Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Cyparissos Stephanos

Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 424-456

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_424_1>

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES DESMIQUES DE TROIS TÉTRAÈDRES;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Les systèmes de trois tétraèdres formant trois surfaces d'un faisceau du quatrième ordre, systèmes qu'on peut appeler *desmiques* (de δέσμη, faisceau), jouent dans la Géométrie de l'espace le même rôle que les systèmes de quatre triangles appartenant à un même faisceau de cubiques dans la Géométrie du plan.

Cependant, tandis que ces derniers systèmes ont été l'objet des recherches de plusieurs géomètres et que leurs propriétés sont maintenant bien connues, l'existence des systèmes desmiques de trois tétraèdres à peine, autant que nous savons, a été entrevue.

Dans le présent travail, nous avons tenté d'exposer quelques-unes des propriétés les plus remarquables d'un système desmique de trois tétraèdres, en nous réservant de compléter cette étude, dans une certaine mesure, une autre fois, à l'aide de considérations différentes.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DESMIQUE DE TROIS TÉTRAÈDRES.

1. On remarque sur trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique douze sommets E, douze faces F et dix-huit arêtes G [1].

---

[1] Il convient de noter ici que la recherche que nous allons entreprendre se rapporte à des tétraèdres n'offrant aucune particularité projective dans la disposition de leurs faces.

Nous n'examinerons donc pas ici les faisceaux ponctuels de cônes concentriques du quatrième ordre comprenant trois cônes formés de quatre plans. Nous remarquerons seulement qu'on arrive à des faisceaux de ce genre en projetant d'un point de l'espace la section plane d'un faisceau comprenant trois tétraèdres proprement dits.

Nous dirons qu'un point E et un plan F sont *opposés* lorsqu'ils forment deux éléments opposés d'un des tétraèdres A, B, C; nous appellerons de même deux droites G *opposées* lorsqu'elles forment deux arêtes opposées d'un de ces mêmes tétraèdres.

Nous emploierons aussi quelquefois, pour abréger, les expressions *un couple de droites* G, *un couple d'arêtes d'un tétraèdre,* au lieu de ces autres *un couple de droites* G *opposées, un couple d'arêtes opposées d'un tétraèdre.*

2. Les seize droites L formant l'intersection commune des trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique sont distribuées par quatre sur les douze plans F. Par chacune de ces droites L passent trois plans F appartenant respectivement aux tétraèdres A, B, C.

Par le point d'intersection e de deux droites L *situées dans un plan* F *passent toujours deux autres droites* L. *Ces quatre droites* L *prises deux à deux déterminent six plans* F, *groupés en trois paires; les plans de ces paires appartiennent respectivements aux tétraèdres* A, B, C *et se coupent suivant trois droites* G *passant par e.*

Toute droite L est rencontrée par neuf autres droites L, situées par trois sur les trois plans F passant par la première et convergeant aussi par trois vers trois points *e* situés sur la première.

Les droites L *se rencontrent donc quatre par quatre, en* $\frac{16.3}{4} = 12$ *points e.*

3. Sur toute droite G se trouvent $\frac{12.3}{18} = 2$ points *e*. Les huit droites L passant par ces deux points sont situées par quatre sur les deux plans F dont l'intersection est formée par la droite G considérée.

Par ces mêmes points passent deux à deux les faces des tétraèdres A, B, C, auxquels n'appartient pas la droite G considérée, de manière que les arêtes de ces tétraèdres qui passent par l'un de ces points sont opposées à celles qui passent par l'autre.

Pour que deux tétraèdres déterminent un faisceau du quatrième ordre comprenant un troisième tétraèdre, il faut donc que chacune des arêtes de l'un rencontre deux arêtes opposées de l'autre, ou bien *il faut que chaque couple d'arêtes opposées de l'un s'appuie sur un couple d'arêtes opposées de l'autre.*

On peut dire de deux tétraèdres offrant entre eux cette dernière disposition qu'*ils s'appuient entre eux par leurs arêtes.*

4. Considérons maintenant un point $e(e_0)$ et les trois droites G appartenant respectivement aux tétraèdres A, B, C et passant par ce point. Sur chacune de ces trois droites se trouve un nouveau point e par lequel passent les droites G opposées aux deux autres; ces trois points e_1, e_2, e_3 forment donc un triangle dont les trois côtés e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 coïncident respectivement avec les droites G opposées aux trois droites e_0e_1, e_0e_2, e_0e_3. Les quatre points e_0, e_1, e_2, e_3 forment ainsi les sommets d'un nouveau tétraèdre, dont les trois couples d'arêtes opposées appartiennent respectivement aux tétraèdres A, B, C.

On obtient de la sorte trois nouveaux tétraèdres a, b, c, ayant pour sommets les douze points e.

Nous avons vu précédemment que deux quelconques des tétraèdres d'un système desmique s'appuient entre eux par leurs arêtes. Nous découvrons maintenant de plus que les couples d'arêtes de deux quelconques de ces tétraèdres appuyés sur un même couple d'arêtes du troisième s'appuient aussi entre eux de façon à former avec ce troisième couple les six arêtes d'un nouveau tétraèdre.

Pour que trois tétraèdres A, B, C *appartiennent à un même faisceau du quatrième ordre, il faut donc que de leurs arêtes se composent trois nouveaux tétraèdres a, b, c, ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes.*

5. Par chacune des quatre droites L situées sur une face d'un des tétraèdres A, B, C passe une face de chacun des deux autres tétraèdres. *Deux quelconques de ces tétraèdres sont donc situés en homologie (ou en perspective) de quatre manières différentes; les quatre faces du troisième tétraèdre sont les bases de ces homologies* (1).

---

(1) La seule mention que nous connaissions de deux tétraèdres situés en perspective de quatre manières différentes se trouve dans le Mémoire de Cremona : *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal*, n° 33 (*R. Accad. dei Lincei, Mem. della classe di Scienze fis., matem. e natur.*, 1877).

Réciproquement : *Lorsque deux tétraèdres sont situés en homologie de quatre manières différentes, le tétraèdre formé par les quatre bases d'homologie appartient au faisceau déterminé par les deux premiers.* En effet, les seize droites suivant lesquelles les quatre bases d'homologie coupent les faces de l'un de ces tétraèdres coïncident avec les droites suivant lesquelles les mêmes bases coupent les faces de l'autre.

6. Tâchons maintenant de préciser la nature des quatre homologies suivant lesquelles on peut faire correspondre entre eux deux tétraèdres d'un système desmique.

