BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Recherches sur un système articulé

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 151-192

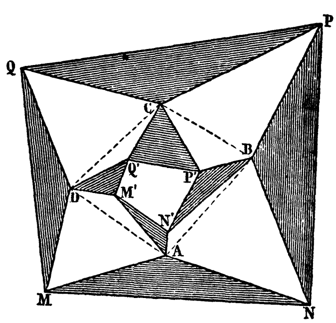
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_151_1>

RECHERCHES SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans le n° 133 des *Proceedings of the London Mathematical Society* (t. IX, p. 133), M. Kempe a publié des recherches très-intéressantes sur un système articulé dont voici la définition. Considérons deux quadrilatères articulés MNPQ, $M_1 N_1 P_1 Q_1$ reliés aux points A, B, C, D par des tiges de longueur invariable, comme l'indique la *fig.* 1. On voit que la figure présentera huit triangles

Fig. 1.



invariables, savoir les quatre triangles MAN, NBP, PCQ, QDM construits sur les côtés du quadrilatère MNPQ et les quatre triangles $M_1 AN_1$, $N_1 BP_1$, $P_1 CQ_1$, $Q_1 DM_1$ reliés de même aux côtés du quadrilatère $M_1 N_1 P_1 Q_1$. Il est clair qu'une telle figure formera en général un solide invariable et qu'il sera impossible de la déformer. En effet, supposons qu'on parte d'une position quelconque du quadrilatère articulé MNPQ. On pourra construire les points

A, B, C, D, qui sont à des distances connues de deux des points M, N, P, Q, puis les points M_1, N_1, P_1, Q_1, qui sont aussi à des distances données de deux des points A, B, C, D précédemment déterminés. Les points M_1, N_1, P_1, Q_1 une fois connus, il restera à exprimer que les longueurs M_1N_1, N_1P_1, P_1Q_1, Q_1M_1 ont des valeurs données, ce qui conduit à quatre équations. Or, quand le quadrilatère MNPQ se déforme, on ne dispose que d'une arbitraire, l'un de ses angles. Si les quatre équations auxquelles on est ainsi conduit sont satisfaites par des valeurs convenables de cette inconnue, on pourra construire une ou plusieurs positions de la figure; mais, si l'on veut que cette figure puisse se déformer, il faudra que ces équations se réduisent toutes à des identités.

M. Kempe s'est occupé du seul cas intéressant, de celui où les équations sont des identités et où par conséquent la déformation de la figure est possible. En employant une méthode très-ingénieuse, il a deviné un grand nombre de solutions d'un problème qui, *à priori,* pourrait paraître n'en avoir aucune. Néanmoins, il m'a semblé qu'il serait intéressant de résoudre d'une manière complète la question proposée par M. Kempe. D'abord la solution en offre un grand intérêt, et elle permet de rattacher à une théorie générale les deux seuls appareils connus, dus tous les deux à M. Hart, au moyen desquels on peut décrire une ligne droite en employant cinq tiges seulement. En second lieu, le problème est si compliqué et les équations qui expriment les liaisons des différents points sont si nombreuses, qu'on peut espérer de trouver, en le résolvant, une méthode propre à donner la solution des autres problèmes généraux qui se présentent en si grand nombre dans la théorie des systèmes articulés.

La marche que j'ai adoptée repose d'une part sur l'emploi des *grandeurs géométriques* dans le plan et sur leur expression bien connue au moyen d'une variable complexe, et d'autre part sur les recherches que j'ai publiées récemment et d'après lesquelles la théorie du quadrilatère articulé est identique à celle d'une cubique plane, que j'appellerai *cubique associée au quadrilatère.*

Mais, avant de commencer ces recherches et pour les rendre plus faciles, je remarquerai avec M. Kempe une espèce de symétrie très-importante que présente le système articulé. On peut le décomposer de trois manières différentes en deux parties ayant la même relation. Il y a d'abord la décomposition primitive qui dérive de la considération des deux quadrilatères articulés MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$. Les deux séries de quatre triangles sont alors rattachées aux points A, B, C, D. Mais on peut substituer aux deux quadrilatères primitifs les deux suivants, QCQ_1D et NBN_1A, et l'on aura la même définition de la figure qu'avec les deux premiers quadrilatères. Les triangles QPC, CP_1Q_1, Q_1M_1D, DMQ, construits sur les côtés du premier, devront se rattacher par leurs sommets libres P, P_1, M_1, M aux triangles NPB, BP_1N_1, N_1M_1A, AMN, construits sur les côtés homologues du second quadrilatère. On obtient de même une troisième définition de la figure au moyen des quadrilatères PCP_1B et MDM_1A. Les triangles PQC, CQ_1P_1, P_1N_1B, BNP, construits sur les côtés du premier, devront être rattachés par les sommets Q, Q_1, N_1, N aux triangles MQD, DQ_1M_1, M_1N_1A, ANM, construits sur les côtés du second. Il y a donc six quadrilatères articulés, conjugués deux à deux, qui sont indiqués dans le Tableau suivant, leurs sommets homologues étant rangés dans le même ordre :

M	N	P	Q,	M_1	N_1	P_1	Q_1,	A	B	C	D,
M	D	M_1	A,	P	C	P_1	B,	Q	Q_1	N_1	N,
Q	C	Q_1	D,	N	B	N_1	A,	P	P_1	M_1	M.

La dernière ligne verticale contient les quadrilatères des points d'attache des triangles.

Nous emploierons, dans tout ce qui va suivre, la notion des grandeurs géométriques, c'est-à-dire que, étant donnés deux points A et B, nous désignerons par AB la grandeur complexe $\rho e^{i\omega}$, où ρ est la distance des deux points que nous désignerons aussi par $\overline{AB}$ ou gr. AB, et ω l'angle que fait AB, prise dans le sens AB, avec un *axe* fixe du plan. D'après cela, si un triangle invariable ABC se meut dans son plan, les trois côtés seront représentés par les expressions

$$AB = ae^{i\omega}, \quad BC = a'e^{i\omega}, \quad CA = a''e^{i\omega},$$

où ω seul est variable et où a, a', a'' sont des constantes complexes liées par l'équation

$$a + a' + a'' = 0;$$

si l'on prend pour a la longueur de AB, ω sera l'angle de AB et de l'axe fixe, et l'on pourra adopter les expressions

$$(2)\qquad AB = ae^{i\omega},\quad AC = aa'e^{i\omega},\quad CB = a(1-a')e^{i\omega}.$$

On aura alors

$$(3)\qquad \frac{AC}{AB} = a' = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}e^{i\widehat{CAB}}.$$

L'aire du triangle ABC sera donnée par la formule

$$(4)\qquad \text{aire } ABC = \frac{i}{2}a^2(\alpha' - a'),$$

α' désignant la quantité conjuguée de a'. Quand a' sera réel, les trois points seront en ligne droite. Pour abréger l'écriture, nous désignerons les exponentielles telles que $e^{i\omega}$ par des lettres t, u, θ et nous dirons que $e^{i\omega}$ *est l'exponentielle de* ω. Je n'insiste pas sur toutes ces remarques très-connues; on sait que la considération de ces grandeurs géométriques constitue la méthode des équipollences de M. Bellavitis.

Ces remarques préliminaires étant faites, désignons par a, b, c, d les côtés du quadrilatère articulé MNPQ, par t, t', t'', t''' les exponentielles des angles qu'ils forment avec l'axe choisi. Nous aurons les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''} + \dfrac{d}{t'''} = 0. \end{cases}$$

Désignons de même par a_1, b_1, c_1, d_1 les côtés homologues du quadrilatère $M_1N_1P_1Q_1$ et par u, u', u'', u''' les exponentielles des angles qu'ils forment avec l'axe. Nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1u + b_1u' + c_1u'' + d_1u''' = 0, \\ \dfrac{a_1}{u} + \dfrac{b_1}{u'} + \dfrac{c_1}{u''} + \dfrac{d_1}{u'''} = 0. \end{cases}$$

Le côté MN étant représenté par at, on aura de même, en désignant par a' une constante complexe,

$$MA = aa't,\quad AN = a(1-a')t.$$

En étendant ces notations, nous poserons

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{ll} MA = aa't, & NB = bb't', \\ AN = a(1-a')t, & BP = b(1-b')t', \\ M_1A = a_1a'_1u, & N_1B = b_1b'_1u', \\ AN_1 = a_1(1-a'_1)u, & BP_1 = b_1(1-b'_1)u', \\ PC = cc't'', & DQ = dd't''', \\ CQ = c(1-c')t'', & DM = d(1-d')t''', \\ P_1C = c_1c'_1u'', & Q_1D = d_1d'_1u''', \\ CQ_1 = c_1(1-c'_1)u'', & DM_1 = d_1(1-d'_1)u'''. \end{array}\right.$$

Il nous reste à exprimer toutes les liaisons de la figure. Pour cela, il suffira évidemment d'écrire que le quadrilatère ABCD formé par les sommets libres des triangles liés à MNPQ est identique au quadrilatère analogue formé avec les sommets libres des triangles liés à $M_1N_1P_1Q_1$, ce qui donne les quatre équations

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l} a(1-a')t + bb't' = a_1(1-a'_1)u + b_1b'_1u' = AB, \\ b(1-b')t' + cc't'' = b_1(1-b'_1)u' + c_1c'_1u'' = BC, \\ c(1-c')t'' + dd't''' = c_1(1-c'_1)u'' + d_1d'_1u''' = CD, \\ d(1-d')t''' + aa't = d_1(1-d'_1)u''' + a_1a'_1u = DA, \end{array}\right.$$

auxquelles il faudra joindre celles qu'on obtient en remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées. $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{u}$ sont les conjuguées de t, u; si nous désignons par α', β', ... les conjuguées de a', b', ..., nous devrons avoir

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a(1-\alpha')}{t} + \dfrac{b\beta'}{t'} = \dfrac{a_1(1-\alpha'_1)}{u} + \dfrac{b_1\beta'_1}{u'}, \\ \dfrac{b(1-\beta')}{t'} + \dfrac{c\gamma'}{t''} = \dfrac{b_1(1-\beta'_1)}{u'} + \dfrac{c_1\gamma'_1}{u''}, \\ \dfrac{c(1-\gamma')}{t''} + \dfrac{d\delta'}{t'''} = \dfrac{c_1(1-\gamma'_1)}{u''} + \dfrac{d_1\delta'_1}{u'''}, \\ \dfrac{d(1-\delta')}{t'''} + \dfrac{a\alpha'}{t} = \dfrac{d_1(1-\delta'_1)}{u'''} + \dfrac{a_1\alpha'_1}{u}. \end{array}\right.$$

En tenant compte des relations (5) et (6), les équations (8) et (9) (dont la somme est nulle) se réduisent à six relations distinctes. On a donc en tout à satisfaire à dix équations et l'on dispose seulement de sept inconnues $\frac{t'}{t}, \ldots, \frac{u}{t}, \ldots$, dont l'une même devra rester arbitraire. Il faudra donc que quatre des équations soient la conséquence des six autres. Telle est la question d'Analyse à laquelle le problème se trouve ramené.

