BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

F. FOLIE

Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne (1872) et éléments d'une théorie des faisceaux (1878)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, n° 1 (1879), p. 278-288

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_278_1>

FONDEMENTS D'UNE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE CARTÉSIENNE (1872) ET ÉLÉMENTS D'UNE THÉORIE DES FAISCEAUX (1878) (¹);

PAR M. F. FOLIE.

Analyse faite par l'auteur.

Dans ces deux Ouvrages, nous sommes parvenu à étendre aux courbes planes et aux surfaces supérieures la plupart des théorèmes fondamentaux, qui n'étaient connus jusqu'alors que pour les coniques.

§ I. — DES COURBES PLANES.

Dans les courbes planes, ces théorèmes sont *généralement* applicables jusqu'au cinquième degré; dans les surfaces, jusqu'au troisième seulement. Ils n'existent, au delà de ces degrés, que pour des courbes et des surfaces particulières.

(¹) Liége, A. Decq, libraire. Paris, Gauthier-Villars.

En outre, dans la théorie même des coniques, nous avons découvert une couple de propriétés nouvelles, de même que dans celle des polygones conjugués entre eux.

Nous nous bornerons, dans les lignes qui suivent, à donner les énoncés de ces théorèmes fondamentaux, en renvoyant, pour les définitions comme pour les démonstrations, aux deux Ouvrages mentionnés ci-dessus.

En ce qui concerne les courbes planes, nous prendrons pour exemple le troisième degré, en faisant remarquer que nos théorèmes généraux s'étendent jusqu'au cinquième.

Courbes du troisième ordre.

Si deux trilatères a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une courbe du troisième ordre :

1°, I. Le rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient, en joignant un point quelconque de la courbe aux sommets ab', bc', ca', $a'b$, $b'c$, $c'a$ de ces trilatères, est constant, quel que soit ce point; c'est-à-dire que, si l'on désigne par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six rayons de ce faisceau, par $(1,2)$, ... le sinus de l'angle compris entre les rayons 1 et 2, ..., on aura

$$(1,2,3,4,5,6) = \frac{(1,2).(3,4).(5,6)}{(6,1).(2,3).(4,5)} = \text{const.}$$

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux ternes de côtés a, b, c et a', b', c' sont entre eux dans un rapport constant.

Courbes de la troisième classe.

Si deux trigones A, B, C et A', B', C' sont conjugués à une courbe de la troisième classe:

1°, I. Le rapport anharmonique de la chaîne que l'on obtient, en coupant, par une tangente quelconque à la courbe, les côtés AB', BC', CA', A'B, B'C, C'A de ces trigones, est constant, quelle que soit cette tangente; c'est-à-dire que, si l'on désigne par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six points de cette chaîne, par $|1, 2|$, ... la distance entre les points 1 et 2, ..., on aura

$$|1,2,3,4,5,6| = \frac{|1,2|.|3,4|.|5,6|}{|6,1|.|2,3|.|4,5|} = \text{const.}$$

2°, II. Les produits des distances d'une tangente quelconque à la courbe, aux deux ternes de sommets A, B, C et A', B', C', sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Une transversale rencontre ces deux ternes de côtés et la courbe en trois ternes de points en involution.

IV. Expressions analytiques de cette involution :

$$\sum_1^3 \lambda_1 (x - x'_1)(x - x''_1)(x - x'''_1) \equiv 0,$$

$$(1, 1', 2, 1'').(1, 2', 2, 2'') \times (1, 3', 2, 3'') = 1, \ldots,$$

$$(1, 1', 2, 1'', 3, 1''').(1, 2', 2, 2'' 3, 2''') \times (1, 3', 2, 3'', 3, 3''') = -1, \ldots.$$

V. Si deux quadrilatères a, b, c, d et a', b', c', d' sont conjugués à une courbe du troisième ordre, leurs côtés opposés a et a', b et b', c et c', d et d' se coupent en quatre points situés en ligne droite.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$a.b.c.d - k\,a'.b'.c'd' \equiv C_3.\Delta.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quadrilatères conjugués à une courbe du troisième ordre, on obtient un hexagone inscrit à une conique.