Dans toute correspondance homologique entre deux espaces, deux droites homologues, si elles ne se confondent pas, se rencontrent en un point coïncidant avec son homologue, situé dans la base d'homologie, et déterminent un plan coïncidant aussi avec son homologue, passant par le centre d'homologie. Une droite ne peut être sa propre homologue que si elle appartient à la base d'homologie ou si elle passe par le centre d'homologie. On sait de plus que pour qu'une homologie soit involutive il suffit que deux éléments distincts de l'espace se permutent entre eux par elle.

Conformément à cela, dans toute correspondance homologique entre deux tétraèdres A et B d'un système desmique, à tout couple d'arêtes de A correspond celui des couples d'arêtes de B sur lequel il s'appuie. Le tétraèdre a déterminé par deux couples homologues a de plus deux arêtes appartenant au troisième tétraèdre C du système et coïncidant avec leurs homologues. En effet, l'une de ces deux arêtes est située sur la base d'homologie et joint deux sommets de a correspondant à eux-mêmes, tandis que l'autre passe par le centre d'homologie et forme l'intersection de deux faces de a correspondant à elles-mêmes.

Le tétraèdre a se transforme donc en lui-même, de sorte que ses deux autres sommets situés sur l'arête passant par le centre d'homologie se permutent entre eux et que ses deux autres faces passant par l'arête appartenant à la base d'homologie se permutent aussi entre elles.

Nous reconnaissons ainsi que :

Les quatre correspondances homologiques de deux des tétraèdres A, B, C *d'un système desmique doivent être involutives.*

7. Nous venons de voir comment dans toute correspondance homologique entre les tétraèdres A et B, aussitôt qu'une arête de C est située sur la base d'homologie, l'arête opposée passe par le centre d'homologie. On en déduit que :

Dans toute correspondance homologique de deux des tétraèdres d'un système desmique, ayant pour base une face F *du troisième tétraèdre, le centre d'homologie coïncide avec le sommet* E *opposé à cette face.*

De ce fait il s'ensuit que :

Les points E *opposés aux trois plans* F *passant par une droite* L *sont situés sur une même droite* Λ.

Ces droites Λ sont donc au nombre de seize et convergent par quatre aux quatre sommets de chacun des tétraèdres A, B, C. Par conséquent :

Les sommets de trois tétraèdres appartenant à un même faisceau ponctuel du quatrième ordre forment trois enveloppes de la quatrième classe appartenant à un même faisceau tangentiel.

8. A ce même fait se rattachent les particularités suivantes :

Deux sommets quelconques d'un des tétraèdres A, B, C sont séparés harmoniquement par les arêtes opposées des deux autres tétraèdres sur lesquelles s'appuie la droite G joignant ces deux sommets.

Deux quelconques des trois points E situés sur une droite Λ sont séparés harmoniquement par le troisième point E et le plan F opposé à ce point.

Deux faces quelconques d'un des tétraèdres A, B, C sont séparées harmoniquement par les arêtes opposées des deux autres tétraèdres sur lesquelles s'appuie la droite d'intersection G de ces deux plans.

Deux quelconques des trois plans F passant par une droite L sont séparés harmoniquement par le troisième plan F et le point E opposé à ce plan.

TÉTRAÈDRES APPUYÉS ENTRE EUX PAR LEURS ARÊTES.

9. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'il était possible de construire trois tétraèdres appartenant à un même faisceau ; nous avons

été conduit ainsi à un certain nombre de propriétés de ces tétraèdres et reconnu entre autres (n° 3) que deux quelconques de ces tétraèdres doivent s'appuyer entre eux par leurs arêtes.

Il convient donc d'examiner ici les propriétés de deux tétraèdres A et B appuyés entre eux par leurs arêtes. Cette étude nous conduira ensuite au résultat important que deux tétraèdres offrant cette disposition appartiennent toujours à un système desmique de trois tétraèdres.

10. Nous allons d'abord montrer comment, étant donnés le tétraèdre A et un sommet B_0 de B, on peut construire ce second tétraèdre d'une manière unique.

Le tétraèdre B aura pour arêtes passant par B_0 trois droites $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ appuyées respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées de A. Les plans $\overline{B_2 B_3}$, $\overline{B_3 B_1}$, $\overline{B_1 B_2}$ en seront ainsi des faces.

Considérons la section du tétraèdre A par un de ces plans, $\overline{B_2 B_3}$ par exemple : les traces des quatre faces de A sur ce plan déterminent un quadrilatère complet dont les trois couples de sommets opposés sont formés par les traces des arêtes opposées de A. Des trois diagonales de ce quadrilatère, deux passent par B_0 et coïncident avec les droites $\overline{B_2}$ et $\overline{B_3}$, tandis que la troisième $\overline{B'_1}$ s'appuie sur les deux arêtes opposées de A que $\overline{B_1}$ rencontre. Il convient de remarquer ici que $\overline{B'_1}$ coupe les droites $\overline{B_2}$ et $\overline{B_3}$ en des points déterminés simplement par les points où chacune de ces droites rencontre les arêtes de A; ainsi, par exemple, le point $(\overline{B_3 B'_1})$ est le conjugué harmonique du point B_0 par rapport aux deux points de rencontre de la droite $\overline{B_3}$ avec deux arêtes opposées de A.

On obtient de la sorte trois droites $\overline{B'_1}$, $\overline{B'_2}$, $\overline{B'_3}$, situées respectivement dans les plans $\overline{B_2 B_3}$, $\overline{B_3 B_1}$, $\overline{B_1 B_2}$ et appartenant de plus à un même plan. En effet, ces droites se rencontrent deux à deux suivant trois points distincts $(\overline{B'_2 B'_3})$, $(\overline{B'_3 B'_1})$, $(\overline{B'_1 B'_2})$ situés respectivement sur les droites $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ et coïncidant avec les points conjugués harmoniques du point B_0 par rapport aux couples d'arêtes de A que ces droites rencontrent.

Les droites $\overline{B'_1}$, $\overline{B'_2}$, $\overline{B'_3}$, appuyées respectivement sur des arêtes de A rencontrées par $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$, forment avec ces dernières droites les six arêtes du tétraèdre B. Ce tétraèdre est ainsi déterminé d'une manière unique.

11. Comme la disposition mutuelle des deux tétraèdres A et B a été définie au moyen de droites (leurs arêtes), qu'on peut considérer soit comme séries de points, soit comme axes de faisceaux de plans, il s'ensuit qu'à toute propriété relative à des sommets, des arêtes et des faces des deux tétraèdres, correspond, suivant le principe de dualité, une autre propriété relative à des faces, des arêtes et des sommets de ces mêmes tétraèdres.

