BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Lettres de Laplace à Condorcet

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 206-216

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_206_1>

MÉLANGES.

LETTRES DE LAPLACE A CONDORCET.

I.

A l'École militaire, ce 23 décembre 1771.

MONSIEUR,

En repassant sur les différens Mémoires que j'ay présenté jusques ici à l'Académie j'en ay extrait les remarques suivantes qui sont relatives à un objet dont vous vous estes occupé dans le troisième Volume des Mémoires de Thurin; et je prends la liberté de les soumettre à vostre examen.

Vous et M. de la Grange avez démontré dans ces Mémoires d'une manière fort élégante que, si l'on sçait intégrer l'équation

$$(1) \qquad 0 = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \ldots + H^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n},$$

dx étant constant et H, H', ... étant des fonctions de x, on pourra toujours intégrer celle-ci,

$$(2) \qquad X = y + H\frac{dy}{dx} + H'\frac{ddy}{dx^2} + \ldots + H^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n},$$

X étant une fonction de x.

Je suis parvenu par une méthode assez singulière non-seulement à démontrer ce théorème, mais encor à la règle suivante. Soit

$$y = Cu + C'u' + C''u'' + \ldots + C^{n-1}u^{n-1}$$

l'intégrale complète de l'équation (1), u, u', u'', ... étant des intégrales particulières de cette équation, et C, C′, C″, ... étant des constantes arbitraires; on fera

$$\bar{u} = \frac{u'du - udu'}{du}, \quad \bar{\bar{u}} = \frac{\overline{u'}\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\overline{u'}}{d\bar{u}}, \quad \bar{\bar{\bar{u}}} = \frac{\overline{\overline{u'}}\,d\bar{\bar{u}} - \bar{\bar{u}}\,d\bar{\bar{u}}}{d\bar{\bar{u}}},$$

$$\overline{u'} = \frac{u''du - udu''}{du}, \quad \overline{\overline{u'}} = \frac{\overline{u''}\,d\bar{u} - \bar{u}\,d\overline{u''}}{d\bar{u}}, \quad \ldots,$$

$$\overline{u''} = \frac{u'''du - udu'''}{du}, \quad \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on parvienne à former $u^{\overset{\overline{1}}{\approx}}$. Soit alors

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^{\overset{\overline{1}}{\approx}}}\right) = z^{n-1}$$

(n n'étant pas un exposant, mais indiquant seulement le rang de z dans la suite des z). Si dans l'expression de z^{n-1} on change u^{n-1} en u^{n-2} et réciproquement, on formera z^{n-2}; si dans la même expression de z^{n-1} on change u^{n-1} en u^{n-3} et réciproquement, on formera z^{n-3}, et ainsi de suite; on aura

$$\begin{aligned} y = \; & u\,(C + \textstyle\int z\,X\,dx) \\ & + u'\,(C' + \textstyle\int z'\,X\,dx) \\ & + u''\,(C'' + \textstyle\int z''\,X\,dx) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u^{n-1}(C^{n-1} + \textstyle\int z^{n-1}X\,dx), \end{aligned}$$

pour l'intégrale complète de l'équation (2).

Il résulte encore de cette méthode que l'intégrale de l'équation (2) dépend toujours de l'intégration de deux autres en degré $n - 1$ et dont il n'est même nécessaire que de trouver un nombre $n - 2$ d'intégrales particulières. La mesme méthode s'étend encor aux différences finies.

Soit l'équation différentio-différentielle aux différences finies

$$(3) \qquad X^x = y^x + H^x y^{x+1} + {}^1H^x y^{x-2} + \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n},$$

X^x, H^x, ${}^1H^x$, ... étant des fonctions de x, et X^x, y^x, H^x, ... ne désignant pas des puissances de X, y, H, ..., mais le $x^{\text{ième}}$ terme de la série des X, des y, etc.

Que l'on désigne par la caractéristique Δ les différences finies et par la caractéristique Σ les intégrales finies; cela posé, soit

$$y^x = Au + {}'A'u + {}''A''u + \ldots + {}^{n-1}A^{n-1}u$$

l'intégrale de

$$(4) \qquad 0 = y^x + H^x y^{x+1} + \ldots + {}^{n-1}H^x y^{x+n},$$

u, $'u$, $''u$, ... étant des intégrales particulières de l'équation (4) et A, $'A$, ... étant des constantes arbitraires; que l'on fasse

$$\bar{u} = u\Delta\left(\frac{u'}{u}\right), \quad \bar{\bar{u}} = \bar{u}\Delta\left(\frac{\bar{u'}}{\bar{u}}\right),$$