D'où l'on conclut que, de l'identité qui précède, on peut déduire

3°, III. Les trois tangentes menées d'un point quelconque du plan à la courbe, et les deux ternes de droites menées de ce point aux sommets A, B, C et A', B', C' forment un faisceau en involution.

IV. Comme ci-contre.

V. Si deux tétragones A, B, C, D et A', B', C', D' sont conjugués à une courbe de la troisième classe, les droites qui unissent leurs sommets opposés A et A', B et B', C et C', D et D' concourent en un même point.

VI. Comme ci-contre.

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à une courbe de la troisième classe, on obtient un hexagone circonscrit à une conique.

les suivantes :

$$a.b.c - k'\,a'.b'.c' \equiv C'_2.\Delta,$$
$$a.b.d - k''\,a'.b'.d' \equiv C''_2.\Delta,$$
$$a.c.d - k'''\,a'.c'.d' \equiv C'''_2.\Delta,$$
$$b.c.d - k^{\text{IV}}\,b'.c'.d' \equiv C^{\text{IV}}_2.\Delta.$$

Comme ci-contre.

Nous pourrions énoncer encore d'autres théorèmes nouveaux, relatifs aux polygones conjugués entre eux; mais, comme ils sont moins généraux, par le fait même qu'il n'y est plus question de courbes, nous nous bornerons, pour ceux-ci, à renvoyer le lecteur à nos *Éléments d'une théorie des faisceaux*.

Il en est deux autres sur lesquels nous appellerons encore son attention, parce qu'ils sont neufs, même dans cette théorie, tant cultivée, des coniques.

Le premier de ceux-ci offre de l'analogie, en coordonnées ponctuelles, avec le corrélatif de celui de Carnot, en coordonnées tangentielles, avec le théorème même de ce géomètre, ce qui permet de combiner nos théorèmes avec ces derniers.

Le second introduit une notion toute nouvelle, que, à cause de son expression analytique, fort semblable à celle de l'involution, nous avons appelée *évolution*, et dont voici la définition :

Trois couples de points en ligne droite, 1 et 1', 2 et 2', 3 et 3', sont en *évolution*, lorsqu'il existe entre leurs distances mutuelles la relation

$$1,2'.2,3'.3,1' = 1',2.2',3.3',1 \quad \text{ou} \quad |1,1',2,3'| = -|1',1,2',3|.$$

Nous énoncerons ces deux théorèmes, en coordonnées ponctuelles seulement, pour le second et le troisième ordre. Le premier est immédiatement généralisable, et leurs corrélatifs (en coordonnées tangentielles) sont très-aisés à exprimer.

VIII. Si une conique est conjuguée à deux bilatères a, b et a', b', et qu'on joigne les sommets de ceux-ci à un point quelconque de la courbe, le rapport du produit des sinus des angles, comp-

Si une courbe du troisième ordre est conjuguée à deux trilatères a, b, c et a', b', c', et qu'on joigne les sommets de ceux-ci à un point quelconque de la courbe, le rapport du produit

tés, dans le premier bilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à celui des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant, quel que soit ce point.	des sinus des angles, comptés, dans le premier trilatère, depuis les côtés de celui-ci jusqu'aux rayons aboutissant à leurs extrémités, à celui des sinus des angles, comptés de même dans le second, est constant, quel que soit ce point.
IX. Si, par trois points pris sur une conique, on lui inscrit et circonscrit un triangle, une transversale quelconque coupe les côtés opposés de ces deux triangles en trois couples de points en *évolution*.	Si un quadrilatère est complétement inscrit à une courbe du troisième ordre, et qu'on mène en trois de ses sommets, des tangentes à la courbe, les côtés des deux triangles, déterminés par ces sommets et par ces tangentes, sont coupés par une transversale en trois couples de points en *évolution*.