Ainsi, étant donné le tétraèdre A, nous pouvons procéder à la construction du tétraèdre B, en partant, non plus d'un de ses sommets, mais d'une de ses faces, car nous pouvons d'abord construire les trois arêtes de B situées sur la face donnée et ensuite ses trois autres arêtes passant par ses trois sommets ainsi déterminés.

12. *De même que deux sommets quelconques de* B *sont séparés harmoniquement par les deux arêtes de* A *que rencontre l'arête de* B *déterminée par ces deux sommets* (n° 10), *de même deux faces quelconques de* B *sont séparées harmoniquement par les deux arêtes de* A *que rencontre l'arête de* B *suivant laquelle se coupent ces deux faces.*

Il suit de là que :

Le plan polaire de tout sommet de B, par rapport au tétraèdre A considéré comme surface du quatrième ordre, coïncide avec la face de B opposée à ce sommet.	Le point polaire de toute face de B par rapport à l'enveloppe de la quatrième classe formée par les sommets de A coïncide avec le sommet de B opposé à cette face.

En un mot, *le tétraèdre* B *est autopolaire par rapport au tétraèdre* A, et, comme les deux tétraèdres A et B sont liés entre eux par des relations réciproques, on peut dire que *les deux tétraèdres* A *et* B *sont autopolaires entre eux.*

On peut démontrer de plus que, réciproquement, *pour qu'un tétraèdre soit autopolaire par rapport à un autre, il faut que ces deux tétraèdres s'appuient entre eux par leurs arêtes.*

13. *Le tétraèdre* B *se transforme en lui-même dans chacune*

des trois homologies involutives gauches (¹), *ayant pour axes les divers couples d'arêtes opposées de* A. Deux sommets de B sont homologues suivant une de ces homologies s'ils sont séparés harmoniquement par les axes d'homologie, et, par conséquent, s'ils déterminent une arête de B appuyée sur ces axes; de même, deux faces de B sont homologues si elles sont séparées harmoniquement par les deux axes d'homologie, et, par conséquent, si elles se coupent suivant une arête de B appuyée sur ces axes.

On déduit de là que *tout couple d'arêtes opposées de* B *est séparé harmoniquement par chacun des couples d'arêtes de* A *qu'il ne rencontre pas;* c'est-à-dire que sur toute droite appuyée sur le premier couple et l'un de ces derniers sont déterminés deux couples de points séparés harmoniquement entre eux.

14. Lorsque deux couples d'arêtes d'un tétraèdre s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes d'un autre, les droites de ces quatre couples sont situées sur une même surface du second ordre dont chaque système de génératrices renferme un couple d'arêtes de chacun des deux tétraèdres.

Supposons maintenant, de plus, que les couples d'arêtes de ces tétraèdres appartenant à un même système de génératrices soient séparés entre eux harmoniquement, et examinons la disposition mutuelle des troisièmes couples d'arêtes de ces tétraèdres.

On sait que, si deux droites s'appuient sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre et sont en outre séparées harmoniquement par deux autres arêtes opposées du même tétraèdre, elles sont séparées aussi harmoniquement par le troisième couple d'arêtes de ce tétraèdre (²). On peut démontrer de plus facilement que, *si deux droites sont séparées harmoniquement par deux couples d'arêtes d'un*

(¹) Nous avons cru pouvoir désigner sous le nom d'*homologie gauche* toute homographie entre deux espaces dans laquelle les divers points de deux droites fixes (*axes d'homologie*) non contenues dans un même plan correspondent à eux-mêmes, à cause de l'analogie remarquable qu'on découvre entre cette correspondance et l'*homologie* de Poncelet. Staudt a examiné les propriétés de ces correspondances dans la *Geometrie der Lage* (nº 230, etc.) et les *Beiträge zur Geom. der Lage* (§ 6), et donné le nom de *geschaart-involutorisches System* à un espace dont les éléments sont associés en paires par l'effet d'une *homologie involutive gauche*.

(²) Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage*, nº 26.

tétraèdre, elles s'appuient sur le troisième couple d'arêtes du même tétraèdre.

Il résulte de là d'abord que tout couple d'arêtes de l'un des tétraèdres, appartenant à la surface du second ordre, est séparé harmoniquement par le couple d'arêtes de l'autre qui n'appartient pas à cette surface; puis on voit que les deux couples d'arêtes de ces tétraèdres qui ne sont pas situés sur la surface du second ordre s'appuient l'un sur l'autre. On peut donc conclure que :

Lorsque deux couples d'arêtes d'un tétraèdre s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes d'un autre et que ceux de ces quatre couples qui ne se rencontrent pas sont séparés entre eux harmoniquement, les troisièmes couples d'arêtes de ces tétraèdres s'appuient aussi entre eux.

CONSTRUCTION EFFECTIVE D'UN SYSTÈME DESMIQUE DE TROIS TÉTRAÈDRES.

15. Lorsque deux tétraèdres A et B s'appuient entre eux par leurs arêtes, tout couple d'arêtes de A détermine avec le couple d'arêtes de B sur lequel il s'appuie quatre points et quatre plans formant les sommets et les faces d'un nouveau tétraèdre ayant pour arêtes les droites de ces deux couples. On obtient ainsi trois nouveaux tétraèdres a, b, c, dont chacun contient un nouveau couple d'arêtes; ces trois nouveaux couples doivent appartenir à un même tétraèdre C si les tétraèdres A et B sont situés en perpective de quatre manières différentes (n^{os} 4, 5).

Considérons deux des tétraèdres a, b, c; puisque deux couples d'arêtes de l'un s'appuient respectivement sur deux couples d'arêtes de l'autre, et qu'en outre de ces quatre couples, appartenant aussi aux tétraèdres A et B, ceux qui ne se rencontrent pas sont séparés entre eux harmoniquement (n° 13), il s'ensuit que les couples d'arêtes de ces tétraèdres qui n'appartiennent pas aux tétraèdres A et B s'appuient l'un sur l'autre (n° 14). Cela étant vrai pour deux quelconques des tétraèdres a, b, c, on voit que :

Les arêtes de ces tétraèdres a, b, c qui n'appartiennent pas aux tétraèdres A et B forment, en effet, les arêtes d'un nouveau tétraèdre C.

Le tétraèdre C *s'appuie manifestement par ses arêtes sur chacun des tétraèdres* A *et* B.