Les équations (5) et (6) expriment que les sommes des projections sur une droite quelconque des côtés des quadrilatères MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$ sont nulles; en d'autres termes, elles sont la traduction analytique des équations

$$MN + NP + PQ + QM = 0,$$
$$M_1N_1 + N_1P_1 + P_1Q_1 + Q_1M_1 = 0.$$

Il est aisé de reconnaître que les autres équations (8), (9) se rattachent de la même manière aux quatre autres quadrilatères du système articulé. Ainsi, la première des équations (8) jointe à sa conjuguée exprime l'identité

$$AN + NB + BN_1 + N_1A = 0,$$

qui est évidente sur la *fig.* 1.

Pour abréger, nous désignerons par les lettres T et U respectivement les quadrilatères MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$, et nous appellerons aussi cubique T et cubique U les deux cubiques associées à ces quadrilatères, et qui sont représentées par les équations (5) et (6), où l'on regarde les variables t, t', t'', t''' et u, u', u'', u''' comme les coordonnées d'un point de l'espace. Je vais d'abord énoncer quelques lemmes simples sur la cubique liée à un quadrilatère.

I.

Dans le travail auquel j'ai déjà fait allusion [1], j'ai montré que la théorie du quadrilatère articulé, étant tout entière contenue dans les deux équations

$$(10)\qquad \begin{cases} at + bt' + ct'' + dt''' = 0, \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t'} + \dfrac{c}{t''} + \dfrac{d}{t'''} = 0. \end{cases}$$

[1] Voir *Bulletin*, p. 109 de ce tome.

est équivalente à celle de la cubique plane représentée par ces équations. Cette cubique est indécomposable, sauf dans le cas particulier où deux des côtés a, b, c, d sont égaux aux deux autres. Si l'on élimine t''' entre les équations précédentes, on aura

$$(11)\quad ab\left(\frac{t}{t'}+\frac{t'}{t}\right)+ac\left(\frac{t}{t''}+\frac{t''}{t}\right)+bc\left(\frac{t'}{t''}+\frac{t''}{t'}\right)+a^2+b^2+c^2-d^2=0,$$

et il résulte de là cette première conséquence :

Tant que deux côtés du quadrilatère ne seront pas égaux aux deux autres, il ne pourra exister aucune relation d'un degré inférieur au troisième entre trois des quantités t, t', t'', t''', et, si l'on a trouvé une telle relation, par exemple entre t, t', t'', elle devra être identique à l'équation (11).

Cette proposition ne subsiste plus quand la cubique est décomposable. Supposons, par exemple, que l'on ait $a=b$, $c=d$. L'équation (11) peut s'écrire

$$a(t+t')^2t''+c(t+t')tt'+ct''^2(t+t')=0,$$

et elle se décompose, le facteur $t+t'$ étant mis en évidence. Ce facteur ne sera nul que si le quadrilatère prend ce mouvement particulier dans lequel les deux côtés égaux a et b sont parallèles et de sens contraires. Si donc ces côtés sont opposés, le quadrilatère sera un parallélogramme. S'ils sont adjacents ils coïncideront, ainsi que les côtés c et d, et l'on n'aura plus un véritable quadrilatère. En laissant de côté le facteur $t+t'$, on obtient l'équation

$$(12)\qquad a(t+t')t''+ctt'+ct''^2=0,$$

équivalente à la suivante

$$(13)\qquad tt'=t''t''',$$

qui correspond au mouvement dans lequel le quadrilatère affecte la forme, soit d'un contre-parallélogramme si a et b sont deux côtés opposés, soit d'un quadrilatère bi-isoscèle si a et b sont adjacents. Il y a alors une infinité de relations du troisième degré entre t, t', t''. Pour les obtenir, il suffira évidemment de multiplier le premier membre de l'équation (12) par un polynôme quelconque du premier degré. Il est aisé de reconnaître que, parmi toutes ces relations du troisième degré, il y en a une seule de la forme

$$A\left(\frac{t}{t'}+\frac{t'}{t}\right)+B\left(\frac{t}{t''}+\frac{t''}{t}\right)+C\left(\frac{t'}{t''}+\frac{t''}{t'}\right)+D=0:$$

c'est la relation (12). Il y en a aussi une seule de la forme

$$A\left(\frac{t}{t'}-\frac{t'}{t}\right)+B\left(\frac{t}{t''}-\frac{t''}{t}\right)+C\left(\frac{t'}{t''}-\frac{t''}{t'}\right)+D=0:$$

c'est celle qu'on obtient en multipliant par $t-t'$ le premier membre de l'équation (12) et qui est

$$a\left(\frac{t}{t'}-\frac{t'}{t}\right)+c\left(\frac{t''}{t'}-\frac{t'}{t''}\right)+c\left(\frac{t}{t''}-\frac{t''}{t}\right)=0.$$

Il suffit évidemment d'énoncer ces propositions, dont la vérification est immédiate.

On peut ajouter les remarques suivantes : si, entre des imaginaires exponentielles variables de module 1 ou, si l'on veut, des exponentielles $e^{i\omega}$ d'angles, que nous désignons par t, u, u', u'', on a une relation linéaire de la forme

$$u = lt + l't' + l''t'' + \ldots,$$

cette relation doit se réduire à l'une des formes

$$u = lt, \quad u = l't', \quad \ldots.$$

En effet, en remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées, on déduit de la relation précédente

$$\frac{1}{u}=\frac{\lambda}{t}+\frac{\lambda'}{t'}+\frac{\lambda''}{t''}+\ldots,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$1 = l\lambda + l'\lambda' + \ldots + l\lambda'\frac{t}{t'} + l'\lambda\frac{t'}{t} + \ldots,$$

équation qui ne peut être identique, t, t', t'' étant quelconques, que si l'on a

$$l\lambda' = 0, \quad l'\lambda = 0, \quad \ldots,$$

ce qui exige que toutes les quantités l moins une soient nulles.

Plus généralement, si t, t', t'', t''' *désignent les exponentielles des angles d'un quadrilatère articulé, c'est-à-dire sont liées par les relations* (5), *toute relation de la forme*

$$u = lt + l't' + l''t'' + l'''t''',$$

où u *est une imaginaire de module* 1, *se ramène à l'une des formes*

$$u = lt, \quad u = l't', \quad u = l''t'', \quad u = l'''t'''.$$

Commençons par démontrer cette proposition pour le quadrilatère à cubique indécomposable. Il suffira de considérer la relation

$$(14) \qquad u = lt + l't' + l''t'',$$

puisqu'on peut toujours éliminer t''' au moyen de la première équation (5).

En prenant l'équation conjuguée de l'équation (14), on aura

$$\frac{1}{u} = \frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda'}{t'} + \frac{\lambda''}{t''},$$

et, en multipliant membre à membre pour éliminer u, on obtient la relation

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 = l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + l\lambda'\frac{t}{t'} + l'\lambda\frac{t'}{t} + l\lambda''\frac{t}{t''} \\ + l''\lambda\frac{t''}{t} + l'\lambda''\frac{t'}{t''} + l''\lambda'\frac{t''}{t'}. \end{aligned} \right.$$

Si cette relation est identique, il faut que deux des quantités l, l', l'' soient nulles, et l'on a une des trois formes

$$u = lt, \quad u = l't', \quad u = l''t'';$$

si elle n'a pas lieu identiquement, elle doit être identique à l'équation (11), ce qui donne les relations

$$\frac{l\lambda'}{ab} = \frac{l'\lambda}{ab} = \frac{l\lambda''}{ac} = \frac{l''\lambda}{ac} = \frac{l'\lambda''}{bc} = \frac{l''\lambda'}{bc},$$

et, par conséquent,

$$\frac{l}{a} = \frac{l''}{c} = \frac{l'}{b} = h$$

et

$$u = h(at + bt' + ct'') = -hdt'''.$$

La proposition est donc démontrée pour le quadrilatère général.

Si le quadrilatère est un parallélogramme, elle est encore vraie, car alors on a, par exemple,

$$t'' = -t,$$

et par suite

$$u = (l - l'')t + l't';$$

t et t' étant indépendantes, il faut que cette relation se ramène à l'une des formes

$$u = lt, \quad u = l't'.$$

Enfin, si le quadrilatère est tel que l'on ait $a = b, c = d$, et que t, t', t'' vérifient l'équation de la conique (12), il faudra que l'équation (15) soit identique à celle de la conique (12) multipliée par un facteur quelconque du premier degré en t, t', t'' :

$$mt + nt' + pt''.$$

On verra facilement que p est nul, et il restera les équations

$$l\lambda' = an, \quad l\lambda'' = cn, \quad l'\lambda'' = cm,$$
$$l'\lambda = am, \quad l''\lambda = cm, \quad l''\lambda' = cn,$$

qui donnent

$$\frac{l}{a} = \frac{l''}{c} = \frac{l'}{a} = h,$$

et par suite

$$u = h(at + at' + ct'') = -hct'''.$$

Donc la proposition est établie dans tous les cas.

Je terminerai ces remarques par la proposition suivante :

Étant donné un quadrilatère articulé dont les côtés ont pour exponentielles t, t', t'', t''', si l'on a trouvé par un moyen quelconque une relation linéaire non identique de la forme

$$at + bt' + ct'' = 0,$$

le quadrilatère est un parallélogramme.

En effet, c'est seulement dans le cas du parallélogramme qu'il existe, en dehors de la première des équations (5), une relation linéaire entre les variables t, t', t'', t'''.

II.

