, on construit la droite qui rencontre ces deux normales et leur est perpendiculaire, le lieu du point milieu du segment compris entre les deux pieds de la perpendiculaire est la droite adjointe de* D.

Il y a généralement deux surfaces du système qui touchent D; soient Σ l'une d'entre elles et Σ' une surface homofocale qui en diffère infiniment peu. Les normales menées aux points de contact des plans menés par C tangentiellement à Σ' sont infiniment voisines, et le point milieu du segment dont je viens de parler se confond à la limite avec le centre de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à la surface Σ et ayant ses génératrices parallèles à D, ce centre de courbure correspondant au point de contact de D avec la surface.

D'où la proposition suivante :

Soient Σ et Σ_0 les deux surfaces du système qui touchent la droite D, *m et m_0 les points de contact; soit, de plus,* K *le centre de courbure, au point m, de la section droite du cylindre circonscrit à Σ et ayant ses génératrices parallèles à* D; *soit de même* K_0 *le centre de courbure, au point m_0, de la section droite du cylindre circonscrit à Σ_0 et ayant également ses génératrices parallèles à* D : *la droite qui joint les points* K *et* K_0 *est l'adjointe de* D.

9. Jusqu'ici la surface Σ, déterminée par l'équation (1), et dont les éléments figurent dans les formules (6), est une surface quelconque du système. Supposons maintenant qu'elle soit tangente à la droite D; l'équation (2) devant alors avoir deux racines égales, on peut poser

$$p = G^2, \quad q = GH \quad \text{et} \quad r = H^2,$$

et les formules (6) deviennent

$$(7)\left\{\begin{aligned} x\omega &= A[(M-N)+\mu(N\beta-M\gamma)] \\ &\qquad + \frac{(N\beta-M\gamma)G-(M-N)H}{PR-Q^2}[(PH-QG)+\mu(QH-RG)], \\ y\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\omega &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces formules peuvent encore se simplifier si l'on suppose que le point (α, β, γ), dont la position sur la droite D est jusqu'à présent indéterminée, est précisément le point de contact m de cette droite avec Σ.

L'équation (2) se réduit alors à

$$(G + Ht)^2 = 0,$$

et l'on en déduit

$$\frac{\alpha\omega}{A} = M - N - \frac{G}{H}(N\beta - M\gamma), \quad \frac{\beta\omega}{B} = N - L - \frac{G}{H}(L\gamma - N\alpha),$$

$$\frac{\gamma\omega}{C} = L - N - \frac{G}{H}(M\alpha - L\beta).$$

Au moyen de ces relations, les équations (7) prennent la forme suivante :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} (x - \alpha)\omega = A(N\beta - M\gamma)\left(\dfrac{G}{H} + \mu\right) - \dfrac{\alpha}{A}\,\dfrac{H\omega[PH - QG + \mu(QH - RG)]}{PR - Q^2}, \\ (y - \beta)\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (z - \gamma)\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

10. Si, entre les équations précédentes, on élimine les quantités ω, $\frac{G}{H} + \mu$ et $\frac{H\omega[PH - QG + \mu(QH - RG)]}{PR - Q^2}$, on obtient l'équation qui suit :

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & A(N\beta - M\gamma) & \dfrac{\alpha}{A} \\ y - \beta & B(L\gamma - N\alpha) & \dfrac{\beta}{B} \\ z - \gamma & C(M\alpha - L\beta) & \dfrac{\gamma}{C} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'un plan contenant l'adjointe Δ et passant par le point m; comme $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$ et $\frac{\gamma}{C}$ sont respectivement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale menée en m à la surface Σ, on voit que ce plan contient cette normale.

D'ailleurs, les quantités $A(N\beta - M\gamma)$, $B(L\gamma - N\alpha)$, $C(M\alpha - L\beta)$ étant respectivement proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente conjuguée de la droite D, ce plan contient également cette tangente conjuguée.

