BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Comptes rendus et analyses

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 3, nº 1 (1879), p. 401-424

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_401_0>

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

B. BONCOMPAGNI. — LETTERA INEDITA DI CARLO-FEDERICO GAUSS A SOFIA GERMAIN. Firenze, calcografia ed autografia. Achille, Paris, 1879.

La Lettre inédite de Gauss dont M. le prince Boncompagni vient de publier sous ce titre une reproduction photolithographique [1] est datée de « Brunsvic, ce 30 april 1807, jour de ma naissance ».

Les circonstances qui ont précédé cette Lettre sont fort romanesques. Sophie Germain avait lié correspondance avec Gauss sous le pseudonyme d'un amateur nommé Leblanc [2]. Gauss répondait sous le couvert du savant orientaliste Silvestre de Sacy [3].

Pendant la campagne de Prusse, un ami de la famille Germain, le général Pernety, fut chargé de diriger le siége de Breslau. Sophie Germain en profita pour recommander au général l'illustre géomètre, qui reçoit bientôt mille politesses du gouverneur de la ville de Brunswick et d'un chef de bataillon nommé Chantel, dépêché à cet effet. Étonné, Gauss demande naturellement à qui il est redevable de ces gracieusetés. On lui nomme une femme : il ne la connaît point. On écrit alors à Paris, et tout s'éclaircit par une Lettre de Sophie Germain [4].

La réponse, comme on peut le prévoir, débute par les plus chaudes félicitations et par les témoignages de la plus vive reconnaissance.

Vient ensuite une importante critique de ces deux théorèmes trop généralement énoncés par Sophie Germain :

« Si la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de deux nombres quelconques est de la forme $hh + nff$, la somme de ces nombres euz-mêmes sera de la meme forme ».

---

(1) L'histoire du recueil autographe dont elle est extraite sera prochainement exposée par l'éditeur.

(2) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain*. Édition Stupuy. Paris, 1879, p. 298-302.

(3) *Ibid.*, p. 302.

(4) On voit, par le début de la réponse, que cette Lettre fut écrite le 20 février 1807.

« Si l'un des facteurs de la formule $yy + nzz$ ($n$ étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$, l'autre appartient necessairement à la meme forme ».

Enfin, nous remarquons dans cette Lettre les deux énoncés suivants :

**I.** Soit $p$ un nombre premier de la forme $3n + 1$. Je dis que 2 (c. a d. $+2$ et $-2$) est residu cubique de $p$, si $p$ se reduit à la forme

$$xx + 27yy;$$

que 2 est non-residu cubique de $p$, si $4p$ se reduit a cette forme. P. E.

$$7,\ 13,\ 19,\ 31,\ 37,\ 43,\ 61,\ 67,\ 73,\ 79,\ 97.$$

Vous ne trouverés que

$$31 = 4 + 27,\quad 43 = 16 + 27$$

et

$$2 \equiv 4^3 \pmod{31},\quad 2 \equiv (-9)^3 \pmod{43}.$$

**II.** Soit $p$ un nombre premier de la forme $8n + 1$. Je dis que $+2$ et $-2$ seront residus ou non-residus biquarrés de $p$ suivant ce que $p$ est ou n'est pas de la forme

$$xx + 64yy.$$

Par ex. parmi les nombres

$$17,\ 41,\ 73,\ 89,\ 97,\ 113,\ 137,$$

vous ne trouvez que

$$73 = 9 + 64,\quad 89 = 25 + 64,\quad 113 = 49 + 64,$$

et

$$25^4 \equiv 2 \pmod{73},\quad 5^4 \equiv 2 \pmod{89},\quad 20^4 \equiv 2 \pmod{113}.$$

La forme de ces énoncés est certainement inédite. Le premier se trouve, sous une forme beaucoup plus générale, démontré dans le célèbre Mémoire de Jacobi, *De residuis cubicis commentatio numerosa* [1]; le second a été communiqué par Gauss à la Société

[1] *Journal de Crelle*, t. 2, p. 66-69; 1827.

Royale de Göttingue en 1825 (¹) et démontré dans le VI<sup>e</sup> Volume des *Nouveaux Commentaires* (²).

Les autres passages de cette Lettre peuvent être facilement éclaircis et commentés.

Les notes savantes, dont toutes vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagacité avec laquelle vous les avez su generaliser et perfectionner.

Outre la Lettre qui est l'objet de cet article, nous possédons de la correspondance de Gauss et de Sophie Germain :

1° Une Lettre de Sophie Germain signée Leblanc, non datée, probablement la première de toutes (³);

2° Une Lettre de Gauss, datée de Brunswick le 20 août 1805 (⁴).

3° La réponse de Sophie Germain (⁵);

4° Une Lettre de Gauss, datée du 16 juin 1806, en réponse à la précédente (⁶);

5° Une Lettre de Gauss, datée du 19 janvier 1808 (⁷).

Entre la première et la seconde des pièces que nous venons de citer, il y a une lacune évidente pour le lecteur; entre la quatrième et la cinquième, il faut placer d'abord la Lettre de Sophie Germain, datée du 22 février 1807, à laquelle Gauss fait allusion au début de sa Lettre du 30 avril; on peut supposer ensuite une réponse à cette Lettre du 30 avril. Ces vides seraient fort regrettables si les quelques fragments inédits qui se rapportent aux *Disquisitiones arithmeticæ*, dans les papiers de Sophie Germain, ne nous offraient un moyen à peu près sûr de les combler.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques — auquels pour le dire en

---

(¹) *Göttingische gelehrte Anzeigen*, der erste Band auf das Jahr 1825, cité par Jacobi (*De residuis cubicis commentatio numerosa*) dans le *Journal de Crelle*, t. 2, p. 66, lignes 10-13; 1827.

(²) *Gauss Werke*, 2<sup>ter</sup> Band, p. 65 et suivantes.

(³) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain*. Édition Stupuy, p. 298.

(⁴) *Ibid.*, p. 306.