$$\bar{u'} = u\Delta\left(\frac{u''}{u}\right), \quad \bar{\bar{u'}} = \bar{u}\Delta\left(\frac{\bar{u''}}{\bar{u}}\right),$$

$$\bar{u''} = u\Delta\left(\frac{u'''}{u}\right), \quad \ldots$$

jusques à ce qu'on parvienne à former $u^{\overline{n-1}}$; que l'on fasse

$$u^{\overline{n-1}} = {}^{n-1}z;$$

si dans cette expression on change ${}^{n-1}u$ en ${}^{n-2}u$ et réciproquement, on formera ${}^{n-2}z$, et ainsi de suite. L'intégrale de l'équation (3) sera

$$\begin{aligned} y^x = \quad & u\left(A \pm \sum \frac{X^x}{z}\right) \\ + \quad & {}'u\left({}'A \pm \sum \frac{X^x}{{}'z}\right) \\ + \quad & {}^{n-1}u\left({}^{n-1}A \pm \sum \frac{X^x}{{}^{n-1}z}\right), \end{aligned}$$

le signe + ayant lieu si n est impair, et le signe — s'il est pair.

Je suis parvenu par cette méthode non-seulement à sommer très directement les suites récurrentes, mais de plus une espèce de suite fort générale dont celles-ci ne sont qu'un cas particulier.

Toutes ces choses sont développées dans un Mémoire que M. de Fouchi m'a promis de faire imprimer au plus tost. J'aurois bien désiré que vos occupations vous eussent permis d'y jetter un coup d'œuil; mais je sais le peu de temps qu'elles vous laissent. Je crains même d'avoir abusé par cette lettre de votre complaisance; mais j'espère que vous me pardonnerez aisément cette importunité, que je vous prie d'imputer au désir que j'ai de mériter votre amitié. Je suis avec estime et respect

Votre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.

Remarque sur la Lettre précédente;

PAR M. G. DARBOUX.

En essayant de démontrer la règle indiquée par Laplace, je me suis aperçu que l'illustre géomètre la rapporte d'une manière inexacte, et que sa Lettre contient plusieurs erreurs de transcription. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître *a priori* que l'une au moins des deux règles données pour les équations différentielles et pour les équations aux différences finies est inexacte; car celle qui se rapporte aux équations aux différences finies devrait comprendre l'autre comme cas particulier lorsqu'on suppose les différences infiniment petites, et c'est ce qui n'a pas lieu. Dans ce qui suit, je vais démontrer et énoncer d'une manière exacte la première règle relative aux équations différentielles linéaires.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{H}_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \mathrm{H}_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathrm{H}_n y = \mathrm{X},$$

et soient u, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, n intégrales particulières de l'équation sans second membre. La méthode d'intégration singulière dont parle Laplace est évidemment la suivante, qui est maintenant bien connue, et qui est exposée sous une forme un peu différente dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret (t. II, p. 524).

Posons

$$(2) \qquad y = u\int \frac{y_1}{u}\,dx, \quad y_1 = u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = \frac{u\,dy - y\,du}{u\,dx},$$

y_1 étant la nouvelle fonction inconnue, et substituons cette valeur de y dans l'équation (1). Le résultat contiendra l'intégrale dans les termes suivants :

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n} + \mathrm{H}_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{H}_n u\right)\int \frac{y_1}{u}\,dx,$$

et, comme u est une solution particulière de l'équation (1) où l'on a supprimé le second membre, on voit que le coefficient de l'intégrale $\int \frac{y_1}{u}\,dx$ sera nul, et il restera pour y_1 une équation débarrassée de tout signe d'intégration et qui sera évidemment de la forme

$$(3) \qquad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \mathrm{H}_1^1\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \ldots + \mathrm{H}_{n-1}^1 y_1 = \mathrm{X}.$$

Les solutions de l'équation sans second membre seront maintenant

$$u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u}\right), \quad u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u}\right), \quad \ldots, \quad u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{n-1}}{u}\right).$$

Je poserai

$$(4) \quad u_1^1 = u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u}\right), \quad u_2^1 = u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u}\right), \quad \ldots, \quad u_{n-1}^1 = u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{n-1}}{u}\right).$$

Nous sommes donc ramenés à une équation différentielle (3) de même forme que l'équation (1) et à laquelle nous pourrons appliquer la même méthode. En continuant ainsi indéfiniment, nous parviendrons à une équation du premier ordre, que nous saurons intégrer. Cette méthode est tout à fait différente de celle de Lagrange, et il est aisé de trouver la formule définitive à laquelle elle conduit.