16. Considérons maintenant l'homologie involutive ayant pour centre un des sommets de C et pour base la face opposée à ce sommet, et arrêtons-nous en particulier sur deux arêtes opposées de C, dont l'une va passer par le centre d'homologie, tandis que l'autre est située sur la base d'homologie. Ces deux arêtes de C déterminent avec les deux arêtes de A sur lesquelles elles s'appuient un des tétraèdres a, b, c, qui se transforme en lui-même. En effet, d'abord les sommets de ce tétraèdre situés dans la base d'homologie correspondent à eux-mêmes; puis ses deux autres sommets, situés sur l'arête passant par le centre d'homologie, se permutent entre eux, parce qu'ils sont séparés harmoniquement par les sommets de C situés sur cette arête (n° 12), c'est-à-dire par le centre et la base d'homologie. De même, les faces de ce tétraèdre passant par le centre d'homologie correspondent à elles-mêmes, tandis que ses deux autres faces, passant par l'arête située dans la base d'homologie, se permutent entre elles. Les arêtes de ce tétraèdre ont donc pour droites homologues des arêtes du même tétraèdre, et, par conséquent, le troisième couple d'arêtes de ce tétraèdre appartient au tétraèdre homologue de A.

Et comme cela a lieu pour chacun des tétraèdres a, b, c, il s'ensuit que le tétraèdre homologue de A coïncide avec B. Ainsi se trouve démontré que :

Les deux tétraèdres A *et* B *se transforment entre eux dans toute homologie involutive ayant pour centre un sommet de* C *et pour base la face opposée à ce sommet* ([1]).

Les trois tétraèdres A, B, C *forment donc un système desmique.*

Nous avons vu précédemment (n° 4) que, pour que trois tétraèdres A, B, C appartiennent à un même faisceau, il faut que de leurs arêtes on puisse former trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes. Le fait impor-

([1]) Comme, dans ces quatre homologies, à tout couple de A correspond le couple de B sur lequel il s'appuie, on peut appeler *homologues* deux pareils couples d'arêtes des tétraèdres A et B.

tant que nous venons de prouver nous apprend maintenant que :

Lorsqu'on peut former avec les arêtes de trois tétraèdres A, B, C *trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des premiers un couple commun d'arêtes, les tétraèdres* A, B, C *appartiennent à un même faisceau.*

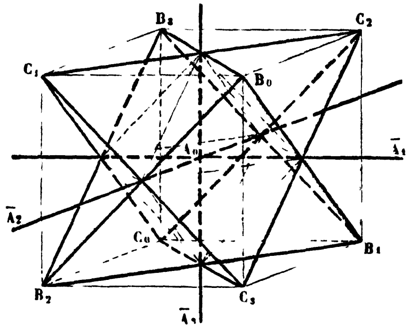
17. La possibilité de l'existence d'un système desmique étant ainsi démontrée, nous indiquons ici comment, d'après ce qui précède, on peut facilement construire un pareil système de trois tétraèdres A, B, C.

Étant donnés le tétraèdre A *et un sommet* B_0 *de* B, *on détermine les trois autres sommets de* B *en prenant les points conjugués harmoniques de* B_0 *par rapport aux trois couples d'arêtes opposées de* A, *et l'on construit les sommets du tétraèdre* C *en prenant les quatre points homologues de* B_0 *dans les quatre homologies involutives déterminées par un sommet de* A *et la face opposée à ce sommet.*

Étant donnés le tétraèdre A *et une face de* B, *on peut construire d'une manière analogue les trois autres faces de* B *et celles de* C.

18. On peut se faire une idée assez nette de la disposition mutuelle des trois tétraèdres A, B, C d'un système desmique en supposant que trois sommets de l'un d'eux, par exemple de A, coïncident avec trois points du plan à l'infini, lorsque les seuls éléments de ce tétraèdre qui restent en distance finie forment autour d'un point A_0 comme sommet un trièdre dont les faces et les arêtes $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ appartiennent au tétraèdre A. Nous pouvons même, en introduisant des conditions métriques nouvelles, supposer que les faces de ce trièdre soient deux à deux perpendiculaires entre elles.

Maintenant, si nous admettons pour sommet de B un point quelconque B_0 de l'espace, point que nous pouvons, sans restriction de la généralité, supposer comme également distant des trois faces du trièdre A_0, les trois autres sommets de ce tétraèdre coïncideront avec les points B_1, B_2, B_3, symétriques de B_0 par rapport aux arêtes $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ de A. Le tétraèdre C, d'autre part, aura pour sommets : 1° le point C_0, symétrique de B_0 par rapport au point A_0; 2° les trois points C_1, C_2, C_3, symétriques de B_0 par rapport aux trois faces $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ de A.



Les huit sommets des tétraèdres B et C forment ainsi les huit sommets d'un *cube* ayant pour axes les trois droites $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, tandis que leurs arêtes coïncident avec les douze diagonales des carrés formés sur les douze faces de ce cube.

On peut maintenant se rendre aisément compte comment le tétraèdre C est l'homologue de B dans les quatre homologies involutives ayant pour centres les sommets de A et pour bases les faces respectivement opposées à ces sommets, homologies qui se présentent ici sous la forme de *correspondances de symétrie.* On voit tout d'abord qu'aux points B_0, B_1, B_2, B_3 correspondent, dans la symétrie ayant pour centre le point A_0, les points C_0, C_1, C_2, C_3, et que de même, dans les symétries ayant respectivement pour bases les plans

$$\overline{A_2A_3},\quad \overline{A_3A_1},\quad \overline{A_1A_2},$$

aux points B_0, B_1, B_2, B_3 correspondent les points

$$C_1, C_0, C_3, C_2,\quad C_2, C_3, C_0, C_1,\quad C_3, C_2, C_1, C_0.$$

On peut remarquer ici ce fait curieux que les quatre arrangements 0123, 1032, 2301, 3210 des quatre sommets de C correspondant aux divers sommets de B sont identiques avec ceux qui représentent les quatre modes de relation homographique existant entre deux groupes de quatre points d'une droite, offrant le même rapport anharmonique.

Le système des seize droites A sur chacune desquelles se trouve un sommet de chacun des tétraèdres A, B, C est ici formé : 1° par les douze arêtes du cube mentionné ; 2° par les quatre diagonales de ce cube passant par son centre.

Les centres des six carrés formés sur les six faces de ce même cube déterminent les sommets d'un octaèdre régulier. Toute face de chacun des tétraèdres B et C contient trois sommets de cet octaèdre, de manière que les huit faces de ces tétraèdres constituent les faces de cet octaèdre, sans qu'aucune de leurs arêtes coïncidât avec quelqu'une des arêtes de l'octaèdre.

Le système des seize droites L par chacune desquelles passe une face de chacun des tétraèdres A, B, C est ici formé : 1° par les douze arêtes de l'octaèdre considéré ; 2° par les quatre droites déterminées sur le plan de l'infini par les quatre paires des faces parallèles du même octaèdre.