(⁵) *Ibid.*, p. 308.

(⁶) *Ibid.*, p. 302.

(⁷) *Ibid.*, p. 318.

passant je dois surtout la heureuse situation, dont j'ai joui pendant la vie de notre duc, le (*sic*) victime malheureux de son attachement fidel (*sic*) à la maison de Prusse.....

Ce duc est le duc Charles-Guillaume-Ferdinand, né le 9 octobre 1735 et mortellement blessé à la bataille d'Auerstaedt (1806); c'est à lui que sont dédiées les *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soit $p$ un nombre premier. Soient les $p - 1$ nombres inferieurs à $p$ partagés en deux classes

$$\begin{array}{l} A \ldots 1, 2, 3, 4, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}(p-1), \\ B \ldots \tfrac{1}{2}(p+1), \quad \tfrac{1}{2}(p+3), \quad \tfrac{1}{2}(p+5), \quad \ldots, \quad p-1. \end{array}$$

Soit $a$ un nombre quelquonque non divisible par $p$. Multipliés tous les nombres A par $a$; prenés en les moindres residus selon le module $p$, soient, entre ces residus, $\alpha$ appartenants à A et $\beta$ appartenants à B de sorte que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que $a$ est residu quarré de $p$ lorsque $\beta$ est pair, non residu lorsque $\beta$ est impair.

On peut tirer de cette proposition plusieurs consequences très remarquables; entre-autres, elle donne le moïen d'étendre l'induction, par laquelle on rassemble des cas speciels du theoreme fondamental *aussi loin qu'on veut*, ce qui ne pourroit se faire par les methodes exposés, art. 106-124.

J'ai donné dans mon ouvrage deux demonstrations rigoureuses de ce fameux theoreme, et j'en possede encor *trois autres* toutes entierement differentes entre elles; deux d'entre elles même peuvent être conduites de deux differentes manieres chaqu'une: ainsi je pourrois soutenir que je peus le demontrer de *sept* manieres differentes. Les autres demonstrations que je prefererois pour l'elegance aux deux données dans mon ouvrage, seront publiées aussitot que j'y trouverai l'occasion.

Des trois démonstrations ultérieures que Gauss mentionne dans ce passage, la première a été communiquée à la Société Royale des Sciences de Göttingue, le 15 janvier 1808, et imprimée dans le XVI[e] volume des *Commentaires* de cette Société (¹); la seconde a été communiquée à la même Société le 24 août 1818 et imprimée dans le Volume I de ses *Nouveaux Commentaires* (²); la troisième

(¹) *C.-F. Gauss Werke*, t. II, p. 4-8. Göttingue, 1808.
(²) *Ibid.*, t. II, p. 47-64; 1811.

a été communiquée le 10 février 1817 et imprimée dans le IV$^e$ Volume des *Nouveaux Commentaires* (¹).

A propos des corrections suivantes aux *Disquisitiones arithmeticæ* :

Page 146 [cas (4)] l. 21 lisés comme il suit : « Facile vero perspicitur, ex ista aequatione deduci posse haec $a'pRh$, ...($\alpha$), $\pm ahRa'$... ($\beta$), $\pm ahRp$... ($\gamma$). Ex ($\alpha$) sequitur, perinde ut in (2), $h$ vel utriusque $a'$, $p$ vel neutrius residuum esse. Sed casus prior ideo est impossibilis, quod ex $hRa'$ et ($\beta$) sequeretur $aRa'$ contra hypoth. Quamobrem necessario est $hNp$ adeoque, per ($\gamma$) $aNp$. Q. E. D. »

Au reste à la page 144 il se trouve une faute d'impression non indiquée, savoir art. 139, ligne 3, au lieu de $\pm aNp$, il faut lire $\pm aRp$.

On peut remarquer que le second *lapsus* a été corrigé dans la traduction française (²).

J'aurois repondu plus tot à votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par Mr. Olbers m'a un peu distrait.

Cette nouvelle planète est *Vesta*, entrevue pour la première fois, comme on sait, le 29 mars 1807 (³).

Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978″ par jour. L'inclinaison de l'orbite de 7° 6′. L'excentricité 0,1.

Les chiffres exacts sont pour le moyen mouvement de Vesta 909,978″, pour son inclinaison 7° 5′ 49″,5, pour son excentricité 0,097505 (⁴).

Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

Il s'agit dans ce passage du fameux Ouvrage de Gauss imprimé

(¹) *C.-F. Gauss Werke*, t. II, p. 159-164; 1818.

(²) *Recherches arithmetiques*, trad. Poullet-Delisle. Paris, 1807, p. 103.

(³) *Astronomisches Jahrbuch für Berlin*, 1807, p. 211.

(⁴) *Monatliche Correspondenz*, Band XV, p. 590-600; Juni 1807. *Gauss Werke*, t. VI, p. 287.

en latin sous le titre : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Hamburgi, sumtibus Friderici Perthes et J.-H. Besser, 1809. Dans une Lettre datée du 19 janvier 1808, Gauss écrit à Sophie Germain (¹).

L'ouvrage sur le calcul des orbites des planètes dont je vous ai parlé dans ma dernière lettre est enfin sous presse. J'espère qu'il sera achevé dans quelques mois. Je n'ai pas redouté la peine de le traduire *en latin* afin qu'il puisse trouver un plus grand nombre de lecteurs.

Ces curieux détails et les précieuses remarques que nous avons citées constituent pour M. le prince Boncompagni un nouveau titre à la reconnaissance des géomètres. C. H.