En l'appliquant, nous serons conduits successivement à faire les substitutions suivantes :

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{ll} y = u\displaystyle\int \frac{y_1}{u}\,dx, & u_p^1 = u\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p}{u}\right), \\ y_1 = u_1^1\displaystyle\int \frac{y_2}{u_1^1}\,dx, & u_p^2 = u_1^1\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p^1}{u_1^1}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_i = u_i^i\displaystyle\int \frac{y_{i+1}}{u_i^i}\,dx, & u_p^{i+1} = u_i^i\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u_p^i}{u_i^i}\right), \end{array}\right.$$

la fonction y_i satisfaisant à une équation de la forme

$$(6) \qquad \frac{d^{n-i}y_i}{dx^{n-i}} + \mathrm{H}_1^i \frac{d^{n-i-1}y_i}{dx^{n-i-1}} + \ldots + \mathrm{H}_{n-i}^i y_i = \mathrm{X},$$

et les solutions particulières de l'équation sans second membre étant

$$u_i^i, \quad u_{i+1}^i, \quad \ldots, \quad u_{n-1}^i.$$

Si donc on fait $i = n - 1$, on sera ramené à l'équation

$$(7) \qquad \frac{dy_{n-1}}{dx} + \mathrm{H}_1^{n-1} y_{n-1} = \mathrm{X},$$

et, u_{n-1}^{n-1} étant l'intégrale de l'équation sans second membre, on aura

$$\frac{du_{n-1}^{n-1}}{dx} + \mathrm{H}_1^{n-1} u_{n-1}^{n-1} = 0,$$

et par conséquent

$$(8) \qquad y_{n-1} = u_{n-1}^{n-1} \int \frac{\mathrm{X}\,dx}{u_{n-1}^{n-1}}.$$

La constante arbitraire qui doit figurer dans y_{n-1} sera la limite inférieure de l'intégrale. En se reportant aux formules (5), on voit que l'on aura

$$(9) \quad y = u \int \frac{u_1^1}{u}\,dx \int \frac{u_2^2}{u_1^1}\,dx \int \frac{u_3^3}{u_2^2}\,dx \int \ldots \int \frac{u_{n-1}^{n-1}}{u_{n-2}^{n-2}}\,dx \int \frac{\mathrm{X}\,dx}{u_{n-1}^{n-1}}.$$

Comme les quantités u_k^p sont définies par les formules (5), cette formule ne contient rien d'arbitraire, et les n constantes que doit contenir y seront amenées par les intégrations successives que l'on aura à effectuer.

Faisons une application de la formule (9) au cas des équations linéaires à coefficients constants. Alors les solutions particulières qu'il y aura à considérer seront

$$u = e^{ax}, \quad u_1 = e^{a_1 x}, \quad u_{n-1} = e^{a_{n-1} x};$$

on trouvera aisément pour les quantités u_k^i l'expression

$$u_k^i = (a_k - a)(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{i-1}) e^{a_k x},$$

et la formule (9) deviendra

$$(10) \quad y = e^{ax} \int e^{(a_1 - a)x} dx \int e^{(a_2 - a_1)x} dx \ldots \int e^{(a_{n-1} - a_{n-2})x} dx \int e^{-a_{n-1}x} \mathrm{X}\,dx.$$

Désignons cette valeur de y par $\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. L'intégration par parties, portant sur la première intégrale et sur le terme $e^{(a_1-a)x}\,dx$, nous donnera la formule

$$\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$
$$= \frac{1}{a-a_1}\left[\varphi(a, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) - \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})\right],$$

d'où l'on déduira sans peine

$$\varphi(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} + \frac{\varphi(a_1)}{f'(a_1)} + \cdots + \frac{\varphi(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})},$$

en posant

$$f(x) = (x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}).$$

La formule précédente est équivalente à la suivante,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{e^{ax}}{f'(a)}\int e^{-ax}\mathrm{X}\,dx \\ & + \frac{e^{a_1x}}{f'(a_1)}\int e^{-a_1x}\mathrm{X}\,dx + \ldots + \frac{e^{a_{n-1}x}}{f'(a_{n-1})}\int e^{-a_{n-1}x}\mathrm{X}\,dx, \end{aligned}\right.$$

qui est bien connue et fréquemment employée.

Telles sont les remarques que l'on peut présenter sur la méthode dont Laplace parle dans sa Lettre, considérée en elle-même; mais si l'on rapproche cette méthode de celle de Lagrange, on sera facilement conduit à la règle de Laplace.