Nous commencerons l'étude du problème proposé en traitant complétement le cas où l'un des six quadrilatères conjugués est un parallélogramme. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$a = c, \quad b = d,$$
$$t + t'' = 0, \quad t' + t''' = 0.$$

On aura alors à satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
a(1 - a')t + bb't' &= a_1(1 - a'_1)u + b_1 b'_1 u',\\
b(1 - b')t' - ac't &= b_1(1 - b'_1)u' + c_1 c'_1 u'',\\
-a(1 - c')t - bd't' &= c_1(1 - c'_1)u'' + d_1 d'_1 u''',\\
-b(1 - d')t' + aa't &= d_1(1 - d'_1)u''' + a_1 a'_1 u.
\end{aligned}$$

Je vais d'abord démontrer que le quadrilatère U est toujours, comme le quadrilatère T, un parallélogramme.

En effet, si des deux premières équations on peut tirer t, t', ces quantités seront de la forme

$$t \text{ ou } t' = lu + l'u' + l''u'',$$

et, par conséquent, leurs expressions devront contenir un seul terme.

Supposons, par exemple, que l'on ait $t = lu$, $t' = lu'''$. Ces valeurs devant satisfaire à la première équation, on aura, en les substituant, une relation entre u, u', u''' qui ne sera pas identique, puisque le coefficient de u''' ne sera pas nul. Donc, d'après un des lemmes établis précédemment, le quadrilatère sera un parallélogramme. Le raisonnement peut se faire de même pour tous les systèmes possibles de valeurs de t et de t'. Donc, dans ce cas, la proposition est établie.

Si des deux premières équations on ne peut pas tirer t et t', leur déterminant étant nul, on pourra les éliminer et il restera une relation entre u, u', u''. Donc encore le quadrilatère U est un parallélogramme.

Faisant

$$a_1 = c_1,\quad b_1 = d_1,\quad u'' = -u,\quad u''' = -u',$$

nous aurons à satisfaire aux équations

$$(16)\qquad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = \quad a_1(1-a'_1)u + b_1 b'_1 u', \\ b(1-b')t' - ac't = \quad b_1(1-b'_1)u' - a_1 c'_1 u, \\ -a(1-c')t - bd't' = -a_1(1-c'_1)u - b_1 d'_1 u', \\ -b(1-d')t' + aa't = -b_1(1-d'_1)u' + a_1 a'_1 u, \end{cases}$$

t, t', u, u' étant d'ailleurs des exponentielles absolument indépendantes.

Les équations précédentes peuvent être satisfaites de deux manières différentes. Supposons d'abord que de deux quelconques d'entre elles, on ne puisse pas tirer t, t'. Alors elles devront se réduire à une seule, et, en exprimant que les coefficients des variables sont proportionnels, on obtiendra sans peine les relations

$$(a)\qquad \begin{cases} a'_1 = a',\quad b'_1 = b',\quad c'_1 = c',\quad d'_1 = d', \\ b' = \dfrac{1-a'}{1-a'-c'},\quad d' = \dfrac{1-c'}{1-a'-c'}, \end{cases}$$

qui donnent une première solution; u, u' seront définis en fonction de t, t' par la première des relations (16) jointe à sa conjuguée. En posant

$$m = \frac{1}{1-a'-c'},\quad \mu = \frac{1}{1-\alpha'-\gamma'},$$

ces relations prennent la forme

$$(a')\qquad \begin{cases} at + mbt' = a_1 u + b_1 m u', \\ \dfrac{a}{t} + \dfrac{\mu b}{t'} = \dfrac{a_1}{u} + \dfrac{b_1 \mu}{u'}. \end{cases}$$

On voit qu'à un système de valeurs t, t' correspondent deux systèmes de valeurs pour u, u'.

L'un des parallélogrammes et ses quatre triangles sont dessinés dans la *fig.* 2.

La construction géométrique n'offre aucune difficulté. En effet, on a ici

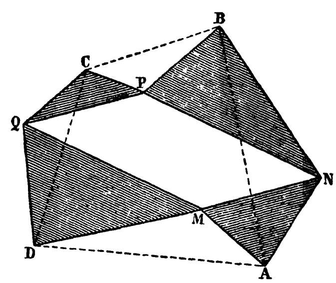
$$\mathrm{NB} = bb't', \qquad \mathrm{AN} = a(1-a')t,$$
$$\mathrm{BP} = b(1-b')t', \quad \mathrm{PC} = ac't,$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}.$$

Cette équation exprime que les triangles BPC, BNA sont directement semblables. On voit donc que l'on peut construire très-aisé-

Fig. 2.



ment la figure en commençant par le quadrilatère ABCD. Les divers triangles CPB, ANB, AMD, DQC sont directement semblables, les sommets homologues étant rangés dans le même ordre dans notre manière de les désigner. Cette première solution est celle du cas V de M. Kempe (page 146 des *Proceedings*).

Revenons aux équations (16) et supposons maintenant que, de deux d'entre elles, on puisse tirer les valeurs de t, t'; ces valeurs seront nécessairement de la forme suivante,

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}u,$$

et elles devront, comme nous l'avons vu (Lemme I), ne contenir qu'un terme. Il faudra donc que l'on ait

$$u = ht, \qquad u' = h't',$$

ou

$$u' = h't, \qquad u = ht'.$$

La première hypothèse conduirait à la solution identique

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad u = t, \quad u' = t'.$$

Examinons la seconde. Nous aurons, en exprimant que les quatre équations (16) sont vérifiées,

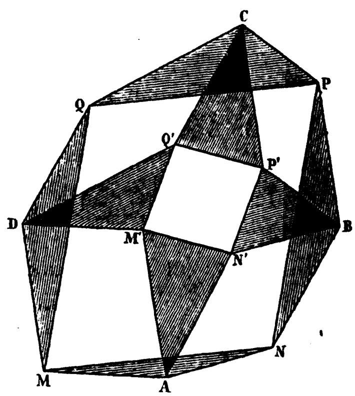
$$\begin{aligned} a(1-a') &= b_1 b'_1 h', & b(1-b') &= -a_1 c'_1 h, \\ bb' &= a_1(1-a'_1)h, & -ac' &= b_1(1-b'_1)h', \\ a(1-c') &= b_1 d'_1 h', & b(1-d') &= -a_1 a'_1 h, \\ bd' &= a_1(1-c'_1)h, & aa' &= -b_1(1-d'_1)h', \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} a'_1 &= \frac{1-d'}{1-b'-d'}, & b'_1 &= \frac{1-a'}{1-a'-c'}, \\ c'_1 &= \frac{1-b'}{1-b'-d'}, & d'_1 &= \frac{1-c'}{1-a'-c'}, \\ b_1 &= \frac{a}{h'}(1-a'-c'), & a_1 &= \frac{b}{h}(b'+d'-1). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, dans cette deuxième solution, on pourra prendre a', b', c', d

Fig. 3.



arbitrairement, c'est-à-dire construire des triangles de forme quelconque sur les côtés du parallélogramme MNPQ; h et h' seront alors définis par la condition que les valeurs de b_1, a_1 soient réelles et positives. Si l'on a, par exemple,

$$1-a'-c' = \rho e^{i\alpha},$$

h', qui est de module égal à 1, sera $e^{i\alpha}$, et l'on aura $b_1 = a\rho$. Remarquons que les six quadrilatères sont ici des parallélogrammes.

Les équations précédentes donnent, par exemple, $AN_1 + BN = 0$, ce qui exprime que le quadrilatère AN_1BN est un parallélogramme.

Le système entier est dessiné dans la *fig.* 3. Cette solution coïncide avec le cas VI de M. Kempe.

Dans la suite, nous pourrons donc nous dispenser d'étudier tous les cas où un seul des quadrilatères conjugués serait un parallélogramme.

III.

Nous avons maintenant à examiner le cas général, et nous allons chercher les conditions qui sont nécessaires pour que les équations (5), (6), (8), (9) soient satisfaites par une infinité de systèmes des valeurs des t et des u.

Remarquons d'abord que ces équations peuvent être considérées, toutes les fois que le mouvement de la figure est possible, comme établissant une correspondance entre le point (t, t', t'', t''') de la cubique T liée au quadrilatère T et le point (u, u', u'', u''') de la cubique U liée au quadrilatère U. Je vais d'abord examiner tous les cas où cette correspondance est uniforme, c'est-à-dire où à un point de chacune des courbes correspond un seul point de l'autre. Je montrerai ensuite que tous les autres cas peuvent être ramenés à celui-là.

Considérons la cubique T représentée par les équations (5) et coupons-la par les coniques variables C définies par les équations

$$tt' = \lambda t''t''', \quad at + bt' + ct'' + dt''' = 0;$$

ces coniques rencontrent la cubique en quatre points fixes

$$(t = 0, \quad t'' = 0), \quad (t = 0, \quad t''' = 0),$$
$$(t' = 0, \quad t'' = 0), \quad (t' = 0, \quad t''' = 0),$$

et en deux points variables.

De même, si l'on coupe la cubique U par les coniques D représentées par les équations

$$uu' = \mu u''u''', \quad a_1 u + b_1 u' + c_1 u'' + d_1 u''' = 0,$$

les coniques D couperont la cubique U seulement en deux points variables. D'après cela, si à la conique C coupant la cubique T en un point m on fait correspondre la conique D coupant U au point n correspondant à m, on voit qu'à chaque conique C correspondront au plus deux coniques D, et réciproquement. On aura donc entre λ et μ une relation de la forme

$$(17)\quad (A\lambda^2 + B\lambda + C)\mu^2 + (B'\lambda^2 + D\lambda + E)\mu + C'\lambda^2 + E'\lambda + F = 0.$$

Cela posé, je remarque que, en vertu des relations (9), au point $(t = 0, t' = 0)$ de la cubique T correspond le point de U pour lequel on a

$$u'u'' = 0, \quad uu''' = 0,$$

si l'on prend $u = 0$ ou $u' = 0$, la première des équations (8) donne $u' = 0$ ou $u = 0$. On ne peut donc avoir que les deux points

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad \text{ou} \quad u'' = 0, \quad u''' = 0.$$

On verra de même que les deux points précédents sont les seuls qui puissent correspondre au point $(t'' = 0, t''' = 0)$ de la cubique T. Comme les quatre points considérés $(t = 0, t' = 0)$, $(u = 0, u' = 0)$, ... ne sont jamais des points doubles des cubiques sur lesquelles ils sont situés, à chacun d'eux correspond un seul point. On ne peut donc avoir que les deux modes de correspondance

$$(18)\quad \begin{cases} (t = 0,\ t' = 0), & (u = 0,\ u' = 0), \\ (t'' = 0,\ t''' = 0), & (u'' = 0,\ u''' = 0), \end{cases}$$

ou

$$(19)\quad \begin{cases} (t = 0,\ t' = 0), & (u'' = 0,\ u''' = 0), \\ (t'' = 0,\ t''' = 0), & (u = 0,\ u' = 0). \end{cases}$$

Dans le premier cas, on voit que toutes les fois que λ deviendra nul, ce qui aura lieu seulement pour $(t = 0, t' = 0)$, il en sera de même de μ, et réciproquement. De même, λ et μ deviendront infinis en même temps.