---

**GRAM (J.-P.). — Om Rækkeudviklinger, bestemte vid Hjælp af de mindste Kvadraters Methode (²). — Kjöbenhavn, 1879. In-8°, 122 pages.**

Soit donnée la forme d'une série convergente à coefficients inconnus, qui doit représenter soit une fonction qui prend des valeurs données pour certaines valeurs de l'argument, soit une fonction donnée, et supposons qu'on veuille se contenter d'un nombre de termes de cette série fixé d'avance. L'auteur s'est proposé de déterminer les coefficients de manière que la série donne alors la meilleure approximation aux valeurs données ou, dans un intervalle donné, à la fonction donnée, ce qui n'a pas lieu ordinairement si l'on prend les coefficients des premiers termes de la série infinie qui représenterait exactement la fonction. L'auteur regarde comme la meilleure l'approximation où la somme des carrés des différences des valeurs données $o$ et de celles qui résultent de la série, ces carrés étant multipliés par les poids $v$, est un minimum; dans le cas d'une fonction continue, la somme sera remplacée par une intégrale définie.

L'auteur résout son problème en substituant aux fonctions qui

---

(¹) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain.* Édition Stupuy, p. 320.

(²) *Sur des développements en séries au moyen de la méthode des moindres carrés.* Thèse soutenue à l'Université de Copenhague.)

forment, aux coefficients inconnus près, les termes de la série donnée, des fonctions linéaires $\psi$ de ces fonctions données, qui dépendent encore du poids $\nu$ et qui satisfont à la condition

$$\Sigma \nu \psi_i \psi_k = 0,$$

la somme $\Sigma$ étant étendue à toutes les valeurs de l'argument pour lesquelles on connaît les valeurs $o$ de la fonction cherchée. En faisant usage de ces nouvelles fonctions $\psi$, il faut prendre le nombre demandé de termes de la série suivante :

$$y = \frac{\psi_1 \Sigma \nu \psi_1(o)}{\Sigma \nu \psi_1^2} + \frac{\psi_2 \Sigma \nu \psi_2(o)}{\Sigma \nu \psi_2^2} + \frac{\psi_3 \Sigma \nu \psi_3(o)}{\Sigma \nu \psi_3^2} + \ldots.$$

Cette série s'appelle une série d'interpolation.

Si le nombre des termes est égal à celui des valeurs données $o$, l'expression trouvée sera exacte. On peut se demander si la même chose a lieu dans le cas où la série doit représenter une fonction continue donnée, si l'on prend un nombre infini de termes. Cela dépend de certaines conditions de convergence discutées par l'auteur.

L'auteur applique les développements trouvés à des fonctions continues données. La série, devant remplacer dans l'intervalle depuis 0 à 1 (et d'autres intervalles donnés peuvent se réduire à celui-ci) une série développée suivant des puissances de $x$, sera développée suivant des fonctions sphériques. Les séries de Fourier et les développements suivant des fonctions de Bessel ou des fonctions cylindriques sont aussi des séries d'interpolation. Ces développements utiles se présentent ainsi d'un point de vue commun.

L'auteur applique ensuite sa méthode à des fonctions dont les valeurs sont données pour des arguments équidistants et à des égalisations de résultats numériques trouvés par observation.

---

HEIBERG (J.-L.). — QUÆSTIONES ARCHIMEDEÆ. Inest de arenæ numero libellus. — Hauniæ, 1879. In-8°, 168 pages en latin et 30 pages en grec ([1]).

L'auteur philologue, qui prépare une édition grecque des œuvres

---

([1]) Thèse soutenue à l'Université de Copenhague.

d'Archimède, s'occupe ici de la vie, des écrits, des machines, de l'Arithmétique et du dialecte du grand géomètre grec, et ajoute, comme spécimen de l'édition qu'il se propose, sa restauration du texte grec du Mémoire sur le nombre des grains de sable (*Arenaria*). Le Chapitre sur l'Arithmétique d'Archimède, où il expose et critique, par exemple, les différentes hypothèses sur le calcul des racines carrées d'Archimède, montre qu'il possède les connaissances mathématiques, et en particulier des Mathématiques de l'antiquité, indispensables pour la tâche qu'il s'est proposée.

KLEIN (F.). — WEITERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS IKOSAEDER. — Mathem. Ann., t. XII, p. 503-560.

GORDAN (P.). — UEBER DIE AUFLÖSUNGEN DER GLEICHUNGEN 5-TEN GRADES. — Math. Ann., t. XIII, p. 375-404.

KLEIN (F.). — UEBER DIE TRANSFORMATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN UND DIE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN 5-TEN GRADES. — Math. Ann., t XIV, p. 111-172.

On a rendu compte dans le *Bulletin* des recherches faites antérieurement sur les formes binaires qui se reproduisent par des transformations linéaires; on a indiqué comment l'étude de la forme binaire du douzième degré, représentée géométriquement par les douze sommets d'un icosaèdre régulier, se relie étroitement à la théorie de l'équation générale du cinquième degré (1). C'est cette connexion même entre les deux questions que M. Klein et M. Gordan ont prise pour point de départ de leurs recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Dans le premier des Mémoires dont nous rendons compte, on montre comment les soixante mouvements de rotation qui ramènent l'icosaèdre sur lui-même se décomposent en douze sous-groupes et comment on est ainsi conduit à une résolvante du cinquième degré. La liaison de

(1) D'un autre côté, ces recherches trouvent une application directe dans la théorie des équations linéaires du second ordre intégrables algébriquement.

cette dernière avec les racines de l'*équation icosaédrique* conduit aux développements algébriques obtenus par MM. Kronecker et Brioschi et dont une partie était restée sans démonstration, et fournit une méthode très simple qui ramène au problème de l'icosaèdre la résolution de l'équation générale du cinquième degré.

Dans son Mémoire, M. Gordan obtient explicitement l'expression des racines d'une équation du cinquième degré au moyen des irrationnelles icosaédriques, et cela sous une forme appropriée au calcul numérique. Les méthodes algébriques étant ainsi exposées et poussées suffisamment loin, M. Klein, dans le dernier Mémoire, tourne ses efforts du côté des fonctions elliptiques; pour approfondir la question, il est nécessaire de donner à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques une base nouvelle : le travail de M. Klein sert ainsi de transition à des recherches ultérieures ([1]).