PROPRIÉTÉS DE DEUX TÉTRAÈDRES D'UN SYSTÈME DESMIQUE PAR RAPPORT AU TROISIÈME.

19. Deux tétraèdres A, B d'un système desmique ont, par rapport au troisième C, diverses propriétés, dont on peut considérer comme primitives les suivantes :

Chacun des tétraèdres A, B *est son propre homologue dans les trois homologies involutives gauches ayant pour axes deux arêtes opposées de* C.

Les tétraèdres A *et* B *se transforment entre eux par les quatre homologies involutives ayant pour centre un sommet de* C *et pour base la face opposée à ce sommet.*

Dans toute homologie involutive gauche, une surface du second ordre ne peut être transformée en elle-même que si elle passe par les deux axes d'homologie ou bien si chacun de ces axes forme la polaire de l'autre par rapport à cette surface. De même, dans toute homologie involutive ordinaire, une surface du second ordre ne peut être transformée en elle-même que si le centre d'homologie a pour plan polaire, par rapport à cette surface, la base d'homologie.

Les surfaces donc du second ordre conjuguées par rapport au *tétraèdre C sont les seules qui se transforment en elles-mêmes dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C.*

D'où il s'ensuit que : *Aussitôt qu'une surface du second ordre, conjuguée par rapport au tétraèdre C,*

passe par un des sommets de l'un des tétraèdres A, B, elle passe aussi par les sept autres sommets de ces deux tétraèdres.

Les huit sommets des tétraèdres A et B forment donc les intersections d'un nombre doublement infini de surfaces du second ordre conjuguées par rapport au tétraèdre C.

20. Parmi les surfaces du réseau ponctuel ainsi constitué se trouvent quatre faisceaux ponctuels de cônes. Les cônes de chacun de ces faisceaux ont pour centre commun un des sommets de C et pour génératrices communes les quatre droites A passant par ce sommet.

Parmi les surfaces du même réseau, il y en a six formées de deux plans. Deux pareils plans se coupent suivant une arête de C et coïncident avec les deux faces f de l'un des tétraèdres a, b, c qui passent par cette arête.

touche une des faces de l'un des tétraèdres A, B, elle touche aussi les sept autres faces de ces deux tétraèdres.

Les huit faces des tétraèdres A et B forment donc les plans tangents communs à un nombre doublement infini de surfaces de la seconde classe conjuguées par rapport au tétraèdre C.

Parmi les enveloppes de la seconde classe comprises dans le réseau tangentiel ainsi constitué se trouvent quatre faisceaux tangentiels de coniques. Les coniques de chacun de ces faisceaux sont situées sur une face de C et ont pour tangentes communes les quatre droites L situées sur cette face.

Parmi les enveloppes du même réseau, il y en a six formées de deux points. Deux pareils points sont situés sur une arête de C et coïncident avec les deux sommets e d'un des tétraèdres a, b, c situés sur cette arête.

A la rigueur, à toute surface formée de deux plans f passant par une arête de C il faut associer l'enveloppe de la seconde classe formée par les deux points e situés sur la même droite, pour avoir ainsi un être géométrique du second ordre et de la seconde classe, comme le sont ceux compris dans les deux réseaux.

Ces deux réseaux ont en commun une infinité d'êtres géométriques du second ordre et de la seconde classe formant trois faisceaux en même temps ponctuels et tangentiels. Les surfaces de chacun de ces faisceaux ont quatre génératrices communes formées par deux couples homologues d'arêtes des deux tétraèdres A et B; chacun de ces faisceaux contient donc deux êtres géométriques du second ordre et de la seconde classe constitués par deux plans f et deux points e situés sur l'intersection de ces deux plans.

Ces trois faisceaux ont deux à deux une surface commune. Sur chacune de ces trois surfaces se trouvent deux couples d'arêtes de A et les couples d'arêtes de B qui en sont les homologues (n° **14**).

21. Le tétraèdre C restant invariable, si l'on fait mouvoir un des sommets de A ou de B sur un plan Π, les sept autres sommets de A et de B décrivent des plans qui sont les homologues de Π dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C et constituent par conséquent avec Π les faces de deux tétraèdres formant avec C un système desmique.

De même, si l'on suppose qu'une face de A ou de B se meut en passant par un point quelconque Σ, les sept autres faces de A et de B enveloppent sept points qui constituent avec Σ les sommets de deux tétraèdres formant avec C un système desmique.

Si maintenant un sommet de A ou de B parcourt une droite T, les sept autres sommets de A et de B décrivent aussi des lignes droites qui sont les homologues de T dans les sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C et coïncident avec les droites enveloppées par sept faces de A et de B lorsque la huitième passe par la droite T.

Toute surface du second ordre conjuguée par rapport au tétraèdre C et tangente à T touche nécessairement ces sept autres droites. De plus, ces sept droites sont situées sur une même surface du second ordre passant par la droite T et conjuguée par rapport au tétraèdre C.

Ces huit droites forment deux tétrades; chacune des droites de l'une de ces tétrades rencontre les quatre droites de l'autre suivant les points où elle perce les quatre faces de C; elle détermine, en outre, avec les mêmes droites quatre plans passant respectivement par les quatre sommets de C.

Le rapport anharmonique déterminé par les quatre faces de C sur chacune de ces huit droites est le même.

22. Les génératrices de toute surface du second ordre conjuguée par rapport au tétraèdre C se distribuent donc, par l'effet des sept homologies involutives déterminées par deux éléments opposés de C, en une infinité de groupes de huit droites analogues à celui que nous venons de considérer.

Les deux tétrades de chacun de ces groupes se transforment entre elles dans les quatre homologies involutives ayant pour centre un sommet de C et pour base la face opposée à ce sommet; elles se transforment en outre en elles-mêmes dans les trois homologies involutives ayant pour axes deux arêtes opposées de C.

Parmi ces divers groupes, il y en a trois formés par quatre droites prises deux fois chacune. Les génératrices de la surface qui s'appuient sur deux arêtes opposées de C forment les quatre droites doubles d'un pareil groupe.

Les tétrades formées de droites appartenant à un même système de génératrices de la surface du second ordre ont toutes un covariant commun du sixième ordre (celui-là que Clebsch dénote par T), formé par les trois couples de génératrices de ce système qui s'appuient respectivement sur les trois couples d'arêtes de C. Ces trois couples de génératrices sont séparés deux à deux entre eux harmoniquement.

SYSTÈMES DESMIQUES CONJUGUÉS.