La relation (17) doit donc donner : 1° deux valeurs nulles de μ pour $\lambda = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$E = 0, \quad F = 0;$$

2° deux valeurs nulles de λ pour $\mu = 0$, ce qui donne

$$E' = 0;$$

3° deux valeurs infinies de μ pour la valeur ∞ de λ, ce qui donne

$$A = 0, \quad B' = 0;$$

4° deux valeurs infinies de λ pour la valeur ∞ de μ, ce qui donne enfin

$$B = 0.$$

Elle prend donc la forme

$$C\mu^2 + D\lambda\mu + C'\lambda^2 = 0$$

ou plus simplement

$$\mu = h\lambda.$$

Le même raisonnement, appliqué au cas où la correspondance est établie par les formules (19), nous donnera

$$\mu = \frac{h}{\lambda}.$$

On aura donc la formule unique

$$\mu = h\lambda^{\varepsilon},$$

ε désignant ± 1, ou

$$(20) \qquad \frac{tt'}{t''t'''} = h_1 \left(\frac{uu'}{u''u'''}\right)^{\varepsilon_1}.$$

On établirait aisément que h_1 doit être égal à $+1$; mais cela résultera aussi de la suite du raisonnement.

Par une méthode identique à la précédente on établira de même les équations

$$(21) \qquad \frac{tt''}{t't'''} = h_2 \left(\frac{uu''}{u'u'''}\right)^{\varepsilon_2}, \quad \frac{tt'''}{t't''} = h_3 \left(\frac{uu'''}{u'u''}\right)^{\varepsilon_3}.$$

Nous allons d'abord montrer que ces équations, établies en supposant les cubiques T et U indécomposables, subsistent dans tous les cas.

Supposons, par exemple, que l'on ait $a = b$, $c = d$. La cubique T se décomposera en une droite et en la conique T', dont les équations sont

$$tt' = t''t''', \quad at + at' + ct'' + ct''' = 0.$$

Nous pouvons rejeter la droite, puisqu'à ses différents points correspond le mouvement dans lequel le quadrilatère demeure un parallélogramme, et ce cas a été déjà examiné; t, t', t'', t''' vérifieront donc les équations précédentes. Je dis que la cubique U se décompose aussi. En effet, si elle ne se décomposait pas, u, u', u'', u''' pourraient prendre toutes les valeurs qui correspondent aux points de cette cubique, et, en particulier, au point ($u = 0, u' = 0$) devrait correspondre un point de la conique précédente T'. Or cela n'a pas lieu, car nous avons vu qu'au point ($u = 0$, $u' = 0$) ne peut correspondre que l'un des deux points ($t = 0, t' = 0$), ($t'' = 0, t''' = 0$), et aucun de ces points ne se trouve sur la conique T'. Ce raisonnement, *qui s'applique du reste au cas où la correspondance cesserait d'être uniforme,* montre donc que la cubique U se décompose aussi en une droite et en une conique. La droite peut être rejetée, puisque le quadrilatère U ne peut être un parallélogramme. Il reste donc à prendre la conique, qui doit être représentée par une des trois équations

$$uu' = u''u''', \quad uu'' = u'u''', \quad uu''' = u'u''.$$

Les deux dernières doivent être rejetées, car les coniques correspondantes passeraient par le point ($u = 0$, $u' = 0$), ce que nous venons de démontrer être impossible. Il reste donc la conique

$$uu' = u''u'''.$$

On voit que l'on aura encore l'équation (20)

$$\frac{tt'}{t''t'''} = h_1 \left(\frac{uu'}{u''u'''}\right)^{\varepsilon_1},$$

et il est aisé de reconnaître, en appliquant à ce cas particulier la méthode générale, que les équations (21) subsistent encore ici.

En résumé, *les équations* (20), (21) *ont lieu dans tous les cas de correspondance uniforme.*

Résolvons-les, en faisant successivement toutes les hypothèses sur $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Nous aurons les solutions suivantes :

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \rho\theta u^{\varepsilon}, \\ t' &= \rho'\theta u'^{\varepsilon}, \\ t'' &= \rho''\theta u''^{\varepsilon}, \\ t''' &= \rho'''\theta u'''^{\varepsilon}, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \theta\rho u'''^{\varepsilon}, \\ t' &= \theta\rho' u''^{\varepsilon}, \\ t'' &= \theta\rho'' u'^{\varepsilon}, \\ t''' &= \theta\rho''' u^{\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{aligned} t &= \theta\rho u''^{\epsilon},\\ t' &= \theta\rho' u'''^{\epsilon},\\ t'' &= \theta\rho'' u^{\epsilon},\\ t''' &= \theta\rho''' u'^{\epsilon}, \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{IV})\left\{\begin{aligned} t &= \theta\rho u'^{\epsilon},\\ t' &= \theta\rho' u^{\epsilon},\\ t'' &= \theta\rho'' u'''^{\epsilon},\\ t''' &= \theta\rho''' u''^{\epsilon}, \end{aligned}\right.$$

où θ est une variable auxiliaire, ρ, ρ', ρ'', ρ''' des constantes inconnues; ϵ désigne toujours ± 1. Le système IV se déduit du système II par une permutation circulaire. Il reste donc seulement trois systèmes de solutions à examiner, chacun se décomposant en deux. J'indique d'abord des propriétés communes de toutes les solutions.

Considérons, par exemple, le premier système de solutions. De l'équation

$$at + bt' + ct'' + dt''' = 0$$

on déduit

$$a\rho u^{\epsilon} + b\rho' u'^{\epsilon} + c\rho'' u''^{\epsilon} + d\rho''' u'''^{\epsilon} = 0.$$

Or, entre les quantités u^{ϵ} il ne peut exister d'autre relation linéaire que

$$a_1 u^{\epsilon} + b_1 u'^{\epsilon} + c_1 u''^{\epsilon} + d_1 u'''^{\epsilon} = 0.$$

On a donc

$$\frac{a_1}{a\rho} = \frac{b_1}{b\rho'} = \frac{c_1}{c\rho''} = \frac{d_1}{d\rho'''}.$$

En employant de même l'équation

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''} + \frac{d}{t'''} = 0,$$

on aura

$$\frac{a_1}{a}\rho = \frac{b_1}{b}\rho' = \frac{c_1}{c}\rho'' = \frac{d_1}{d}\rho''',$$

et, par conséquent, on doit avoir

$$\rho = \rho' = \rho'' = \rho''', \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = k,$$

k étant un nombre positif.

La présence de l'arbitraire θ dans les formules permet de remplacer toutes les quantités ρ par 1, et l'on a les formules définitives

$$(\mathrm{I}) \qquad u = \theta t^{\epsilon}, \quad u' = \theta t'^{\epsilon}, \quad u'' = \theta t''^{\epsilon}, \quad u''' = \theta t'''^{\epsilon},$$

θ étant évidemment de module égal à 1, comme quotient de deux quantités de module 1. On a, de plus,

$$(\mathrm{I}) \qquad a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc, \quad d_1 = kd.$$

En d'autres termes, *les deux quadrilatères correspondants sont directement ou inversement semblables, suivant que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.*

Les mêmes conclusions s'appliquent aux deux autres systèmes, pour lesquels on aura

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} u = \theta t'''_1, & u' = \theta t''_1, & u'' = \theta t'_1, & u''' = \theta t_1, \\ a_1 = kd, & b_1 = kc, & c_1 = kb, & d_1 = ka, \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} u = \theta t''_1, & u' = \theta t'''_1, & u'' = \theta t_1, & u''' = \theta t'_1, \\ a_1 = kc, & b_1 = kd, & c_1 = ka, & d_1 = kb. \end{cases}$$

Nous allons examiner successivement les diverses solutions.

IV.

Je commence par le système I et je suppose d'abord $\varepsilon = 1$. On a alors

$$u = \theta t, \quad u' = \theta t', \quad u'' = \theta t'', \quad u''' = \theta t''',$$
$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc, \quad d_1 = kd.$$

Les équations à vérifier sont

$$(22) \qquad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta[a(1-a'_1)t + bb'_1t'], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta[b(1-b'_1)t' + cc'_1t''], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta[c(1-c'_1)t'' + dd'_1t'''], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta[d(1-d'_1)t''' + aa'_1t]. \end{cases}$$

Si entre les deux premières on élimine $k\theta$, on est conduit à la relation

$$(23) \qquad \begin{cases} abtt'[(1-a')(1-b'_1) - (1-a'_1)(1-b')] \\ \quad + actt''[(1-a')c'_1 - (1-a'_1)c'] \\ \quad + b^2(b'-b'_1)t'^2 + bct't''(b'c'_1 - c'b'_1) = 0. \end{cases}$$

Si la cubique T est indécomposable, cette relation, étant du second degré, devra être une identité. On aura donc

$$b' = b'_1,$$

et par suite

$$a' = a'_1, \quad c' = c'_1.$$

La première des équations (22) donne alors

$$k\theta = 1 \quad \text{ou} \quad k = 1, \quad \theta = 1.$$

C'est une solution identique; les deux quadrilatères coïncident.

La même conclusion subsisterait si la cubique T se décomposait et était remplacée par la conique

$$tt' = t''t''',$$

car alors la relation entre t, t', t'' serait

$$at + at' + ct'' + c\frac{tt'}{t''} = 0,$$

et, comme cette équation ne contient pas de terme en t'^2, la relation (23) doit encore avoir lieu identiquement.