On peut dire, en premier lieu, comme résultat définitif de ces divers travaux, que la forme binaire du douzième degré représentée géométriquement par l'icosaèdre constitue la base véritable d'une théorie rationnelle de l'équation du cinquième degré. En second lieu, les remarques qui suivent ne sont pas sans importance pour la théorie des équations algébriques.

1° Le fondement de toutes les recherches sur les équations algébriques se trouve dans la théorie de Galois ; mais cette théorie ne fournit pas tous les éléments dont on a besoin pour le problème de la résolution. Deux équations peuvent avoir le même groupe (au sens de Galois) sans qu'il soit possible de passer rationnellement de l'une à l'autre, et la résolution d'une des équations peut être essentiellement plus facile que celle de l'autre : par exemple, l'équation icosaédrique est une équation du soixantième degré, dont le groupe embrasse soixante substitutions ; elle est, au sens de Galois, sa propre résolvante ; l'équation générale du cinquième degré, en lui adjoignant la racine carrée de son discriminant, a le même groupe; mais il n'est pas possible de la réduire à une équation icosaédrique tant qu'on ne lui a pas adjoint au moins une telle *racine carrée,* laquelle n'a aucune influence sur le caractère du groupe de

([1]) *Ueber die Transformation 7-ten Ordnung der elliptischen Functionen* (*Math. Ann.*, t. XIV).

Galois. Un travail de M. Kronecker, de 1861, contient déjà des résultats analogues.

2° La théorie des invariants joue également un rôle important dans les mêmes recherches; mais les choses ne se passent pas comme pour les équations des deuxième, troisième et quatrième degrés; pour ces équations, il est avantageux de regarder le premier membre comme une forme binaire et d'étudier cette forme dans le sens de la théorie des invariants. C'est de cette façon que, dans les travaux de M. Brioschi et de M. Hermite, est traité le premier membre de l'équation du cinquième degré, dont les invariants servent de point de départ aux recherches ultérieures. Mais les méthodes qui réussissent pour les équations dont le degré est inférieur à 5 ne présentent plus le même avantage quand on veut les appliquer aux équations de degré supérieur. Les racines de l'une des premières équations jouissent en effet de cette propriété de pouvoir se permuter au moyen de transformations linéaires binaires, ce qui n'a plus lieu pour l'équation du cinquième degré. Il est beaucoup plus avantageux de relier les équations de degré supérieur à des formes qui se reproduisent par des transformations linéaires, mais qui ne sont plus nécessairement binaires. Pour l'équation du cinquième degré, il existe encore, en fait, une telle forme binaire; seulement elle est du douzième degré. Le système qui, au sens de la théorie des invariants, appartient à cette forme, et qui d'ailleurs possède le caractère le plus simple, joue dans ces recherches le rôle le plus important.

1. L'icosaèdre est une forme binaire déterminée du douzième ordre $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, dont le système complet se réduit au hessien H et au déterminant fonctionnel $(f, \mathrm{H}) = \mathrm{T}$, dont le carré s'exprime linéairement au moyen de $f^5$ et de $\mathrm{H}^3$; on peut donner à $f$ la forme canonique

$$(1) \qquad f = \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}),$$

et l'on a

$$(2) \qquad \mathrm{T}^2 = 12 f^5 - 12^4 \mathrm{H}^3.$$

On peut énoncer ainsi le problème fondamental : *Étant données les valeurs de $f$ et de* T, *trouver les valeurs correspondantes de* $\eta_1$,

$\eta_2$. Une fois ce problème résolu pour la forme canonique, il l'est aussi pour la forme générale. Le rapport $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ dépend, à cause de l'équation (1), d'une équation du soixantième degré; c'est cette équation que l'auteur appelle *équation icosaédrique*. Elle a la forme suivante, quand on emploie la forme canonique :

$$(3) \qquad \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad 1728\, \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Dans le cas général, au contraire, elle est

$$(3\ bis) \qquad -\frac{5 \cdot 144 \cdot H^3(\eta_1, \eta_2)}{7 \cdot B f^5(\eta_1, \eta_2)} = X,$$

où B est un invariant rationnel et du premier degré par rapport aux coefficients de $f$, X est le *paramètre* de l'équation icosaédrique. La propriété capitale de cette équation consiste en ce que les soixante racines $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ se déduisent d'une racine quelconque au moyen de substitutions linéaires, indépendantes de X. Pour la forme canonique, les racines sont

$$0, \quad \infty, \quad (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu, \quad (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu, \quad \left[\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

d'où l'on déduit les soixante substitutions

$$(4) \qquad \begin{cases} \eta' = \varepsilon^\nu \eta, \\ \eta' = -\dfrac{\varepsilon^\nu}{\eta}, \\ \eta' = \varepsilon^\mu \dfrac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)}, \\ \eta' = -\varepsilon^\mu \dfrac{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}, \\ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Ces substitutions, au moyen de transformations linéaires, donnent les substitutions correspondantes pour la forme générale. De ce groupe de soixante substitutions d'une variable unique $\eta$ on peut déduire un groupe de soixante couples de substitutions binaires à déterminant $+1$, en remplaçant $\eta$ par $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ et $\eta'$ par $\frac{\eta'_1}{\eta'_2}$ et en séparant les numérateurs et les dénominateurs.

Toute fonction des racines de l'équation icosaédrique peut, au moyen des formules (4), s'exprimer au moyen d'une seule racine. Ces substitutions (4) forment le groupe de Galois pour l'équation icosaédrique. On obtient immédiatement les résultats suivants au moyen de la représentation conforme (SCHWARZ, *Journal de Borchardt*, t. 70). La sphère des $\eta$ est décomposée par les plans de symétrie de l'icosaèdre en cent vingt triangles alternativement égaux et symétriques dont les angles sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$; les soixante triangles d'une espèce, les soixante triangles de l'autre représentent les demi-plans positifs ou négatifs des X. Les soixante racines d'une équation icosaédrique sont toujours représentées par soixante points homologues des triangles correspondants et les permutations dans le groupe de Galois s'obtiennent par les soixante rotations qui ramènent l'icosaèdre sur lui-même. Au moyen de ces soixante rotations, on peut former des sous-groupes de 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12 substitutions, dont les trois premiers appartiennent au type de la division du cercle, les trois suivants au type de la double pyramide, et le dernier au type du tétraèdre. Les groupes de points qui, pour ces sous-groupes, restent invariables fournissent des résolvantes de l'équation de l'icosaèdre, et les degrés de ces résolvantes sont respectivement 30, 20, 12, 15, 10, 6, 5.