23. Pour que trois tétraèdres A, B, C appartiennent à un même faisceau, nous savons qu'il faut et il suffit qu'on puisse construire avec leurs arêtes G trois nouveaux tétraèdres a, b, c ayant avec chacun des tétraèdres A, B, C un couple commun d'arêtes. Il résulte de cette relation des tétraèdres A, B, C avec les tétraèdres a, b, c que *ces derniers tétraèdres appartiennent aussi à un même faisceau.*

Deux pareils systèmes desmiques accompagnent inévitablement l'un l'autre; ils peuvent donc être appelés *systèmes desmiques conjugués.*

Comme tout couple de droites G appartient à un tétraèdre de chacun des deux systèmes desmiques, on peut représenter bien convenablement les neuf couples de droites G par les symboles

$$\begin{matrix} Aa, & Ab, & Ac, \\ Ba, & Bb, & Bc, \\ Ca, & Cb, & Cc. \end{matrix}$$

Deux de ces couples se rencontrent ou sont séparés entre eux harmoniquement suivant que leurs symboles ont une lettre commune ou non.

Nous avons déjà employé (nos 4, 20) les lettres e et f pour désigner les sommets et les faces des tétraèdres a, b, c.

24. Par tout point e passent quatre droites L qui déterminent trois paires de plans F; les plans de ces paires appartiennent respectivement aux tétraèdres A, B, C (n° 2).

Par tout point E passent quatre droites Λ qui déterminent trois paires de plans f; les plans de ces paires sont formés respectivement par des faces des tétraèdres a, b, c.

Par chacune des droites G passent deux faces d'un tétraèdre de chacun des systèmes desmiques; ces deux couples de plans sont séparés entre eux harmoniquement.

De même que par toute droite L passe une face de chacun des tétraèdres A, B, C, de même par toute droite Λ passe une face de chacun des tétraèdres a, b, c.

Sur tout plan f sont situées quatre droites Λ qui déterminent un quadrilatère complet, dont les trois paires de sommets opposés sont formées respectivement par des sommets E des tétraèdres A, B, C.

Sur tout plan F sont situées quatre droites L qui déterminent un quadrilatère complet, dont les trois paires de sommets opposés sont formées respectivement par des sommets e des tétraèdres a, b, c.

Sur chacune des droites G sont situés deux sommets d'un tétraèdre de chacun des systèmes desmiques; ces deux paires de points sont séparées entre elles harmoniquement.

De même que sur toute droite Λ se trouve un sommet de chacun des tétraèdres A, B, C, de même sur toute droite L se trouve un sommet de chacun des tétraèdres a, b, c.

Les droites Λ *jouent donc, par rapport à l'un des systèmes desmiques, le même rôle que les droites* L *par rapport à l'autre.*

De même que les points E opposés aux plans F passant par une droite L sont situés sur la droite correspondante Λ (n° 7), de même les plans f opposés aux points e situés sur une droite Λ passent par la droite correspondante L.

25. Considérons deux tétraèdres quelconques, D et d, ayant un couple commun d'arêtes Dd. Toute face de chacun de ces tétraèdres passe par l'une de ces arêtes et coupe l'autre suivant un sommet du même tétraèdre; de même tout sommet de chacun de ces tétraèdres est situé sur l'une de ces arêtes et détermine avec l'autre un plan qui forme une face du même tétraèdre. Ainsi, à tout sommet de chacun de ces tétraèdres *correspond*, d'une manière réciproque, une face du même tétraèdre.

Deux faces des deux tétraèdres D et d, passant respectivement par les deux droites du couple Dd, se coupent suivant une droite coïncidant avec celle qui joint les sommets correspondant aux faces considérées. Les huit droites H ainsi obtenues peuvent être distribuées en quatre paires; deux droites H constituent une paire ou sont *conjuguées* si chacune forme l'intersection des faces opposées aux sommets des tétraèdres D et d situés sur l'autre.

Deux faces de D passant par l'une des droites Dd forment avec les faces de d passant par l'autre un tétraèdre ayant deux sommets communs avec chacun des tétraèdres D et d, et pour arêtes, à côté des droites Dd, quatre droites H. Tout sommet de ce nouveau tétraèdre appartient à celui des deux tétraèdres D, d auquel appartient aussi la face opposée à ce sommet; par conséquent, aussitôt qu'une droite H forme une arête de ce nouveau tétraèdre, la droite H qui en est la conjuguée forme l'arête opposée du même tétraèdre. On obtient ainsi deux tétraèdres ayant pour arêtes communes les droites Dd.

Les faces du tétraèdre D coupent celles de d suivant seize droites, dont quatre coïncident avec chacune des droites Dd et les autres avec les huit droites H. Ces mêmes seize droites forment les droites joignant les sommets de D aux sommets de d.

A toute combinaison de chacun des tétraèdres A, B, C avec chacun des tétraèdres a, b, c correspondent ainsi huit droites H. On obtient ainsi soixante-douze droites H.

Les faces des tétraèdres A, B, C coupent celles des tétraèdres a, b, c suivant $12 . 12 = 144$ droites, dont quatre coïncident avec chacune des droites G, tandis que les autres sont formées par les soixante-douze droites H. Ces mêmes cent quarante-quatre droites joignent les sommets des A, B, C aux sommets des a, b, c.

26. Chacun des neuf couples de droites G est rencontré par quatre autres appartenant aux deux tétraèdres qui contiennent ce couple, et il est séparé harmoniquement par les quatre couples restant (n° 23), qui sont situés sur une surface S_2 du second ordre, correspondant au couple considéré.

On a ainsi neuf surfaces S_2, dont quatre passent par tout couple de droites G correspondant aux quatre couples G séparés harmoniquement par le couple considéré.

Deux couples G séparés entre eux harmoniquement sont aussi séparés harmoniquement par un troisième couple de droites G. Il y a six pareils groupes de trois couples G, représentés par des symboles appartenant respectivement aux divers rangs et colonnes du Tableau :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}a, & \mathrm{B}b, & \mathrm{C}c, \\ \mathrm{C}b, & \mathrm{A}c, & \mathrm{B}a, \\ \mathrm{B}c, & \mathrm{C}a, & \mathrm{A}b. \end{array}$$

Sur les trois couples G de chacun de ces groupes s'appuient deux droites imaginaires G′, formant deux génératrices communes aux trois surfaces du second ordre correspondant aux divers couples de ce groupe et comprenant par suite les deux autres couples du groupe. On obtient ainsi six couples de droites G′, qui peuvent être représentés par les symboles des couples G qu'ils rencontrent.

Sur chacune des surfaces S_2, celle par exemple qui correspond au couple Aa, sont situés deux couples de droites G′, formant les deux couples de génératrices de cette surface appuyés sur le couple Aa; ces deux couples G′ sont représentés par les symboles Aa.Bb.Cc et Aa.Cb.Bc.