Donc :

Soit Σ *une surface du système touchant une droite* D *au point* m : *le plan, mené par le point* m *normalement à cette surface et passant par la tangente conjuguée de* D, *contient l'adjointe* Δ *de la droite* D.

En considérant la seconde surface du système qui touche D, on obtiendrait également un second plan contenant Δ; cette droite sera donc ainsi complétement déterminée.

11. En désignant comme ci-dessus par Σ_0 la seconde surface du système qui touche la droite D et par m_0 leur point de contact, considérons le plan mené en m tangentiellement à la surface Σ; ce plan contient la tangente conjuguée de D relativement à Σ; il résulte d'ailleurs d'une proposition bien connue qu'il contient la normale menée en m_0 à la surface Σ_0.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant données les deux surfaces Σ *et* Σ_0 *du système qui touchent respectivement une droite donnée* D *aux points* m *et* m_0, *si l'on construit la tangente conjuguée de* D *relativement à la surface* Σ, *cette tangente rencontre en un point* K_0 *la normale menée en* m_0 *à la surface* Σ_0. *Le point* K_0 *est le centre de courbure relatif au point* m_0 *de la section droite du cylindre circonscrit à* Σ_0 *et ayant ses génératrices parallèles à* D.

12. La considération de la droite adjointe permet de résoudre facilement diverses questions relatives à la courbure d'une surface du second ordre dont on connait la focale. Imaginons en effet un cylindre circonscrit à une surface donnée Σ, et soit mT une des génératrices de ce cylindre touchant la surface au point m; construisons la droite adjointe de MT, et désignons respectivement par T′ et par K les points où cette droite perce le plan tangent en m et la normale en ce point. On voit par ce qui précède que mT′ est la tangente conjuguée de mT et que K est le centre de courbure de la section droite du cylindre.

13. Les formules (8) donnent aisément les coordonnées du point K; la droite mK étant en effet perpendiculaire au plan tangent mené en m à la surface Σ, ses coordonnées s'obtiendront en faisant $\mu = -\frac{G}{H}$. En les désignant donc par ξ, η et ζ, on aura

$$(\xi - \alpha) = \frac{\alpha}{A} \frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

$$\eta - \beta = \frac{\beta}{B} \frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

$$\zeta - \gamma = \frac{\gamma}{C} \frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2}.$$

Soient, comme ci-dessus, Σ_0 la seconde surface du système qui touche D, et ρ la quantité dont diffèrent les carrés des axes de Σ et les carrés des axes de Σ_0.

L'équation

$$(G^2 - \rho P) + 2(GH - \rho Q)t + (H^2 - \rho R)t^2 = 0$$

devant avoir ses racines égales, on a

$$\rho = \frac{PH^2 - 2QGH + RG^2}{PR - Q^2},$$

et les formules précédentes deviennent

$$\xi - \alpha = \rho \frac{\alpha}{A}, \quad \eta - \beta = \rho \frac{\beta}{B}, \quad \zeta - \gamma = \rho \frac{\gamma}{C},$$

d'où

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 = \rho^2 \left(\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2}\right).$$

Si donc on désigne par R le rayon de courbure mK du cylindre circonscrit à Σ et ayant ses génératrices parallèles à D, par δ la distance du centre des surfaces du système au plan tangent à ce cylindre le long de D, on a la relation $R^2 = \rho^2 \delta^2$, d'où

$$R = \rho\delta.$$

De même, si l'on considérait le cylindre circonscrit à la surface Σ_0 et ayant ses génératrices parallèles à D, en désignant par R_0 son rayon de courbure le long de l'arête D et par δ_0 la distance du centre au plan tangent au cylindre le long de cette arête, on aurait la relation

$$R_0 = - \rho\delta_0.$$

Des relations précédentes on déduit en particulier l'équation

$$\frac{R}{\delta} = \frac{R_0}{\delta_0},$$

qu'il est aisé de vérifier.