En effet, la méthode de la variation des constantes revient à considérer l'intégrale générale de l'équation (1) comme représentée par la formule

$$(12)\qquad y = \mathrm{C}u + \mathrm{C}_1 u_1 + \ldots + \mathrm{C}_{n-1} u_{n-1},$$

où les $n-1$ fonctions C sont assujetties à vérifier les équations suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & u\frac{d\mathrm{C}}{dx} + u_1\frac{d\mathrm{C}_1}{dx} + \ldots + u_{n-1}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0, \\ & \frac{du}{dx}\frac{d\mathrm{C}}{dx} + \cdots + \frac{du_{n-1}}{dx}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d\mathrm{C}}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}u_{n-1}}{dx^{n-2}}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{A} = u\frac{d\mathrm{C}}{dx} + u_1\frac{d\mathrm{C}_1}{dx} + \ldots + u_{n-1}\frac{d\mathrm{C}_{n-1}}{dx} = 0,$$

et si l'on désigne par le symbole δ des différentiations où les quantités $\frac{dC}{dx}, \frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_{n-1}}{dx}$ sont traitées comme constantes, les équations (13) s'écriront, d'une manière abrégée,

$$(14) \qquad \mathcal{A} = 0, \quad \delta\mathcal{A} = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-2}\mathcal{A} = 0.$$

Si nous nous reportons maintenant aux formules (2), nous aurons, en tenant compte de l'équation $\mathcal{A} = 0$,

$$y_1 = u\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = C_1 u_1^1 + C_2 u_2^1 + \ldots + C_{n-1} u_{n-1}^1,$$

et, si l'on pose

$$(15) \qquad \mathcal{A}_1 = u_1^1 \frac{dC_1}{dx} + u_2^1 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + u_{n-1}^1 \frac{dC_{n-1}}{dx},$$

on trouve, en substituant l'expression des quantités u_k^1,

$$\mathcal{A}_1 = \delta\mathcal{A} - \mathcal{A}\frac{du}{u\,dx},$$

et par conséquent, en vertu des équations (14), on aura

$$(16) \qquad \mathcal{A}_1 = 0, \quad \delta\mathcal{A}_1 = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-3}\mathcal{A}_1 = 0.$$

En d'autres termes, les quantités C_1 vérifient, par rapport à la nouvelle équation en y_1 comme par rapport à l'ancienne, les équations auxquelles les assujettirait l'application directe de la méthode de Lagrange à cette équation en y_1.

En répétant donc les mêmes raisonnements, nous voyons que l'on aura

$$(17) \qquad y_i = C_i u_i^i + C_{i+1} u_{i+1}^i + \ldots + C_{n-1} u_{n-1}^i,$$

avec les conditions

$$\mathcal{A}_i = u_i^i \frac{dC_i}{dx} + u_{i+1}^i \frac{dC_{i+1}}{dx} + \ldots + u_{n-1}^i \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0,$$

auxquelles il faut joindre les suivantes :

$$\delta\mathcal{A}_i = 0, \quad \ldots, \quad \delta^{n-i-2}\mathcal{A}_i = 0.$$

On aura donc en particulier

$$(18) \qquad y_{n-1} = C_{n-1} u_{n-1}^{n-1},$$

et par conséquent, en vertu de la formule (8),

$$C_{n-1} = \int \frac{X\,dx}{u_{n-1}^{n-1}}. \tag{19}$$

C'est là précisément la règle donnée par Laplace. Comme on peut ranger les intégrales particulières dans un ordre quelconque, il est clair, comme Laplace le fait remarquer, que cette formule donnera toutes les quantités C_i par des permutations convenables. Mais on pourrait aussi observer que les équations

$$\mathcal{A}_{n-2} = 0, \quad \mathcal{A}_{n-3} = 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_1 = 0, \quad \mathcal{A} = 0$$

détermineront, la première $\frac{dC_{n-2}}{dx}$, la seconde $\frac{dC_{n-3}}{dx}$, et ainsi de suite, quand $\frac{dC_{n-1}}{dx}$ sera connue.

Dans le cas des équations à coefficients constants, on a

$$C_{n-1} = \frac{1}{f'(a_{n-1})} \int X e^{-a_{n-1}x}\,dx,$$

$f'(a)$ ayant la signification déjà donnée, et par suite

$$y = \sum \frac{e^{ax}}{f'(a)} \int X e^{-ax}\,dx,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de l'équation caractéristique, ce qui s'accorde bien avec notre premier résultat.