27. Les trois couples de droites G′

$$\mathrm{A}a.\mathrm{B}b.\mathrm{C}c,\quad \mathrm{C}b\ \mathrm{A}c.\mathrm{B}a,\quad \mathrm{B}c.\mathrm{C}a.\mathrm{A}b,$$

rencontrent chacun des couples

$$\mathrm{A}a.\mathrm{C}b.\mathrm{B}c,\quad \mathrm{B}b.\mathrm{A}c.\mathrm{C}a,\quad \mathrm{C}b.\mathrm{B}a.\mathrm{A}b.$$

Ces six couples de droites G′ appartiennent donc à une même surface (imaginaire) du second ordre S'_2.

Deux droites opposées G sont polaires l'une de l'autre par rapport à cette surface S'_2, parce qu'il y a deux couples de génératrices de cette surface appuyés sur ces deux droites et coïncidant avec deux couples de droites G'. *Chacun des tétraèdres* A, B, C, *a*, *b*, *c* *est donc conjugué par rapport à la surface* S'_2.

Par rapport à la même surface S'_2, toute droite L a pour polaire la droite Λ correspondante (n° 24); de même deux droites H conjuguées sont polaires l'une de l'autre.

Dans la corrélation polaire déterminée par la surface S'_2, chacune des surfaces S_2 se transforme en elle-même. Deux génératrices de S_2 sont polaires l'une de l'autre par rapport à S'_2 si elles sont séparées harmoniquement par le couple G auquel correspond cette surface S_2, et sur lequel s'appuient les génératrices communes à la surface S_2 considérée et à S'_2.

28. Les points d'intersection d'une droite G avec la surface S'_2 sont séparés harmoniquement par les couples de sommets E et *e* situés sur cette droite.

Les points d'intersection d'une droite Λ (ou L) avec la surface S'_2 forment la hessienne des trois sommets E (ou *e*) situés sur cette droite.

La section de la surface S'_2 par un plan F (ou *f*) coïncide avec la conique qui forme une partie constituante de la hessienne de la courbe du quatrième ordre formée par les quatre droites L (ou Λ) situées dans ce plan.

Les plans tangents menés à S'_2 par une droite G sont séparés harmoniquement par les couples de faces F et *f* passant par cette droite.

Les plans tangents de la surface S'_2 qui passent par une droite L (ou Λ) forment la hessienne des trois faces F (ou *f*) passant par cette droite.

Le cône circonscrit à la surface S'_2 et ayant pour sommet un des points E (ou *e*) forme une partie constituante de la hessienne du cône de la quatrième classe formé par les quatre droites Λ (ou L) passant par ce point.

FORMATION ET PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME REMARQUABLE DE QUINZE TÉTRAÈDRES.

29. Si nous représentons par 1, 2, 3 les trois couples de droites imaginaires correspondant aux rangs du Tableau

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}a, & \mathrm{B}b, & \mathrm{C}c, \\ \mathrm{C}b, & \mathrm{A}c, & \mathrm{B}a, \\ \mathrm{B}c, & \mathrm{C}a, & \mathrm{A}b, \end{array}$$

et par 4, 5, 6 les trois autres couples, correspondant aux colonnes du même Tableau, nous pourrons représenter les neuf couples de droites réelles correspondant respectivement aux divers éléments de ce Tableau par les symboles

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} 14, & 15, & 16, \\ 24, & 25, & 26, \\ 34, & 35, & 36. \end{array} \right.$$

Les couples représentés par deux de ces symboles sont séparés entre eux harmoniquement ou se rencontrent suivant que leurs symboles ont un indice commun ou non.

D'une manière analogue, nous pouvons représenter les six couples de droites imaginaires non plus par les symboles

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6,$$

mais respectivement par ces autres :

$$(2) \qquad 23, \ 31, \ 12, \quad 56, \ 64, \ 45.$$

On remarquera que les couples représentés par deux de ces nouveaux symboles se rencontrent si leurs symboles n'ont pas d'indice commun, et que, de plus, deux couples imaginaires représentés par des symboles ayant un indice commun sont séparés entre eux harmoniquement. Par exemple, les trois couples 23, 31, 12 sont séparés deux à deux entre eux harmoniquement, parce qu'ils forment trois couples de génératrices de S'_2 appuyés respectivement sur les trois couples d'arêtes d'un quelconque des tétraèdres A, B, C, a, b, c (n° 22).

Si l'on compare maintenant les symboles (1) des couples réels et les symboles (2) des couples imaginaires, on s'aperçoit qu'un couple réel ne rencontre un autre imaginaire que si leurs symboles n'ont pas d'indice commun; on peut démontrer de plus que deux couples pareils sont séparés harmoniquement aussitôt que leurs symboles ont un indice commun. Considérons, par exemple, les couples 24 et 23; le couple réel 24 forme avec les deux couples imaginaires 31 et 56, sur lesquels il s'appuie, un tétraèdre; or, comme le couple 23 s'appuie sur le couple 56 et est séparé harmoniquement par le couple 31, il s'ensuit qu'il est séparé aussi harmoniquement par le couple 24 (n° 14).

On tire de tout cela que :

Deux quelconques des quinze couples de droites considérés sont séparés entre eux harmoniquement ou se rencontrent suivant que leurs symboles ont un indice commun ou non.

30. *Ces quinze couples de droites, que nous désignerons par la seule lettre* $\mathcal{G}$, *jouissent des propriétés communes résultant du caractère symétrique de leur représentation et correspondant aux propriétés combinatoires des symboles de ces couples.*

Il n'est donc pas étonnant que les propriétés de ces quinze couples $\mathcal{G}$ offrent la plus grande analogie avec celles d'un système de quinze droites de l'espace, situées par trois dans quinze plans et représentées par les quinze combinaisons de six indices différents, pris deux à deux, de manière que deux droites situées dans un même plan aient des symboles formés de quatre indices différents, système étudié à fond par Cremona dans le remarquable Mémoire déjà cité (n° 5, note).

En faisant une étude attentive de l'ensemble des quinze couples $\mathcal{G}$, on arrive à la détermination de six complexes linéaires situés deux à deux en involution, et l'on voit que toutes les propriétés de ces couples peuvent être déduites de la considération de six corrélations focales (*Nullsysteme*) correspondant aux symboles

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

et qui, superposées deux à deux, donnent lieu aux quinze homologies involutives gauches ayant pour axes les divers couples de droites $\mathcal{G}$ (n°s 39, 40).