On obtient une résolvante du sixième degré au moyen des six couples de points opposés de l'icosaèdre. Soit $\varphi(\eta_1, \eta_2) = 0$ un tel couple de points, dont le déterminant soit égal à $+5$, $z = \varphi^2$ sera une fonction à six valeurs, racine de l'équation

$$z^6 - 10fz^3 + 144Hz + 5f^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal, sauf un facteur numérique, à $T^4$. Lorsque l'on donne, comme on l'a supposé, la valeur de T, on connaît ainsi la racine quatrième du discriminant; dans les autres cas, la racine carrée de ce discriminant est connue rationnellement. Cette équation est un cas spécial de l'équation du multiplicateur de Jacobi pour la transformation du cinquième ordre dans la théorie des fonctions elliptiques, et c'est là le point de départ des recherches de M. Kronecker sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

La résolvante du cinquième degré correspond au sous-groupe du type du tétraèdre. Pour un tel sous-groupe, douze rotations laissent invariables deux tétraèdres réguliers $\tau_1$ et $\tau_2$ formant ensemble les arêtes d'un cuboïde (*Würfel*) W, puis un octaèdre $t$ et l'agrégat des douze points correspondants. Mais pour les fonctions les plus simples qui soient racines de la résolvante du cinquième degré, on doit évidemment choisir $t(\eta_1, \eta_2)$ et $W(\eta_1, \eta_2)$, parce que ce ne sont pas les fonctions $\tau_1(\eta_1, \eta_2)$ et $\tau_2(\eta_1, \eta_2)$ qui se reproduisent, mais bien leurs cubes. On obtient les cinq octaèdres $t(\eta_1, \eta_2)$ au moyen de l'équation du cinquième degré

$$t^5 - 10t^3f + 45tf^2 - 12T = 0, \tag{6}$$

qui est un cas particulier de la résolvante de Brioschi pour l'équation de Jacobi du sixième degré; quant à l'équation en W, elle est

$$W^5 + 40f^2W^2 - 720fHW + 12^4H^2 = 0. \tag{7}$$

Des valeurs de $t_\nu$ et de $W_\nu$ on déduit, par le procédé suivant, une résolvante générale dont les racines $y$ satisfont aux conditions $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$. Posant

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_\nu &= 24f^2 - 7ft_\nu^2 + t_\nu^4, \\ y_\nu &= \frac{\lambda f W_\nu}{H} + \frac{\mu\sigma_\nu}{f^2}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où $\lambda$, $\mu$ sont des constantes arbitraires, on obtiendra une équation du cinquième degré

$$y^5 + 5Ay^2 + 5By + C = 0, \tag{9}$$

dont les coefficients dépendent seulement du paramètre

$$X = 1728\,\frac{H^3}{f^5}.$$

En choisissant le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ de façon que $A = 0$, ce qui exige la résolution d'une équation du troisième degré, cette équation prendra la forme donnée par Jerrard.

Pour étudier l'équation générale (du sixième degré) du multiplicateur de Jacobi, équation qu'il introduit dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Klein part encore du problème icosaédrique sous la forme canonique :

*Étant donné un icosaèdre sous la forme canonique, ainsi que les valeurs numériques des invariants simultanés que possède cet icosaèdre, joint à une certaine forme quadratique*

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

*on se propose de déterminer les coefficients de cette dernière forme.*

Le système simultané se compose du discriminant $A = A_0^2 + A_1 A_2$ de la forme quadratique et de trois formes $B'$, $C'$, $D$, entre lesquelles existe une relation. Le problème, en lui-même, admet soixante solutions, et, si l'on connait une des formes quadratiques qui constituent ces solutions, on obtient les cinquante-neuf autres en appliquant à $x_1$, $x_2$ les cent vingt substitutions binaires icosaédriques.

On n'obtient ainsi que soixante formes, parce qu'à une substitution binaire en correspond une autre obtenue en changeant seulement le signe des variables. Ce groupe de substitutions est encore le groupe de Galois du nouveau problème.

En regardant les coefficients de la forme quadratique comme les coordonnées trimétriques d'un point d'un plan, on obtient une figure liée étroitement à la représentation plane de la *surface diagonale* du troisième ordre de Clebsch.

Si la forme quadratique est le carré d'un binôme, en sorte que

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2 = (\eta_1 x_2 - \eta_2 x_1)^2,$$

le point $A_0 : A_1 : A_2$ se trouve sur la conique $A = 0$, dont les points représentent le système de quantités $\eta_1 : \eta_2$. La forme $B = 0$ représente un système de quinze droites obtenues en joignant les six points fondamentaux qui répondent à la séparation de $f$ en facteurs du second degré ; cette figure forme dix hexagones de Brianchon.

Les courbes $B' = 0$, $C' = 0$ ne s'interprètent pas aussi simplement; mais, à l'aide de l'équation $A = 0$, on peut les modifier de manière qu'elles aient aux points fondamentaux des points multiples de l'ordre le plus élevé possible. On obtient ainsi deux expressions B et C qui, égalées à zéro, représentent des courbes de degrés 6 et 10, d'espèces 4 et 0, ayant aux points fondamentaux : la première, des points doublés ; la seconde, des couples de points de rebroussement (points quadruples).