La méthode de Cauchy, telle qu'elle a été exposée par M. Hermite dans son Cours de l'École Polytechnique de 1873-1875, donne un moyen bien simple d'arriver à la formule précédente, et même à la formule plus générale qui doit être employée quand l'équation caractéristique a des racines multiples. On peut aussi, quand la formule précédente a été démontrée, employer d'une manière assez simple le procédé de d'Alembert par lequel on passe du cas des racines au cas des racines multiples. En effet, Z désignant la valeur de X quand on remplace x par z, la formule précédente peut s'écrire

$$y = \sum \int_\alpha^x \frac{e^{a(x-z)} Z\,dz}{f'(a)},$$

et elle nous donne une intégrale particulière de l'équation si l'on prend la même limite inférieure α dans toutes les intégrales ; on a alors

$$y = \int_\alpha^x ZR\,dz, \tag{20}$$

en posant

$$(21) \qquad R = \sum \frac{e^{a(x-z)}}{f'(a)}.$$

Or, on peut définir R de la manière suivante. Supposons que l'on développe, dans la fonction

$$e^{u(x-z)} \frac{1}{f(u)},$$

l'exponentielle suivant les puissances *positives* de u et $\frac{1}{f(u)}$ suivant les puissances négatives de u. On obtiendra un développement contenant à la fois les puissances positives et négatives de u, développement qui sera d'ailleurs convergent quand u sera suffisamment grand. Le coefficient du terme en $\frac{1}{u}$ est précisément R. On a, en effet,

$$\frac{e^{u(x-z)}}{f(u)} = \sum \frac{e^{u(x-z)}}{f'(a)} \frac{1}{u-a},$$

et, en développant $\frac{1}{u-a}$ suivant les puissances de $\frac{1}{u}$, on trouvera précisément, pour le coefficient de $\frac{1}{u}$,

$$\frac{e^{a(x-z)}}{f'(a)}.$$

Ainsi, nous avons la règle suivante : *On aura une intégrale particulière de l'équation linéaire à coefficients constants et avec second membre* X, *en prenant*

$$(22) \qquad y = \int_{\alpha}^{x} \mathrm{ZR}\, dz,$$

où R *désigne le coefficient de* $\frac{1}{u}$ *dans le développement de* $\frac{e^{u(x-z)}}{f(u)}$ *effectué à la fois suivant les puissances positives et négatives de u, c'est-à-dire le numérateur $e^{u(x-z)}$ étant développé suivant les puissances positives de u et $\frac{1}{f(u)}$ étant développé suivant les puissances négatives de u.*

Cette règle permet de trouver l'intégrale particulière sans résoudre l'équation caractéristique. Comme elle est indépendante de la nature des racines de l'équation caractéristique, elle subsistera quand cette équation aura des racines multiples. On aura alors

$$\frac{1}{f(u)} = \sum \left[\frac{A_0}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(u-a)^p} \right],$$

et l'on reconnaîtra, par un calcul des plus simples et en développant d'abord l'exponentielle $e^{u(x-z)}$ suivant les puissances de $u - a$, que le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de

$$\frac{A_q}{(u-a)^{q+1}} e^{u(x-z)}$$

est

$$\frac{A_q}{1.2\ldots q} e^{a(x-z)}(x-z)^q.$$

On a donc, dans le cas des racines multiples,

$$(23)\quad R = \sum \left[A_0 + \frac{A_1(x-z)}{1} + \ldots + \frac{A_{p-1}(x-z)^{p-1}}{1.2\ldots p-1}\right] e^{a(x-z)},$$

formule que l'on obtient d'ailleurs beaucoup plus rapidement en employant la belle méthode exposée par M. Hermite dans le Cours déjà cité.

II.

A Monsieur le marquis de Condorcet, Secrétaire de l'Académie des Sciences, rue Louis-le-Grand, a Paris.

J'ai reçu, Monsieur, la Note que vous avez eu la bonté de m'envoyer; elle me paroit très juste, et vous observez avec raison que, toutes fois que l'intégrale sera possible en termes finis, vous la trouverez par votre méthode, qui me paroit fort ingénieuse. Quand mon travail sera fini sur cet objet, je me propose de vous le communiquer. Du reste, on vous doit et je vous rendrai la justice d'observer que vous estes le premier qui ayez donné une méthode générale sur ces intégrations, car il me semble qu'une des raisons pour lesquelles on n'a point avancé cette partie de l'Analyse autant qu'elle pouvoit l'être est que l'on s'est borné à des méthodes de transformation nécessairement limitées. Je vous prie de me croire avec toute l'estime et l'amitié possibles,

Monsieur,

Vostre très humble et très obéissant serviteur,

Laplace.