La conclusion est la même si l'on a la conique

$$tt''' = t't'',$$

ce cas se ramenant au précédent par une permutation circulaire.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a

$$tt'' = t't''', \quad a = c, \quad b = d,$$

c'est-à-dire où le quadrilatère T et par conséquent le quadrilatère U sont des contre-parallélogrammes.

La relation entre t, t', t'', t''' est alors

$$att' + bt'^2 + at''t' + btt'' = 0,$$

et, en écrivant qu'elle est identique à la relation (23), on aura

$$(24) \qquad \begin{cases} b^2(1-a')(1-b'_1) - b^2(1-a'_1)(1-b') \\ \quad = a^2(1-a')c'_1 - a^2(1-a'_1)c' \\ \quad = b^2(b'-b'_1) = b^2(b'c'_1 - b'_1c'), \end{cases}$$

d'où résultent d'abord les deux relations, ne contenant ni a ni b,

$$\frac{a'}{1-b'} = \frac{a'_1}{1-b'_1}, \quad \frac{b'}{1-c'} = \frac{b'_1}{1-c'_1},$$

auxquelles on peut joindre, par une permutation circulaire,

$$\frac{c'}{1-d'} = \frac{c'_1}{1-d'_1}, \quad \frac{d'}{1-a'} = \frac{d'_1}{1-a'_1}.$$

Si l'on désigne par m, n, p, r les valeurs communes des rapports égaux, on aura

$$(25) \qquad \begin{cases} a' + mb' = m, & a'_1 + mb'_1 = m, \\ b' + nc' = n, & b'_1 + nc'_1 = n, \\ c' + pd' = p, & c'_1 + pd'_1 = p, \\ d' + ra' = r, & d'_1 + ra'_1 = r; \end{cases}$$

si l'on considérait m, n, p, r comme donnés, ces équations détermineraient a', b', c', d', et, par suite, on aura

$$a' = a'_1, \quad b' = b'_1, \quad c' = c'_1, \quad d' = d'_1,$$

tant que leur déterminant ne sera pas nul. La solution précédente devant être écartée, il faut que les quatre équations (25) se réduisent à trois, ce qui donne les deux conditions

$$mnpr = 1, \quad 1 - m + mn - mnp = 0.$$

On aura

$$b' = \frac{m - a'}{m}, \quad c' = \frac{nm - m + a'}{mn}, \quad d' = r - ra',$$

et de même pour b'_1, c'_1, d'_1, et ces valeurs, portées dans celle des équations (24) qui n'a pas été employée, donneront

$$b^2 = a^2 mp,$$

et par suite

$$a^2 = b^2 nr.$$

En résumé, les équations (25), jointes au groupe

$$(26) \qquad \begin{cases} b^2 = a^2 mp, \\ a^2 = b^2 nr, \quad 1 - m + mn - mnp = 0, \end{cases}$$

suffisent à exprimer que les quatre équations (22) qu'il s'agit de vérifier se réduisent à une seule, la première, par exemple, qui donnera $k\theta$. Il reste à écrire que le module de la valeur de $k\theta$ fournie par cette équation est constant et égal à k. A cet effet, nous associerons à la première équation (22) sa conjuguée

$$\frac{a(1-\alpha')}{t}+\frac{b\beta'}{t'}=\frac{k}{\theta}\left[\frac{a(1-\alpha'_1)}{t}+\frac{b\beta'_1}{t'}\right],$$

et nous multiplierons membre à membre. Nous aurons ainsi

$$a^2(1-a')(1-\alpha')+b^2b'\beta'=k^2a^2(1-a'_1)(1-\alpha'_1)+k^2b^2b'_1\beta'_1$$
$$+ab[k^2(1-a'_1)\beta'_1-(1-a')\beta']\frac{t}{t'}+ab[k^2(1-\alpha'_1)b'_1-(1-\alpha')b']\frac{t'}{t}.$$

Cette équation devant être satisfaite identiquement, nous aurons

$$k^2=\frac{b'(1-\alpha')}{b'_1(1-\alpha'_1)}=\frac{\beta'(1-a')}{\beta'_1(1-a'_1)},$$

$$a^2(1-a')(1-\alpha')+b^2b'\beta'=k^2[a^2(1-a'_1)(1-\alpha'_1)+b^2b'_1\beta'_1].$$

En remplaçant k^2 par sa valeur, on ramène cette dernière équation à la forme

$$[a^2(1-a')(1-\alpha'_1)-b^2b'\beta'_1][b'(1-a'_1)-b'_1(1-a')]=0.$$

Le second facteur, égalé à zéro, conduit encore à la solution identique

$$a'=a'_1,\quad b'=b'_1,\quad c'=c'_1,\quad d'=d'_1,$$

à moins que l'on n'ait

$$a'+b'-1=0.$$

Mais alors le premier est nul, on le reconnaîtra aisément. Il suffit donc de poser

$$a^2(1-a')(1-\alpha'_1)-b^2b'\beta'_1=0,$$

ou, en remplaçant $\frac{b^2}{a^2}$ par mp,

$$\frac{\beta'_1}{1-\alpha'_1}=\frac{d'}{1-c'}.$$

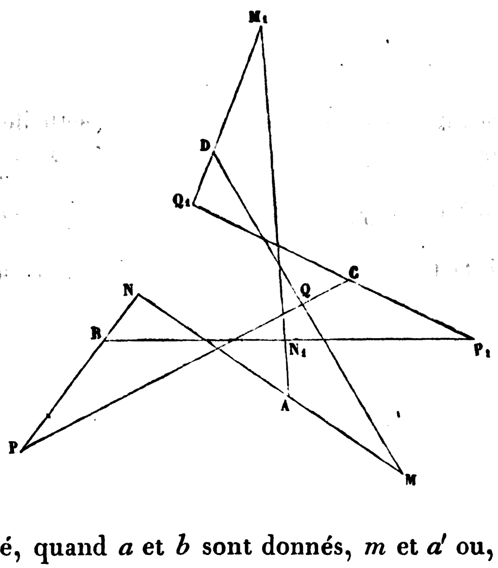
En réunissant tous les éléments de la solution, on a

$$(c)\quad\left\{\begin{array}{ll} b^2 = a^2 mp, & \\ a^2 = b^2 nr, & 1 - m + mn - mnp = 0, \\ a' + mb' = m, & a'_1 + mb'_1 = m, \\ b' + nc' = n, & b'_1 + nc'_1 = n, \\ c' + pd' = p, & c'_1 + pd'_1 = p, \\ d' + ra' = r, & d'_1 + ra'_1 = r, \\ a'_1 = \dfrac{m(pm - 1) + m\alpha'(1 - \pi)}{pm - m + \alpha'(m - \pi)}, & \end{array}\right.$$

$$k^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{pm - \mu + a'(\mu - p)}{\mu - 1}\,\frac{\pi\mu - m + \alpha'(m - \pi)}{m - 1},$$

μ, π désignant les quantités conjuguées de m, p.

Fig. 4.



En résumé, quand a et b sont donnés, m et a' ou, si l'on veut, a', b' peuvent être pris arbitrairement. Toutes les autres quantités sont déterminées.

Les six quadrilatères du système sont tous des contre-parallélogrammes; la *fig.* 4 représente le système articulé dans le cas où les triangles construits sur les côtés se réduisent à des droites. Ce cas est nouveau.

Examinons maintenant la deuxième solution du premier système :

$$u=\frac{\theta}{t}, \quad u'=\frac{\theta}{t'}, \quad u''=\frac{\theta}{t''}, \quad u'''=\frac{\theta}{t'''}.$$

On devra avoir les équations

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} a(1-a')t + bb't' &= k\theta\left[\frac{a(1-a'_1)}{t}+\frac{bb'_1}{t'}\right],\\ b(1-b')t' + cc't'' &= k\theta\left[\frac{b(1-b'_1)}{t'}+\frac{cc'_1}{t''}\right],\\ c(1-c')t'' + dd't''' &= k\theta\left[\frac{c(1-c'_1)}{t''}+\frac{dd'_1}{t'''}\right],\\ d(1-d')t''' + aa't &= k\theta\left[\frac{d(1-d'_1)}{t'''}+\frac{aa'_1}{t}\right].\end{aligned}\right.$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières équations. Nous aurons

$$\begin{aligned} &ab(1-a')(1-b'_1)\frac{t}{t'} + ac(1-a')c'_1\frac{t}{t''} + bcb'c'_1\frac{t'}{t''}\\ &-ab(1-a'_1)(1-b')\frac{t'}{t} - ac(1-a'_1)c'\frac{t''}{t} - bcb'_1c'\frac{t''}{t} + b^2(b'-b'_1)=0.\end{aligned}$$

Supposons d'abord la cubique T indécomposable.

L'équation précédente devra être identique à la relation (11). Les relations d'identification, jointes à celles qu'on en déduit par les permutations circulaires, nous donnent

$$(d)\quad \left\{\begin{array}{ll} c'=a', & c'_1=a'_1,\\ b'=d'=1-a', & b'_1=d'_1=1-a'_1,\\ a'+a'_1-2a'a'_1=0, & \\ a^2+c^2-b^2-d^2=0, & k^2=(2a'-1)(2\alpha'-1).\end{array}\right.$$

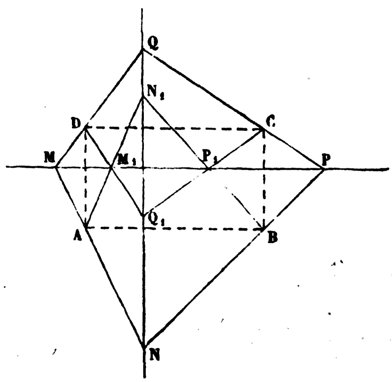
Le quadrilatère T a donc ses diagonales rectangulaires. Les triangles MDQ, PCQ, PBN, MAN sont directement semblables, et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les côtés ont pour expressions

$$\begin{aligned} AB &= (1-a')(at+bt'), & BC &= a'(bt'+ct''),\\ CD &= (1-a')(ct''+dt'''), & DA &= a'(dt'''+at).\end{aligned}$$

On voit que AB, BC sont proportionnels aux diagonales du quadrilatère T et font avec elles un angle constant. L'angle du parallélogramme est donc constant. Les autres quadrilatères conjugués sont tous bi-isoscèles. Le cas où les huit triangles se réduisent à des droites est représenté dans la *fig.* 5.