L'équation du sixième degré de Jacobi est définie par les équations

$$(z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + 5B^2 - AC = 0,$$
$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2 ;$$

la racine quatrième de son discriminant est, à un facteur numérique près, égal à D. Ainsi, le problème icosaédrique se confond avec la résolution de l'équation de Jacobi, en adjoignant à cette dernière la racine quatrième de son discriminant.

Pour effectuer le calcul, on montre que les racines de l'équation quadratique

$$q = A_1 x_1 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

si on les désigne par $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, dépendent des équations icosaédriques

$$1728 \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X_1,$$
$$1728 \frac{H^3(\zeta_1, \zeta_2)}{f^5(\zeta_1, \zeta_2)} = X_2,$$

dont les paramètres $X_1$, $X_2$ sont des fonctions rationnelles de $\sqrt{A}$, B, C, D.

Le calcul de ces paramètres s'effectue complètement au moyen d'une équation quadratique, et l'on obtient finalement

$$(11) \qquad \begin{cases} A_0 = \eta_2\zeta_2, \quad A_2 = -\eta_1\zeta_1, \\ A_0 = -\dfrac{\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1}{2}. \end{cases}$$

Dans la troisième Partie de son Mémoire, M. Klein expose une méthode nouvelle, fondée sur l'équation icosaédrique, pour la résolution des équations du cinquième degré dans lesquelles la somm des racines et celle de leurs carrés sont nulles, ainsi que cela a lieu dans l'équation (9), obtenue précédemment comme une résolvante.

Toute équation du cinquième degré peut être ramenée à cette forme au moyen de transformations rationnelles. L'auteur emploie les considérations géométriques qui suivent. Les cinq racines $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ d'une équation du cinquième degré, liées entre elles par l'équation de condition $\Sigma y = 0$, sont regardées comme les *coordonnées pentaédriques* d'un point de l'espace, pouvant prendre en général cent vingt positions différentes obtenues par la permutation des cinq racines; les permutations reviennent à des collinéations de l'espace. Si maintenant on a aussi $\Sigma y^2 = 0$, les cent vingt points sont situés sur une surface $\psi$ du second degré; les génératrices de cette surface sont transformées comme il suit par les cent vingt collinéations : pour les soixante collinéations qui résultent de permutations paires des racines, chaque faisceau se reproduit; pour les soixante autres collinéations, les deux faisceaux s'échangent. Les génératrices d'une même espèce constituent une multiplicité *rationnelle* de première dimension, susceptible d'être représentée au moyen d'un paramètre $\lambda$. Une collinéation qui ramène sur lui-même un faisceau de génératrices revient à une transformation linéaire de $\lambda$. Il suit de là, d'après un théorème général, que les soixante valeurs de $\lambda$ relatives aux soixante génératrices d'un même ensemble dépendent d'une équation icosaédrique. Les paramètres des génératrices sont des fractions dont les termes sont des fonctions linéaires et homogènes des $y$. Ces paramètres sont choisis de façon que l'équation icosaédrique se présente sous forme canonique; cela étant fait, on a les racines $y$ en fonction rationnelle des racines de cette équation, ou en fonction rationnelle d'une seule de ces racines.

La forme canonique du paramètre se déduit de l'étude des groupes particuliers de génératrices de chaque faisceau, de ces groupes qui, au lieu de soixante, comprennent douze, vingt et trente droites. On parvient ainsi à former l'équation icosaédrique au moyen des coefficients de l'équation du cinquième degré. Dans les formules finales pour les racines $y$ entre la racine carrée du discriminant de l'équation du cinquième degré, et ainsi cette racine carrée, qui n'a aucune influence sur le nombre des substitutions du groupe de Galois, est nécessaire pour la résolution de l'équation du cinquième degré.

Relativement à la résolution d'une équation icosaédrique, il convient encore de dire qu'elle peut s'obtenir, ainsi qu'on le montre dans les §§ 7-9 de la première Section, au moyen d'une série hypergéométrique, par le quotient de deux solutions particulières de l'équation différentielle hypergéométrique.

II. Dans le travail de M. Gordan, la relation entre l'équation icosaédrique et la résolution de l'équation du cinquième degré où l'on suppose nulles les sommes des racines et des carrés des racines est établie de telle façon, que les expressions qui entrent dans les formules se présentent comme les covariants d'une certaine forme doublement binaire, dont l'auteur cherche d'abord à constituer le système complet.

Représentons par $y_0$ l'icosaèdre

$$y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}),$$

par $y_1$ sa forme hessienne, par $y_3$ le déterminant fonctionnel de $y_0$ et de $y_1$ ; $y_1, y_2, y_3$ forment le *système complet* relativement aux cent vingt substitutions linéaires, c'est-à-dire à toutes les fonctions entières qui ne changent point par les substitutions icosaédriques.

Si maintenant on considère une forme avec deux séries de variables $y_1, y_2$ et $x_1, x_2$, et qu'on applique aux $y$ une de ces substitutions et aux $x$ la substitution obtenue en changeant la racine cinquième de l'unité $\varepsilon$ en $\varepsilon^2$, on peut se demander quelles sont celles de ces formes qui se reproduisent par cette transformation simultanée et chercher à constituer le *système complet* au moyen duquel pourront être composées toutes les formes jouissant de cette propriété.

On obtient, comme forme de moindre degré en $x$ et en $y$,

$$(12) \qquad f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2.$$

On se propose ensuite de trouver les covariants de $f$, en supposant qu'on fasse subir aux variables $x$ et $y$ des transformations linéaires indépendantes l'une de l'autre. En employant le procédé connu sous le nom de *Ueberschiebung*, on pose symboliquement

$$F = a_x^k \alpha_y^l \quad \text{et} \quad \Phi = b_x^m \beta_y^n,$$

$$(F, \Phi)_{\lambda\mu} = (ab)^\lambda a^{k-\lambda} b_x^{m-\lambda} (\alpha\beta)^\mu \alpha_y^{l-\mu} \beta_y^{n-\mu}.$$

On obtient trente-six formes, dont toutes les autres sont des fonctions *entières;* ces trente-six formes s'expriment rationnellement au moyen de cinq d'entre elles.