Outre ces théorèmes, j'énonce également un principe qui me semble tout à fait capital. La découverte de ce principe est une conséquence de celle du rapport anharmonique du $n^{\text{ième}}$ ordre. Je l'ai nommé *principe de la théorie des faisceaux* (1). Le voici, borné également au cas du troisième ordre seulement :

Principe. — *Si l'on a trois courbes variables en vertu des paramètres* α, β, γ,

$$\varphi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \chi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \psi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

et qu'il existe entre ces paramètres une relation $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$ [*ou bien si l'on a trois courbes variables en vertu des paramètres* α *et* β : $\varphi(x,y,\alpha,\beta)=0$, $\chi=0$, $\psi=0$], *l'équation* $F(x,y)=0$,

(1) Je crois neuf ce principe, auquel mon collègue M. Le Paige a collaboré avec moi. M. Em. Weyr, à Vienne, m'a déclaré ne pas le connaître. M. Klein, à Munich, m'a dit qu'il n'en connaissait qu'un cas particulier, celui de la recherche du jacobien; enfin, je ne l'ai vu énoncé dans aucun des Traités les plus modernes.

Si un géomètre croyait avoir des droits à la priorité de cette découverte, je serais heureux qu'il voulût bien me les signaler.

résultant de l'élimination des paramètres variables, représente une courbe passant par les points triples *d'intersection des courbes* φ, χ, ψ.

Ce principe est évidemment susceptible de la plus complète généralisation dans le plan et dans l'espace.

Application. — *Chercher le lieu des points triples des rayons homologues de trois faisceaux homographiques.*

Prenons les centres de ces trois faisceaux pour sommets d'un triangle $\alpha.\beta.\gamma = 0$. Les équations des rayons de chacun de ces faisceaux seront

$$(1) \qquad \alpha + \lambda\beta = 0,$$

$$(2) \qquad \beta + \mu\gamma = 0,$$

$$(3) \qquad \gamma + \nu\alpha = 0.$$

et la condition d'homographie s'écrira

$$(4) \qquad a_{12}\lambda\mu + a_{23}\mu\nu + a_{31}\nu\lambda + a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + 1 = 0.$$

Éliminant λ, μ, ν entre les équations (1), (2), (3) et (4), on a celle du lieu cherché :

$$a_{12}\alpha^2\beta + a_{23}\beta^2\gamma + a_{31}\gamma^2\alpha - a_1\alpha^2\gamma - a_2\beta^2\alpha - a_3\gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Ce lieu est une courbe générale du troisième ordre passant par les centres des trois faisceaux.

§ II. — Des surfaces.

Si nous ne sommes pas arrivé à étendre tous les théorèmes qui précèdent aux surfaces du second et du troisième degré (les seules auxquelles quelques-uns d'entre eux soient généralement applicables), nous avons du moins, ici encore, tracé la voie, et démontré que le fameux théorème de Pascal avait été trouvé, dès 1826, de même que celui de Brianchon, pour les surfaces du second degré, par notre compatriote Dandelin, quoiqu'il eût lui-même mis la question au concours à l'Académie de Bruxelles. On le verra par l'analogue que nous donnerons de chacun de ces théorèmes pour le troisième degré.

Nous nous bornerons, dans le second degré, à l'énoncé de nos théorèmes; nous entrerons dans un peu plus de détails relativement aux surfaces de la troisième classe, dont nous avons le premier fait connaître les vingt-sept droites et les propriétés capitales, que nous énoncerons en regard de celles des surfaces du troisième ordre.

Comme beaucoup de ces dernières ont été découvertes par Salmon, Cayley, Steiner, Cremona, Sturm, etc., nous ferons remarquer au lecteur que nous avons guillemeté celles que nous leur empruntons, et numéroté celles qui nous sont dues, en conservant les numéros mêmes des énoncés précédents auxquelles elles correspondent; dans la troisième classe, au contraire, tout peut-être nous appartient [1].

Surfaces du second degré.

Si deux dièdres a, b et a', b' sont conjugués à une surface du second degré :

1°, I. ? [2]

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux couples de faces a, b et a', b' sont entre eux dans un rapport constant, quel que soit ce point.