Cette figure montre clairement qu'à chaque position de l'un des quadrilatères autres que T et U correspondent deux positions de l'autre. Par exemple, au quadrilatère MDM_1A correspondent les

Fig. 5.



deux positions de PCP_1D, symétriques par rapport à la diagonale QN.

Cette solution correspond au cas IV de M. Kempe.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la cubique T indécomposable. Admettons maintenant qu'elle se décompose et soit remplacée par une conique.

Si l'on a $a=b$, $c=d$ et par conséquent

$$tt' = t''t''',$$

la première et la troisième des équations (27), divisées l'une par l'autre, nous donnent

$$\frac{a(1-a')t+bb't'}{a(1-a'_1)t'+bb'_1t'} = \frac{c(1-c')t''+dd't'''}{c(1-c'_1)t'''+dd'_1t''},$$

c'est-à-dire une relation entre $\frac{t}{t'}$, $\frac{t''}{t'''}$. Or, la seule relation existant entre ces variables est

$$\frac{a^2(t+t')^2}{tt'} = \frac{b^2(t''+t''')^2}{t''t'''}.$$

Cette équation ne peut pas être satisfaite par une expression de $\frac{t}{t'}$ telle qu'on la déduirait de la formule précédente. On doit donc avoir

$$\frac{a(1-a')}{bb'_1} = \frac{a(1-a'_1)}{bb'} = \frac{c(1-c')}{dd'_1} = \frac{(1-c'_1)c}{dd'},$$

et alors la première des équations (27) nous donne

$$k\theta = \frac{a(1-a')tt'}{bb'_1};$$

on a donc

$$a(1-a')t = b_1 b'_1 u',$$

ou, d'après les formules (7),

$$\mathrm{AN} + \mathrm{BN}_1 = 0.$$

Le quadrilatère ANBN_1 est donc un parallélogramme, et nous rentrons dans un cas examiné.

Les mêmes conclusions s'appliqueraient au cas où $a = d$, $b = c$, qui se déduit du précédent par une permutation circulaire.

Examinons enfin l'hypothèse $a = c$, $b = d$, pour laquelle on a

$$tt'' = t't''',$$

ou

$$(at' + bt'')t + (at'' + bt')t' = 0. \tag{28}$$

En divisant la première des équations (27) par la seconde et remplaçant t par sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtient l'équation

$$\frac{[bb'(at'+bt'') - a(1-a')(at''+bt')]t'}{(at'+bt'')[b(1-b')t' + cc't'']}$$
$$= \frac{t''[bb'_1(at''+bt') - a(1-a'_1)t'(at'+bt'')]}{(at''+bt')[b(1-b'_1)t'' + cc'_1 t']}.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit le rapport $\frac{t'}{t''}$, on obtient facilement les conditions

$$c' = a', \qquad c'_1 = d'_1 = a',$$
$$b' = d' = 1 - a', \quad b'_1 = d'_1 = d'.$$

La première des équations (27) donne alors

$$k\theta = -\frac{(at + bt')tt'}{at' + bt} = -tt'',$$

d'où résulte

$$k = 1, \quad \theta = -tt'',$$

et par suite

$$u = -t'', \quad u'' = -t, \quad u' = -t''', \quad u''' = -t'.$$

Je n'insiste pas sur cette solution, qui sera retrouvée plus loin sous une forme plus générale.

V.

Examinons maintenant les solutions du système II et d'abord

$$u = \theta t''', \quad u' = \theta t'', \quad u'' = \theta t', \quad u''' = \theta t,$$
$$a_1 = kd, \quad b_1 = kc, \quad c_1 = kb, \quad d_1 = ka;$$

on devra avoir les équations

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(1 - a')t + bb't' = k\theta[d(1 - a'_1)t''' + cb'_1t''], \\ b(1 - b')t' + cc't'' = k\theta[c(1 - b'_1)t'' + bc'_1t'], \\ c(1 - c')t'' + dd't''' = k\theta[b(1 - c'_1)t' + ad'_1t], \\ d(1 - d')t''' + aa't = k\theta[a(1 - d'_1)t + da'_1t''']. \end{array} \right.$$

Divisons la seconde de ces équations par la quatrième ; nous aurons

$$\frac{b(1 - b')t' + cc't''}{d(1 - d')t''' + aa't} = \frac{c(1 - b'_1)t'' + bc'_1t'}{a(1 - d'_1)t + da'_1t'''}.$$

C'est une relation entre $\frac{t'}{t''}$ et $\frac{t'''}{t}$ qui doit être satisfaite identiquement toutes les fois que la cubique est indécomposable. On a donc

$$\frac{1-b'}{c'}=\frac{c'_1}{1-b'_1},\quad \frac{1-d'}{a'}=\frac{a'_1}{1-d'_1},$$

et alors la seconde des équations (29) donne

$$k\theta=\frac{1-b'}{c'_1}.$$

On a, en vertu des formules (7),

$$BP+CP_1=0.$$

L'un des quadrilatères conjugués est encore un parallélogramme et nous pouvons nous dispenser de continuer.

Supposons la cubique décomposable.

Si l'on a $tt'''=t't''$, la méthode précédente s'applique sans modification et conduit aux mêmes conclusions.

Si l'on a

$$a=c,\quad b=d\quad \text{et}\quad tt''=t't''',$$

la première et la deuxième équation (29), divisées membre à membre, donnent, après la substitution des valeurs de t'', t''', l'équation

$$\frac{(at'+bt)[a(1-a')t+bb't']}{b(1-b')(at'+bt)-ac'(at+bt')}$$
$$=\frac{(at+bt')[b(1-a'_1)t+ab'_1t']}{a(1-b'_1)(at+bt')-bc'_1(at'+bt)}.$$

Cette équation ne devient identique que si l'on a

$$1-a'=b',\quad a'_1=a',\quad b'_1=b',\quad c'_1=c'.$$

Alors la première des équations (29) donne $k\theta=-1$, et par suite $k=1$, $\theta=-1$. Les quadrilatères correspondants à la seconde et à la quatrième de ces équations sont des parallélogrammes. Nous pouvons encore nous dispenser de continuer.

Il reste à examiner enfin l'hypothèse

$$tt'=t''t''',\quad a=b,\quad c=d. \tag{30}$$

Je dis que dans ce cas le premier de nos quadrilatères, celui qui correspond à l'équation

$$a(1-a')t+bb't'-a_1(1-a'_1)u-b_1b'_1u'=0,$$

a sa cubique indécomposable.

En effet, les exponentielles des côtés de ce quadrilatère sont proportionnelles à t, t', u, u'. Si donc la cubique de ce quadrilatère était décomposable, on aurait une des trois relations

$$tt'=huu',\quad tu'=hut',\quad tu=hu't',$$

h étant une constante, ou, en remplaçant u, u' par leurs valeurs,

$$tt'=h\theta^2t''t''',\quad tt''=ht't''',\quad tt'''=ht't''.$$

Les deux dernières relations sont incompatibles avec l'équation (30). La première donne θ constant, et alors deux de nos six quadrilatères conjugués deviennent encore des parallélogrammes. On voit donc que l'on peut supposer la cubique de notre premier quadrilatère indécomposable. Mais alors, en lui faisant jouer le rôle du quadrilatère T, on retrouvera ailleurs les solutions que nous pourrions obtenir [1].

Il nous reste, pour terminer l'examen du second système, à étudier le cas où l'on a

$$u=\frac{\theta}{t'''},\quad u'=\frac{\theta}{t''},\quad u''=\frac{\theta}{t'},\quad u'''=\frac{\theta}{t},$$

$$a_1=kd,\quad b_1=kc,\quad c_1=kb,\quad d_1=ka.$$

Il faudra alors satisfaire aux équations

$$(31)\quad \begin{cases} a(1-a')t+bb't'=k\theta\left[\dfrac{d(1-a'_1)}{t'''}+\dfrac{cb'_1}{t''}\right], \\ b(1-b')t'+cc't''=k\theta\left[\dfrac{c(1-b'_1)}{t''}+\dfrac{bc'_1}{t'}\right], \\ c(1-c')t''+dd't'''=k\theta\left[\dfrac{b(1-c'_1)}{t'}+\dfrac{ad'_1}{t}\right], \\ d(1-d')t'''+aa't=k\theta\left[\dfrac{a(1-d'_1)}{t}+\dfrac{da'_1}{t'''}\right]. \end{cases}$$

---

[1] On pourrait craindre, il est vrai, que la correspondance entre ce quadrilatère et son conjugué soit multiple; mais nous démontrerons plus loin (art. VI) que cela n'a jamais lieu toutes les fois que la cubique du quadrilatère est indécomposable.

Éliminons θ entre les deux premières équations et servons-nous de la relation

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t'}+\frac{c}{t''}+\frac{d}{t'''}=0$$

pour éliminer t'''. Nous aurons

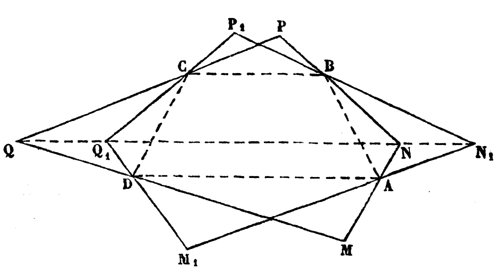
$$ac(1-a')(1-b'_1)\frac{t}{t''}+ab(1-a')c'_1\frac{t}{t'}+bcb'(1-b'_1)\frac{t'}{t''}+b^2b'c'_1$$
$$+[b(1-b')t'+cc't''\,]\left[(1-a'_1)\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{t'}\right)+c\frac{1-a'_1-b'_1}{t''}\right]=0.$$

Dans le cas où la cubique T est indécomposable, l'équation doit être identique à l'équation (11). En écrivant les équations d'identification et en y joignant celles qu'on obtient par la permutation circulaire qui change t en t'', on obtient le système suivant:

$$(e)\qquad\begin{cases} c'=1-b', \quad a'_1=a', \quad c'_1=c', \\ d'=1-a', \quad b'_1=b', \quad d'_1=d', \\ (a^2-d^2)(1-a')+(c^2-b^2)b'=0, \\ k=1, \quad \theta=\dfrac{bt'+ct''}{\dfrac{b}{t'}+\dfrac{c}{t''}}, \end{cases}$$

Il est très-facile de définir géométriquement cette nouvelle solution. Les triangles MAN, MDQ sont directement semblables, et de

Fig. 6.



même les triangles NBP, CPQ. La relation entre les côtés a, b, c, d, retranchée de sa conjuguée, prend la forme

$$a^2(a'-\alpha')+b^2(b'-\beta')+c^2(c'-\gamma')+d^2(d'-\delta')=0,$$

et elle exprime que la somme algébrique des aires des triangles construits sur les quatre côtés est nulle. On a

$$\begin{aligned}
AB &= a(1-a')t + bb't',\\
BC &= (1-b')(bt' + ct''),\\
CD &= cb't'' + d(1-a')t'',\\
DA &= (1-d')(dt''' + at).
\end{aligned}$$

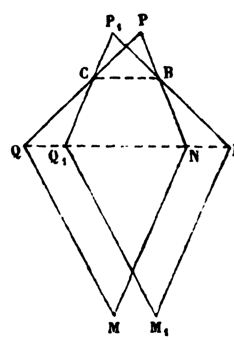
On voit donc que AD et BC sont dans un rapport constant avec la diagonale NQ du quadrilatère MNPQ. Enfin on a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\text{gr. AB} = \text{gr. CD}.$$

Cette solution correspond au cas III de M. Kempe. La *fig.* 6 montre la disposition de l'appareil dans le cas où les triangles se réduisent à des lignes droites. ABCD est alors un trapèze isoscèle, et les deux quadrilatères sont symétriques par rapport à la médiane de ce trapèze.

