Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Application de la méthode précédente à l'équation linéaire à coefficients constants avec second membre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 325-328

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_325_1>

APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A L'ÉQUATION LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRE;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans les Leçons que nous venons de reproduire, M. Hermite a traité seulement l'équation linéaire sans second membre. Mais un résultat très-important obtenu par l'illustre géomètre va nous conduire d'une manière simple à l'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et avec second membre. Cauchy, du reste, n'avait pas négligé cette dernière équation, et il l'a considérée dans différents Mémoires insérés aux *Exercices de Mathématiques* (¹).

Supposons que l'on se propose d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad \alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \ldots + \lambda \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des constantes et $f(x)$ une fonction quelconque. On pourra appliquer la règle suivante, due aussi à Cauchy.

On formera d'abord une solution particulière $\Phi(x, t)$ de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n-2$ premières dérivées pour $x = t$, et telle, en outre, que sa dérivée

(¹) *Voir* les Memoires suivants de Cauchy :

Application du calcul des residus à l'intégration des equations lineaires à coefficients constants (*Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 202).

Sur la determination des constantes arbitraires renfermees dans les integrales des equations differentielles lineaires (*Exercices de Mathematiques*, t. II, p. 25).

Sur la transformation des fonctions qui representent les integrales generales des equations differentielles linéaires (*Exercices de Mathematiques*, t. II, p. 210).

$n-1^{\text{ième}}$ se réduise à $f(t)$ pour la même valeur de x. Cela posé, la fonction

$$(2) \qquad y = \int_{x_0}^{x} \Phi(x, t)\, dt,$$

où x_0 est une constante quelconque, sera une solution particulière de l'équation différentielle proposée.

Nous avons donc à former ici la fonction $\Phi(x, t)$, que nous venons de définir. Or, d'après une règle démontrée par M. Hermite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{zx}\, dz}{F(z)},$$

prise sur le contour d'un cercle de rayon très-grand, est une solution de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n-2$ premières dérivées pour $x=0$ et ayant pour la même valeur de x sa $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée égale à l'unité. Changeons dans l'intégrale précédente x en $x-t$, multiplions par $f(t)$, et nous obtiendrons la fonction qu'il s'agissait de former,

$$(3) \qquad \Phi(x, t) = \frac{f(t)}{2\pi i}\int_R \frac{e^{z(x-t)}\, dz}{F(z)},$$

l'intégrale étant toujours prise sur le contour d'un cercle de rayon suffisamment grand.

Ainsi l'intégrale double

$$(4) \qquad Y = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, dz}{F(z)}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (1).

Voici comment on peut vérifier directement ce résultat. En différentiant la formule (4), on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{f(x)}{2\pi i}\int_R \frac{dz}{F(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, z\, dz}{F(z)}.$$

L'intégrale curviligne qui figure dans le premier terme est évidemment nulle. Il reste donc

$$(5) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \int_R \frac{e^{z(x-t)}\, z\, dz}{F(z)}.$$

Si l'on remarque que toutes les intégrales

$$\int_R \frac{z^p\,dz}{F(z)}$$

sont nulles tant que p est inférieur à $n-1$, on trouvera, en différentiant successivement la formule (5),

$$(6)\qquad \frac{d^pY}{dx^p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^p\,dz}{F(z)},$$

tant que p sera inférieur à n.

Pour obtenir la dérivée $n^{\text{ième}}$, nous différentierons la formule précédente, en y supposant $p = n-1$. Nous avons

$$\frac{d^nY}{dx^n} = \frac{f(x)}{2\pi i}\int_R \frac{z^{n-1}\,dz}{F(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^n\,dz}{F(z)},$$

et, comme on a

$$\int_R \frac{z^{n-1}\,dz}{F(z)} = 2\pi i,$$

il restera

$$(7)\qquad \frac{d^nY}{dx^n} = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^n\,dz}{F(z)}.$$

Il suffit maintenant de substituer les valeurs de Y et de ses dérivées pour reconnaître que Y est une solution particulière de l'équation différentielle (1). Au reste, la démonstration précédente est au fond celle de Cauchy.

Reportons-nous à la formule (4) et posons

$$(8)\qquad R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{e^{z(x-t)}\,dz}{F(z)};$$

$R(t)$ sera la somme des résidus relatifs à toutes les racines de $F(z)$.

Supposons qu'on ait décomposé $\frac{1}{F(z)}$ en fractions simples, et posons

$$\frac{1}{F(z)} = \sum\left[\frac{A_0}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(z-a)^p}\right];$$

on aura

$$e^{z(x-t)} = e^{a(x-t)}\left[1 + \frac{(z-a)(x-t)}{1} + \ldots\right],$$

et le résidu relatif à la racine a sera

$$e^{a(x-t)}\left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \ldots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\ldots p-1}\right].$$

On aura donc

$$(9)\quad R(t) = \sum e^{a(x-t)}\left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \ldots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\ldots p-1}\right],$$

et Y sera alors donné par la formule

$$(10)\qquad Y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,R(t)\,dt,$$

absolument identique à celle qui a été donnée pages 199 et 200.