3°, III. Une transversale quelconque rencontre ces deux couples de faces, et la surface, en trois couples de points en involution.

Si deux digones A, B et A', B' sont conjugués à une surface du second degré :

1°, I. ? [2]

2°, II. Les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux couples de sommets A, B et A', B' sont entre eux dans un rapport constant, quel que soit ce plan.

3°, III. Le couple de plans, menés par une droite tangentiellement à la surface, et les deux couples de plans, menés par cette droite et par les deux couples de

(1) Mes théorèmes sur ces surfaces ont été présentés à l'Académie de Belgique le 3 décembre 1870.

(2) *Voir*, au sujet de ces énonces, une Note que j'ai publiée, en collaboration avec M. Le Paige, dans le t. XLVIII des *Bulletins de l'Academie de Belgique*, p. 41 et suiv.

V. Si deux trièdres a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une surface du second degré, leurs faces opposées a et a', b et b', c et c' se coupent suivant trois droites situées dans un même plan, ce qui s'exprime analytiquement par

VI. $a.b.c - ka'.b'.c' \equiv S_2.P.$

Surfaces du troisième ordre.

Si, entre les paramètres des trois faisceaux de plans $a = \alpha a'$, $b = \beta b'$, $c = \gamma c'$, il existe la relation $\alpha\beta\gamma = k$, l'équation

$$s_3 \equiv abc - ka'b'c' = 0$$

du lieu des points d'intersection des faces homologues de ces trois faisceaux représente une surface générale du troisième ordre passant par les axes de ces faisceaux.

Les deux trièdres a, b, c; a', b', c' sont dits conjugués à s_3.

Chaque face de l'un passe par trois génératrices appartenant respectivement aux trois faces de l'autre.

De là neuf génératrices primitives, formant six systèmes de trois génératrices non situées deux à deux dans un même plan.

« Un hyperboloïde qui a trois génératrices d'un même mode communes avec S_3 en a trois de

sommets A, B et A′, B′ forment un faisceau en involution.

V. Si deux trigones A, B, C et A′, B′, C′ sont conjugués à une surface du second degré, les droites qui unissent les sommets opposés A et A′, B et B′, C et C′ concourent en un même point.

VI. Comme ci-contre.

Surfaces de la troisième classe.

Si, entre les paramètres des trois chaînes de points $A = \alpha A'$, $B = \beta B'$, $C = \gamma C'$, il existe la relation $\alpha\beta\gamma = k$, l'équation

$$S_3 \equiv A.B.C - kA'.B'.C' = 0$$

de l'enveloppe des plans, déterminés par les points homologues de ces trois chaînes, représente une surface générale de la troisième classe passant par les axes de ces chaînes.

Les deux trigones A, B, C, A′, B′, C′ sont dits conjugués à S_3.

Chaque sommet de l'un est le point de concours de trois génératrices passant respectivement par les trois sommets de l'autre.

De là neuf génératrices primitives, formant six systèmes de trois génératrices non concourantes deux à deux.

Comme ci-contre.

l'autre mode également communes. »

On en conclut que chacun des six hyperboloïdes, déterminés par l'un des six systèmes de génératrices primitives, coupe s_3 suivant trois génératrices distinctes des neuf primitives et distinctes entre elles, et, par suite, qu'il existe vingt-sept génératrices sur s_3.

« Chacune d'elles est dans un même plan avec cinq couples des autres, et forme, avec ces couples, cinq triangles tritangents, ce qui détermine quarante-cinq de ces triangles.

» Si deux triangles tritangents n'ont aucun côté commun, leurs côtés se coupent deux à deux. » (Steiner, Cremona, Sturm, etc.)

Deux triangles tritangents suffisent donc pour déterminer un système de trièdres conjugués.

Deux systèmes de trièdres conjugués ayant deux faces communes, tels que *abe* et *c'd'f*, *cdf* et *a'b'e*, forment, par la suppression de ces faces, un système de tétraèdres conjugués *a*, *b*, *c*, *d* et *a'*, *b'*, *c'*, *d'*.