Le cas très-remarquable où $a = d$ est dessiné dans la *fig.* 7.

Fig. 7.



Alors, si l'on fixe M_1N_1, et que l'on supprime les tiges inutiles MN, MQ, le point N décrit une droite perpendiculaire à M_1N_1, et l'on obtient le premier appareil à ligne droite, composé de cinq tiges, de M. Hart. Mais, si l'on conserve les deux tiges MN, MQ, on réalise, au moyen de sept tiges seulement, le mouvement de la droite MN parallèlement à elle-même. On a vu, dans notre article antérieur, que la seconde disposition de M. Hart permet d'obtenir le même résultat.

Nous avons supposé jusqu'ici la cubique T indécomposable. Considérons le cas où l'on a

$$tt''' = t''t''.$$

Alors, en désignant par θ' la valeur commune des deux membres de l'équation précédente, on aura

$$u = \frac{\theta}{t'''} = \frac{\theta}{\theta'}t, \quad u' = \frac{\theta}{\theta'}t', \quad u'' = \frac{\theta}{\theta'}t'', \quad u''' = \frac{\theta}{\theta'}t''',$$

Ce cas a donc été déjà examiné.

De même, si l'on a

$$tt'' = t't''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \frac{\theta}{\theta'}t', \quad u' = \frac{\theta}{\theta'}t, \quad u'' = \frac{\theta}{\theta'}t''', \quad u''' = \frac{\theta}{\theta'}t''.$$

Ce cas se ramène aussi à un autre qui a déjà été discuté, si l'on effectue la permutation circulaire qui change t en t', u en u'.

Il ne reste plus que le cas où l'on a $tt' = t''t'''$. En répétant le raisonnement de la page 180, nous voyons que nous pouvons nous contenter d'examiner l'hypothèse où la cubique du quadrilatère correspondant à la première équation (31) est décomposable. Or cela n'aura lieu que si l'on a

$$\theta = ht't''',$$

h étant une constante, et, en substituant cette expression de θ, les équations (31) deviendront linéaires en t, t', t'', t'''. Elles devront donc être identiques toutes à l'équation

$$at + at' + ct'' + ct''' = 0,$$

et l'on est ainsi conduit à un cas particulier d'une solution qui sera donnée à l'article suivant.

VI.

Il ne nous reste plus qu'à examiner le troisième système de solutions. Nous prendrons d'abord

$$\begin{array}{llll} u = \theta t'', & u' = \theta t''', & u'' = \theta t, & u''' = \theta t', \\ a_1 = kc, & b_1 = kd, & c_1 = ka, & d_1 = kb. \end{array}$$

Les équations à vérifier prennent ici la forme

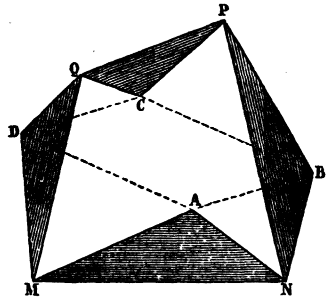
$$(32)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = k\theta[c(1-a'_1)t'' + db'_1t'''], \\ b(1-b')t' + cc't'' = k\theta[d(1-b'_1)t''' + ac'_1t], \\ c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta[a(1-c'_1)t + bd'_1t'], \\ d(1-d')t''' + aa't = k\theta[b(1-d'_1)t' + da'_1t''']. \end{cases}$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières. Nous aurons une équation du second degré

$$\begin{aligned} &[a(1-a')t + bb't'][ac'_1t - (1-b'_1)(at + bt' + ct'')] \\ &\quad = [b(1-b')t' + cc't''][c(1-a'_1)t'' - b'_1(at + bt' + ct'')]. \end{aligned}$$

Cette relation devra être identique si la cubique T est indécom-

Fig. 8.



posable. Les relations qu'on obtient ainsi et celles qu'on en déduit par des permutations sont contenues dans le tableau suivant :

$$(f)\quad \begin{cases} a'_1 = a', \quad b'_1 = b', \quad c'_1 = c', \quad d'_1 = d', \\ c' = a', \quad b' = d' = 1 - a', \\ k = 1, \quad \theta = -1. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} AB &= (1-a')(at + bt'), \quad & BC &= a'(bt' + ct''), \\ CD &= (1-a')(ct'' + dt'''), \quad & DA &= a'(dt''' + at). \end{aligned}$$

Les triangles MDQ, MAN, PBN, PCQ sont directement semblables, et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. L'un des deux systèmes de quatre triangles est dessiné dans la *fig.* 8. La partie non représentée du système articulé est symétrique de la première par rapport au centre du parallélogramme ABCD. Cette solution correspond au cas I de M. Kempe.

On reconnaît aisément que les cas où la cubique est décomposable se ramènent à d'autres déjà examinés.

Si l'on a

$$tt'' = t' t''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \theta t'' = \frac{\theta\theta'}{t}, \quad u' = \frac{\theta\theta'}{t'}, \quad u'' = \frac{\theta\theta'}{t''}, \quad u''' = \frac{\theta\theta'}{t''},$$

et ce système a été étudié.

De même, si l'on a

$$tt' = t'' t''' = \theta',$$

on pourra poser

$$u = \theta t'' = \frac{\theta\theta'}{t'''}, \quad u' = \frac{\theta\theta'}{t''}, \quad u'' = \frac{\theta\theta'}{t'}, \quad u''' = \frac{\theta\theta'}{t},$$

ce qui nous ramène à une hypothèse déjà étudiée; de même enfin, si l'on a

$$tt''' = t' t''.$$

Étudions maintenant la dernière solution possible, celle pour laquelle on a

$$t = \frac{\theta}{u''}, \quad t' = \frac{\theta}{u'''}, \quad t'' = \frac{\theta}{u}, \quad t''' = \frac{\theta}{u'}.$$

Les équations à vérifier sont les suivantes :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&a(1-a')t + bb't' = k\theta\left[\frac{c(1-a'_1)}{t''} + \frac{db'_1}{t'''}\right],\\
&b(1-b')t' + cc't'' = k\theta\left[\frac{d(1-b'_1)}{t'''} + \frac{ac'_1}{t}\right],\\
&c(1-c')t'' + dd't''' = k\theta\left[\frac{a(1-c'_1)}{t} + \frac{bd'_1}{t'}\right],\\
&d(1-d')t''' + aa't = k\theta\left[\frac{b(1-d'_1)}{t'} + \frac{da'_1}{t''}\right].
\end{aligned}\right.$$

Éliminons $k\theta$ entre les deux premières, nous aurons

$$[b(b'_1 - b')t' + cc'b'_1 t'' - a(1 - a')(1 - b'_1)t]\left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t'} + \frac{c}{t''}\right)$$
$$+ a^2(1 - a')c'_1 + abb'c'_1\frac{t'}{t} - bc(1 - b')(1 - a'_1)\frac{t'}{t''} - c^2c'(1 - a'_1) = 0.$$

Si la cubique est indécomposable, cette équation devra être identique à l'équation (11), et les équations d'identification, jointes à celles qu'on en déduit par des permutations, nous donneront

$$(g)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a'_1 = \dfrac{d' - 1}{b' + d' - 1}, & b'_1 = \dfrac{a' - 1}{a' + c' - 1}, \\[2ex] c'_1 = \dfrac{b' - 1}{b' + d' - 1}, & d'_1 = \dfrac{d'}{b' + d' - 1}, \end{array}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1 - a')(1 - b')(1 - c')(1 - d') = a'b'c'd', \\[1ex] a^2(1 - a')(1 - b') - b^2b'(1 - b') + c^2c'b' - \dfrac{b'c'd'}{1 - c'}d^2 = 0. \end{array}\right.$$

Quand ces relations seront satisfaites, les équations (33) se réduiront à une seule. Mais il reste encore à exprimer que la valeur de $k\theta$ fournie par l'une quelconque de ces équations a son module constant.

Multipliant membre à membre la première équation et sa conjuguée, on trouve

$$a^2(1 - a')(1 - \alpha') + b^2b'\beta' - c^2k^2(1 - a'_1)(1 - \alpha'_1) - k^2d^2b'_1\beta'_1$$
$$= k^2cd\left[(1 - a')\beta'_1\frac{t'''}{t''} + b'_1(1 - \alpha'_1)\frac{t''}{t'''}\right]$$
$$- ab(1 - a')\beta'\frac{t}{t'} - ab(1 - \alpha')b'\frac{t'}{t}.$$

Cette relation doit être identique à la suivante :

$$a^2 + b^2 + ab\left(\frac{t}{t'} + \frac{t'}{t}\right) = c^2 + d^2 + cd\left(\frac{t''}{t'''} + \frac{t'''}{t''}\right).$$

Nous sommes ainsi conduit aux équations

$$(g)\qquad \frac{b'}{1 - a'} = \frac{\beta'}{1 - \alpha'}, \quad \frac{\delta'}{1 - \gamma'} = \frac{d'}{1 - c'},$$

$$(35)\qquad \frac{\gamma'}{1-\beta'}=\frac{c'}{1-b'},\quad \frac{\alpha'}{1-\delta'}=\frac{a'}{1-d'},$$

$$(g)\qquad \left\{\begin{aligned} k^2 &= \frac{b'd'}{(1-a')(1-c')}(a'+c'-1)(\alpha'+\gamma'-1)\\ &= \frac{a'c'}{(1-b')(1-d')}(b'+d'-1)(\beta'+\delta'-1).\end{aligned}\right.$$

En tenant compte des équations (35), on reconnaît aisément que la dernière équation (34) est identique à l'équation conjuguée et qu'on peut la mettre sous la forme

$$(36)\qquad a^2(a'-\alpha')+b^2(b'-\beta')+c^2(c'-\gamma')+d^2(d'-\delta')=0,$$

qui exprime que la somme algébrique des aires des triangles construits sur les quatre côtés du quadrilatère est nulle.