Pour l'équation du cinquième degré, il y a lieu, ainsi qu'on l'a vu précédemment, de considérer les sous-groupes du type du tétraèdre. Pour les sous-groupes, trois formes fondamentales, que nous désignerons par $g_1, g_2, g_3$, et qui sont du sixième, du huitième et du douzième degré, restent invariables. On peut maintenant chercher le système complet des formes avec deux séries de variables qui se reproduisent quand on fait subir à $y$ et à $x$ deux de ces transformations, dont la seconde se déduira de la première par le changement de $\varepsilon$ en $\varepsilon^2$; la forme la plus simple à laquelle on parvienne est la forme bilinéaire

$$(13) \qquad \chi = -y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2).$$

En appliquant le même procédé que précédemment (*Ueberschiebung*) aux formes $g_1$, $g_2$, $g_3$, $\chi$, on obtient un système de vingt formes; les formes icosaédriques peuvent être composées avec elles; elles s'expriment toutes rationnellement au moyen de cinq d'entre elles. On a en particulier l'équation

$$(14) \qquad \chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi - \psi = 0,$$

dans laquelle les formes icosaédriques $\varphi$ et $\psi$ sont définies par les équations

$$(15) \qquad \varphi = \frac{9}{4}(f, f)_{1,1} \quad \psi = 12(f, \varphi)_{1,1}.$$

En regardant $\chi$ comme inconnue, $f$, $\varphi$, $\psi$ comme données, et en appliquant à $x$ et à $y$ les cent vingt substitutions, on obtient les cinq racines de l'équation (15)

$$(16) \qquad \chi_\nu = -\varepsilon^\nu x_1 y_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1 y_2 - \varepsilon^{3\nu} x_2 y_1 - \varepsilon^{4\nu} x_2 y_2.$$

Mais le produit des différences de ces $\chi_\nu$, égal à la racine carrée du discriminant de l'équation, est une forme $\Delta$ que l'on peut construire avec les formes du système icosaédrique.

Regardant cette racine carrée comme donnée, on peut déduire des relations du système icosaédrique une forme C à l'aide de laquelle on peut déterminer le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ par une équation icosaédrique, puis trouver $\chi$ sous forme rationnelle.

Dans le dernier paragraphe, M. Gordan reprend la question avec la forme de Jerrard et établit la connexion de sa solution avec celle de M. Hermite.

III. Dans le troisième Mémoire, M. Klein établit cette connexion d'une manière nouvelle. Le point de départ de ses recherches est dans une certaine représentation géométrique de la dépendance du rapport des périodes $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ de l'intégrale elliptique $\int \frac{dx}{f(x)}$ et l'invariant absolu $\frac{g_2^3}{\Delta}$ de la forme binaire biquadratique $f(x)$. Si cet invariant parcourt un demi-plan positif (ou négatif), $\omega$ se meut sur un triangle dont les côtés sont formés par des arcs de cercle. Aux sommets de ce triangle, dont les angles sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, o, correspondent les valeurs de J, savoir o, 1, $\infty$. Le plan des $\omega$, d'après le principe de symétrie, est entièrement recouvert de tels triangles, ainsi que M. Dedekind l'a montré dans son Mémoire sur les fonctions modulaires. Ces figures triangulaires jouent le même rôle dans la théorie de la transformation que les parallélogrammes dans celle des fonctions doublement périodiques. Soit J' l'invariant d'une intégrale elliptique se déduisant de la précédente par une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre, $n$ étant un nombre premier. J' et J sont liés entre eux par une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré; la considération du triangle permet d'étudier le système de ramification (*Verzweigung*) de J', regardé comme fonction de J. L'espèce $p$ de la surface de Riemann à employer est nulle pour $n = 2, 3, 5, 7, 13$, et l'on peut ainsi exprimer J et J' en fonctions rationnelles d'un paramètre $\tau$. Ces fonctions rationnelles se déterminent complètement par la multiplicité de certains facteurs, en sorte qu'il y a là une méthode nouvelle pour l'étude des équations de transformation. Pour $n = 5$, 7, 13, on a les équations qui suivent, équations où l'on suppose J et J' exprimés de la même façon au moyen de $\tau$ et de $\tau'$, et où l'on a donné les relations entre $\tau$ et $\tau'$ :

Transformation du cinquième ordre,

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (\tau^2 - 10\tau + 5)^3 \\ &: (\tau^2 - 22\tau + 125)(\tau^2 - 4\tau - 1)^2 : -1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 125;$$

Transformation du septième ordre,

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ &: (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 : 1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 49;$$

Transformation du treizième ordre,

$$\begin{aligned} &J : J - 1 : 1 \\ &\quad = (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 \\ &\qquad : (\tau^2 + 6\tau + 13)(\tau^6 + 10\tau^5 + 46\tau^4 + 108\tau^3 + 122\tau^2 + 38\tau - 1)^2 \\ &\qquad : 1728\tau, \end{aligned}$$

$$\tau\tau' = 13.$$

La variable $\tau$ est une fonction de $q = e^{i\pi\omega}$ qui, dans les cas considérés, est égale à

$$125M^2, \quad 49M^2, \quad 13M,$$

où

$$M = \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{6n}} \Pi\left(1 - q^{\frac{2r}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}} \Pi(1 - q^{2r})^2}.$$

M. Klein se pose ensuite la question suivante : Quelle est la relation de l'équation de Jacobi du sixième ordre et de l'équation icosaédrique avec l'équation de transformation ainsi obtenue pour $n = 5$?

Le passage de l'équation de Jacobi du sixième degré, dans le cas où $A = 0$, se fait immédiatement en posant $\tau = z^3$ dans l'équation obtenue pour $n = 5$ entre J et $\tau$ et en prenant les racines cubiques des deux membres.