Ceux-ci sont tels que chaque face de l'un passe par trois génératrices appartenant respectivement à trois des faces de l'autre.

Les faces de chaque tétraèdre,

On en conclut que chacun des six hyperboloïdes, déterminés par l'un des six systèmes de génératrices primitives, se raccorde avec S_3 suivant trois génératrices distinctes des neuf primitives et distinctes entre elles, et, par suite, qu'il existe vingt-sept génératrices sur S_3.

Chacune d'elles concourt avec cinq couples des autres, et forme, en ces concours, cinq sommets tritangents (c'est-à-dire de triple contact), ce qui détermine quarante-cinq de ces sommets.

Si deux sommets tritangents ne sont pas situés sur une même génératrice, les génératrices qui concourent en ces sommets se coupent deux à deux.

Deux sommets tritangents suffisent donc pour déterminer un système de trigones conjugués.

Deux systèmes de trigones conjugués ayant deux sommets communs, tels que ABE et C'D'F, CDF et A'B'E, forment, par la suppression de ces sommets, un système de tétragones conjugués A, B, C, D et A', B', C', D'.

Ceux-ci sont tels que chaque sommet de l'un est le point de concours de trois génératrices passant respectivement par trois des sommets de l'autre.

Les sommets de chaque tétraqui n'ont pas une génératrice commune, sont opposées.

Si deux trièdres a, b, c et a', b', c' sont conjugués à une surface du troisième ordre :

1°, I. ? (¹)

2°, II. Les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux ternes de faces a, b, c et a', b', c' sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Une transversale quelconque rencontre ces deux ternes de faces, et la surface, en trois ternes de points en involution.

IV. Comme plus haut.

V. Si deux tétraèdres a, b, c, d et a', b', c', d' sont conjugués à une surface du troisième ordre, leurs faces opposées a et a', b et b', c et c', d et d' se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$a.b.c.d - k\,a'.b'.c'.d' \equiv s_3.\mathrm{P}.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de faces opposées de deux tétraèdres conjugués à une

gone, qui ne sont pas sur une même génératrice, sont opposés.

Si deux trigones A, B, C et A', B', C' sont conjugués à une surface de la troisième classe :

1°, I. ? (¹)

2°, II. Les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux ternes de sommets A, B, C et A', B', C' sont entre eux dans un rapport constant.

3°, III. Les deux ternes de plans, menés par une droite et par les sommets de ces trigones, et le terne de plans, menés par cette droite tangentiellement à la surface, forment un faisceau en involution.

IV. Comme plus haut.

V. Si deux tétragones A, B, C, D et A', B', C', D' sont conjugués à une surface de la troisième classe, les droites qui unissent leurs sommets opposés A et A', B et B', C et C', D et D' concourent en un même point.

VI. Expression analytique de ce théorème :

$$\mathrm{A.B.C.D} - k\,\mathrm{A'.B'.C'.D'} \equiv \mathrm{S}_3.\Pi.$$

VII. Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués à

(¹) *Voir* la note précédente.

surface du troisième ordre, on obtient un système de trièdres conjugués à un hyperboloïde, c'est-à-dire que, de l'identité ci-dessus, on peut déduire les suivantes :

$$a\ b.c - k'a'.b'.c' \equiv s'_2.P, \ldots.$$

une surface de la troisième classe, on obtient un système de deux trigones conjugués à un hyperboloïde, c'est-à-dire que, de l'identité ci-dessus, on peut déduire les suivantes :

$$A.B.C - \lambda A'.B'.C'. \equiv S'_2.\Pi, \ldots.$$

Nous ferons remarquer enfin que ces théorèmes, et particulièrement les théorèmes III et V, s'étendent aisément aux courbes gauches, et ce dernier même à des courbes tracées sur une surface quelconque. Il nous paraît superflu de donner ici les énoncés de ces propriétés, ainsi que de plusieurs autres propriétés générales des courbes et des surfaces consignées ailleurs. Le lecteur pourra consulter, à ce sujet, outre les Ouvrages cités, les *Bulletins de l'Académie de Belgique,* à partir du tome XXXVI.