Cette dernière solution a été aussi rencontrée par M. Kempe et étudiée complétement à divers points de vue; les appareils les plus intéressants auxquels elle conduit sont précisément ceux dont nous avons fait, après M. Hart, la théorie géométrique (p. 152 de ce Volume).

Nous ne reviendrons pas sur ce sujet, mais nous dirons quelques mots d'une forme élégante que l'on peut donner aux équations qui se présentent dans la solution actuelle et dans plusieurs des solutions précédentes du problème posé.

Nous avons rencontré le système d'équations

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b'}{1-a'}=\frac{\beta'}{1-\alpha'},\quad \frac{d'}{1-c'}=\frac{\delta'}{1-\gamma'},\\ &\frac{c'}{1-b'}=\frac{\gamma'}{1-\beta'},\quad \frac{a'}{1-d'}=\frac{\alpha'}{1-\delta'}.\end{aligned}\right.$$

La signification géométrique de ces relations est presque évidente. La première, par exemple, exprime que le rapport complexe

$$\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NP}}:\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{MN}}$$

est égal à son conjugué. Il a donc un argument égal à $k\pi$. C'est dire que l'angle BNA est égal à PNM, ou, ce qui est la même chose, que les angles BNP, ANM sont égaux et de même sens de rotation (*fig.* 8). En d'autres termes, les deux triangles qui se réunissent en un sommet du quadrilatère y ont le même angle. Il suit de là que les angles à la base de ces triangles, égaux par couples de deux, n'ont que quatre valeurs distinctes. En appelant m, n, p, q les tangentes de ceux de ces angles qui ont leurs sommets en M, N, P, Q, on est conduit à la solution suivante des équations (37) et à l'expression des quantités a'. On trouvera

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{n}{n-m}(1+im), & b' &= \frac{p}{p-n}(1+in),\\ c' &= \frac{q}{q-p}(1+ip), & d' &= \frac{m}{m-q}(1+iq),\\ 1-a' &= \frac{n}{n-m}(1+in), & 1-b' &= \frac{n}{n-p}(1+ip),\\ 1-c' &= \frac{p}{p-q}(1+iq), & 1-d' &= \frac{q}{q-m}(1+im). \end{aligned}\right.$$

Si les triangles se réduisent à des droites, il suffira de supposer que m, n, p, q tendent vers zéro, leurs rapports demeurant finis, ce qui revient à garder les formules précédentes, en y supprimant les termes imaginaires.

Si l'on adopte les expressions (38) pour l'étude de la dernière solution, on trouvera, pour les valeurs m_1, n_1, p_1, q_1 des quantités m, n, p, q relatives au second quadrilatère, les expressions très-simples

$$(39)\qquad \operatorname{arc\,tang} m_1 = \operatorname{arc\,tang} m - \operatorname{arc\,tang}\frac{h'}{h},$$

où l'on a

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= mp - nq,\\ h' &= mp(n+q) - nq(m+p). \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} k^2 &= \frac{h^2 + h'^2}{(p-n)(p-q)(m-n)(m-q)},\\ 1-k^2 &= \frac{h'[(n+q)(1-mp)-(m+p)(1-nq)]}{(p-n)(p-q)(m-n)(m-q)},\\ a'_1 &= \frac{q(p-n)(1+im)}{h+ih'},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces formules permettront de se rendre compte très-aisément de tous les cas particuliers de la solution générale.

En résumé, nous avons trouvé toutes les solutions de M. Kempe, plus celle de la *fig.* 4, qui nous paraît nouvelle.

VII.

Toutes les recherches précédentes reposent sur l'hypothèse que les formules établissent une correspondance uniforme entre les points de la cubique T, liée au quadrilatère T, et ceux de la cubique U. Nous allons montrer, en terminant, que tous les cas de correspondance multiple se ramènent à celui que nous avons traité et sont compris dans les solutions données.

Supposons, en effet, qu'à un système de valeurs des u puissent correspondre, par les formules (8), deux systèmes différents

$$t, t', t'', t''', \quad t_1, t'_1, t''_1, t'''_1$$

de valeurs des t. On aura alors, en vertu de ces formules,

$$(42)\quad \begin{cases} a(1-a')t + bb't' = a(1-a')t_1 + bb't'_1, \\ b(1-b')t' + cc't'' = b(1-b')t'_1 + cc't''_1, \\ c(1-c')t'' + dd't''' = c(1-c')t''_1 + dd't'''_1, \\ d(1-d')t''' + aa't = d(1-d')t'''_1 + aa'_1t_1. \end{cases}$$

La première équation peut s'écrire

$$a(1-a')(t-t_1) = bb'(t'_1 - t'),$$

et, en y remplaçant les imaginaires par leurs conjuguées,

$$a(1-\alpha')\frac{t_1 - t}{tt_1} = b\beta'\frac{t'-t'_1}{t't'_1}.$$

Les différences $t - t_1$, $t' - t'_1$ ne sont pas nulles, puisque les deux systèmes de valeurs sont distincts. On a donc, en divisant les équations membre à membre,

$$tt_1\frac{1-a'}{1-\alpha'} = \frac{b'}{\beta'}t't'_1.$$

De cette équation et des équations analogues on déduit

$$t_1 = h\frac{\theta}{t}, \quad t'_1 = h'\frac{\theta}{t'}, \quad t''_1 = h''\frac{\theta}{t''}, \quad t'''_1 = h'''\frac{\theta}{t'''},$$

θ étant une inconnue auxiliaire, h, h', h'', h''' des constantes. Si l'on porte ces valeurs de $t_1, \ldots, t'''_1$ dans l'équation

$$at_1 + bt'_1 + ct''_1 + dt'''_1 = 0,$$

on obtient

$$\frac{ah}{t} + \frac{bh'}{t'} + \frac{ch''}{t''} + \frac{dh'''}{t'''} = 0.$$

Cette équation n'est vérifiée (en excluant le cas du parallélogramme) que si les quantités h sont égales. On peut les supposer égales à 1, et l'on a

$$(43) \qquad t_1 = \frac{\theta}{t}, \quad t'_1 = \frac{\theta}{t'}, \quad t''_1 = \frac{\theta}{t''}, \quad t'''_1 = \frac{\theta}{t'''},$$

et par conséquent

$$a(1-a')t + bb't' = \theta\left(a\frac{1-a'}{t} + \frac{bb'}{t'}\right),$$
$$b(1-b')t' + cc't'' = \theta\left(b\frac{1-b'}{t'} + \frac{cc'}{t''}\right).$$

Éliminant θ entre les deux premières, on trouve

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & ab(1-a')(1-b')\left(\frac{t}{t'} - \frac{t'}{t}\right) + acc'(1-a')\left(\frac{t}{t''} - \frac{t''}{t}\right) \\ & \quad + bcb'c'\left(\frac{t'}{t''} - \frac{t''}{t'}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette équation ne peut jamais être satisfaite tant que la cubique T est indécomposable. D'ailleurs, nous avons vu (art. III) que, si la cubique T est indécomposable, il en est de même de la cubique U du quadrilatère conjugué. Donc :

Tant que la cubique de l'un des six quadrilatères conjugués sera indécomposable, il y aura une correspondance uniforme entre les positions correspondantes de ces quadrilatères conjugués ou entre les points correspondants de leurs cubiques.

Il suit de là que, en traitant spécialement de la correspondance uniforme, nous avons certainement obtenu tous les systèmes dans lesquels un seul des quadrilatères a sa cubique indécomposable. Il suffira donc d'examiner si, quand tous les six quadrilatères ont leurs cubiques décomposables, il peut y avoir une correspondance multiple entre deux quadrilatères conjugués. Nous allons voir que cela est impossible.

En effet, considérons le quadrilatère correspondant à la première des équations (8). Pour que sa cubique soit décomposable, il faut que l'on ait une des équations

$$uu' = htt', \quad ut' = hu't, \quad ut = hu't'.$$

D'abord les deux dernières sont impossibles dans le cas d'une correspondance multiple, car elles déterminent toutes deux une seule valeur de $\frac{t}{t'}$ quand u et u' sont connus. Or il résulte des formules (43) que, dans les cas de correspondance multiple, les deux valeurs de $\frac{t}{t'}$, $\frac{t_1}{t'_1}$ sont distinctes et réciproques. On ne peut donc avoir que la relation

$$tt' = \frac{1}{h} uu'.$$

Mais on aura aussi, pour le second système de valeurs des t,

$$t_1 t'_1 = \frac{1}{h} uu',$$

ou, en vertu des formules (43),

$$\theta = kuu'.$$

La considération de la seconde des équations (8) nous donnerait de même

$$\theta = k'u'u'',$$

résultat incompatible avec le précédent tant que U n'est pas un parallélogramme, ce qu'on peut supposer. Ainsi :

Il n'existe pas d'autres solutions que celles qui ont été déduites de l'étude de la correspondance uniforme.

Il était d'autant plus nécessaire d'établir cette proposition, que sur les sept solutions trouvées trois présentent des cas de correspondance multiple :

1° La solution (a) représentée par la *fig.* 2, comme nous l'avons déjà fait remarquer;

2° La solution (d), représentée par la *fig.* 5 ;

3° Enfin la solution (e), représentée dans la *fig.* 6.

Deux des quadrilatères conjugués, CP″BP et DM″AM, sont des parallélogrammes, et à une position de l'un de ces quadrilatères correspondent deux positions de l'autre, symétriques par rapport à la droite QQ″NN″.