On obtient ainsi

$$z^6 - M z^3 + 12 \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} z + 5 = 0,$$

équation qui a été utilisée par M. Kronecker dans sa résolution de l'équation du cinquième degré, qui, toutefois, se présente dans son travail sous une forme plus compliquée, parce qu'il considère le module $k^2$ au lieu des invariants rationnels $g_2$ et $\Delta$.

Pour l'équation icosaédrique, elle s'obtient en formant la résolvante de Galois de l'équation qui relie J et J′ (pour $n = 5$), et c'est de plus la forme la plus simple de cette résolvante. Sa racine, regardée comme fonction de J, se ramifie de façon que, des soixante feuillets de la surface de Riemann il y en ait trois, quatre et cinq qui, respectivement, se réunissent pour $J = 1, 2, \infty$.

Par suite, $p$ est encore nul, et l'on peut obtenir la résolvante de Galois sous sa forme la plus simple en introduisant comme inconnue la fonction $\eta$, qui, sur la surface de Riemann, ne prend qu'une fois chaque valeur, et l'on trouve l'équation icosaédrique

$$J = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}.$$

La relation entre $\eta$ et $\omega$ se représente géométriquement de la façon suivante : $\eta$ se meut sur un des cent vingt triangles aux angles $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ que les plans de symétrie de l'icosaèdre découpent sur la sphère lorsque $\omega$ se meut sur un des triangles dont nous avons précédemment expliqué la formation. Analytiquement cette relation s'obtient au moyen de la formule connue

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = q^{-\frac{2}{5}} \frac{1 + q^2 - q^6 - q^{14} - q^{16} - q^{28} + \ldots}{-1 + q^{10} + q^{20} - q^{50} + \ldots}.$$

La signification de l'équation icosaédrique dans la transformation du cinquième degré se trouve ainsi complètement établie; finalement M. Klein déduit de la théorie de l'icosaèdre les formules utilisées par MM. Hermite et Brioschi pour la résolution de l'équation du cinquième degré. Il reste à prouver que pour les irrationnelles icosaédriques existent des équations modulaires. Or, si J et J′ sont liés par une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre, $n$ étant un nombre premier différent de $f$, il y a aussi entre les irrationnelles icosaédriques correspondantes $\eta$, $\eta'$ une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré. En prenant $n=2$, on tombe sur une équation du troisième degré qui fournit le moyen de passer de l'icosaèdre à la forme de Jerrard et résout ainsi la question posée.

---

HATTENDORFF (K.). — ALGEBRAISCHE ANALYSIS. Hannover, 1877. — In-8°, 298 pages.

M. Hattendorff se plaint dans sa Préface du dédain que professent pour les méthodes purement algébriques les étudiants en Mathématiques, qui, à peine sortis du Gymnase, veulent, sans avoir reçu la préparation suffisante, aborder de suite le Calcul infinitésimal. Son Livre est destiné à leur faciliter cette préparation.

Il est divisé en deux Parties, dont la première est consacrée aux nombres réels, la seconde aux nombres complexes.

Après avoir introduit la notion de limite, M. Hattendorff applique cette notion à la détermination de la mesure du cercle, regardé comme limite de polygones réguliers inscrits ou circonscrits dont le nombre de côtés augmente indéfiniment, à la définition du nombre $\pi$, à la recherche de la valeur limite de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x=0$, à la définition du nombre $e$, obtenu sans l'intermédiaire de la série, comme la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)$, pour $m$ infini.

L'auteur s'occupe ensuite des séries tant à termes positifs qu'à termes positifs ou négatifs; la règle de convergence de Gauss, dans toute sa généralité, aurait pu être donnée dans ce Chapitre. Puis il introduit les séries doublement infinies, dont on devrait, aussi bien, dire quelques mots dans les Cours de Mathématiques spéciales; le théorème sur la multiplication des séries trouve là sa place naturelle.

Vient ensuite la définition des fonctions continues et uniformes: les fonctions entières, les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable, tant qu'elles sont convergentes, sont continues.

Ces préliminaires établis, on passe à l'étude des fonctions simples $(1+x)^m$, $a^x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctang} x$ et des séries qui les représentent.

Telles sont les matières contenues dans la première Partie.

L'introduction des nombres complexes exige des définitions nouvelles pour les opérations élémentaires, pour la fonction exponentielle et la fonction logarithmique, les fonctions circulaires; la fonction exponentielle, dont la définition est le point de départ de toutes les autres définitions, est regardée comme la limite, pour $m$ infini, de

$$\left(1+\frac{x+iy}{m}\right).$$

Il est ensuite nécessaire d'étendre aux nombres complexes la notion des séries infinies, de préciser ce qu'il faut entendre par la fonction d'une quantité complexe et par la continuité d'une telle fonction, d'étendre enfin les notions ainsi acquises aux fonctions et aux séries simples déjà étudiées; enfin, tout en restant dans le domaine de l'Algèbre, il convient d'introduire la notion de dérivée et de montrer le parti qu'on peut en tirer dans cette science; les propositions fondamentales sur la possibilité de développer en série une fonction continue et uniforme et sur la forme de ce développement trouvent là leur place.

M. Hattendorff passe ensuite à l'étude des produits infinis; $\sin x$ et $\cos x$ sont mis sous cette forme. Quelques mots sont même consacrés aux fonctions doublement périodiques et à la transformation, par une méthode due à Cauchy, des produits qui figurent au numérateur et au dénominateur de ces fonctions en séries infinies.

Après la décomposition en facteurs, vient naturellement la décomposition en fractions simples. C'est dans ce Chapitre que sont placés le théorème sur la variation du logarithme d'une fonction dont la variable indépendante ou plutôt le point qui la figure décrit un contour simple, et le théorème fondamental sur la décomposition en facteurs d'une fonction entière, qui peut en être regardé comme une conséquence; on peut ensuite aborder la décomposition des fractions rationnelles, et, plus généralement, du quotient de deux produits infinis; l'application à la fonction tang$x$ est tout indiquée.

Enfin le dernier Chapitre est consacré aux fractions continues.