On s'engage ainsi sur un terrain qui est loin d'être inexploré. En effet, Félix Klein, dans son travail bien connu, *Zur Theorie der Liniencomplexe der ersten und zweiten Grades* (¹), a fait connaître l'ensemble important des figures qu'on découvre par la considération simultanée de six complexes linéaires situés deux à deux en involution, complexes qu'il a nommés *fondamentaux* à l'égard de leur rôle envers les complexes du second ordre.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. II; communiqué en extrait aux *Göttinger Nachrichten*, 1869.

Expliquer comment on peut, dans la foule des propriétés des couples $\mathcal{G}$, découvrir l'existence des six complexes fondamentaux, telle sera notre tâche principale dans ce qui suit; notre point de départ étant différent de celui de M. Klein et nos procédés purement géométriques, nous espérons ajouter quelque chose à la connaissance plus complète des figures déterminées par *six complexes fondamentaux*. Nous nous attacherons particulièrement au système des quinze tétraèdres dont les arêtes sont formées par des droites $\mathcal{G}$, et qui ont la propriété de constituer par trois *vingt systèmes desmiques de tétraèdres*, propriété que Klein n'a pas remarquée.

31. Tout couple de droites $\mathcal{G}$ est rencontré par six autres couples et séparé harmoniquement par les huit restant.

Deux couples $\mathcal{G}$ qui se rencontrent forment un quadrilatère gauche; le nombre de ces quadrilatères est $\frac{15.6}{2} = 45$. Aux deux couples d'un quadrilatère gauche correspond un troisième couple, qui forme avec les premiers les arêtes d'un tétraèdre. *Les quinze couples de droites $\mathcal{G}$ forment donc par trois les arêtes de* $\frac{45}{3} = 15$ *tétraèdres* T. Six de ces tétraèdres sont réels, les A, B, C, *a*, *b*, *c*, tandis que les neuf autres ont un seul couple d'arêtes réelles.

Tout couple $\mathcal{G}$ appartient à trois tétraèdres T; chacun des douze autres tétraèdres a un couple d'arêtes appuyé sur le couple considéré.

Les trente droites $\mathcal{G}$ se coupent par trois suivant les soixante sommets $\mathfrak{S}$ de ces quinze tétraèdres T *et sont situées par trois sur les soixante faces $\mathfrak{F}$ de ces mêmes tétraèdres. Sur chacune de ces droites $\mathcal{G}$ se trouvent six points $\mathfrak{S}$, formant trois paires de sommets appartenant respectivement à trois tétraèdres* T *et séparées deux à deux entre elles harmoniquement. Par chacune de ces droites passent aussi six plans $\mathfrak{F}$, formant trois paires de faces appartenant respectivement à trois tétraèdres* T *et séparées deux à deux entre elles harmoniquement.*

32. Considérons trois couples $\mathcal{G}$ formant un tétraèdre T. Chacun des douze autres couples $\mathcal{G}$ s'appuie sur un couple d'arêtes de ce

tétraèdre et est divisé harmoniquement par les deux autres; de ces douze couples, quatre rencontrent chacun des couples d'arêtes du tétraèdre considéré et forment avec ce couple les arêtes de deux tétraèdres T ayant les droites de ce couple pour arêtes communes.

Chacun des tétraèdres T a un couple d'arêtes commun avec six autres tétraèdres T; les huit tétraèdres restant s'appuient sur ce tétraèdre par leurs arêtes. Les paires de tétraèdres T appuyés entre eux par leurs arêtes sont donc en nombre de $\frac{15.8}{2} = 60$.

Considérons deux tétraèdres T, A′ et B′, appuyés entre eux par leurs arêtes; les couples homologues de ces tétraèdres déterminent trois nouveaux tétraèdres T, a', b', c', dont chacun contient un couple $\mathcal{G}$ non appartenant aux tétraèdres A′ et B′. Ces trois couples de droites $\mathcal{G}$ constituent les arêtes d'un nouveau tétraèdre T, C′, formant avec les tétraèdres A′ et B′ un système desmique, dont le conjugué est formé par les tétraèdres a', b', c'.

Les quinze tétraèdres T *se groupent ainsi par trois en* $\frac{60}{3} = 20$ *systèmes desmiques, formant dix paires de systèmes desmiques conjugués.*

Tout tétraèdre T appartient à quatre systèmes desmiques, dont chacun contient deux autres tétraèdres de ceux qui s'appuient sur le tétraèdre considéré. Les systèmes conjugués à ces quatre systèmes desmiques sont formés de tétraèdres ayant avec le tétraèdre considéré un couple commun d'arêtes.

Deux tétraèdres T *ayant un couple commun d'arêtes appartiennent donc de deux manières différentes à deux systèmes desmiques* T *conjugués.*

Les paires de tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes sont au nombre de quarante-cinq.

33. Deux couples de droites $\mathcal{G}$ séparés entre eux harmoniquement forment une *tétrade harmonique* de droites. Le nombre de ces tétrades est $\frac{15.8}{2} = 60$.

Comme deux couples $\mathcal{G}$ formant une tétrade harmonique ont des symboles (jk, ki) contenant trois indices différents i, j, k, il s'ensuit que les trois couples $\mathcal{G}$ dont les symboles contiennent deux des trois autres indices l, m, n s'appuient sur les droites de cette tétrade et sont situés par conséquent sur la surface du second ordre contenant les droites de la tétrade.

Aux deux couples jk et ki d'une tétrade harmonique correspond un troisième couple ij, séparé harmoniquement par chacun de ces couples, et dont le symbole contient des indices appartenant respectivement aux symboles de ces mêmes couples. Ce troisième couple rencontre tous les trois couples $\mathcal{G}$ appuyés sur les premiers; il est donc situé sur la surface du second ordre, déterminée par les droites de la tétrade harmonique.

On peut arriver à la même surface du second ordre en partant d'une quelconque des six tétrades harmoniques qu'elle contient.

Les quinze couples $\mathcal{G}$ sont donc situés par six sur dix surfaces $\mathfrak{S}_2$ du second ordre.

De ces surfaces une est imaginaire et coïncide avec la surface S'_2, tandis que les neuf autres sont réelles (hyperboloïdes gauches) et coïncident nécessairement avec les neuf surfaces S_2, que nous avons déjà considérées (n° 27).

Chacune de ces surfaces $\mathfrak{S}_2$ peut être désignée indifféremment par un des symboles

$$ijk.lmn, \quad ijk \quad \text{ou} \quad lmn,$$

qui indiquent suffisamment les couples $\mathcal{G}$ qui s'y trouvent.

Par chacun des couples $\mathcal{G}$ passent $\frac{8}{2} = 4$ surfaces $\mathfrak{S}_2$, dont chacune contient trois couples rencontrant le couple considéré. *Par deux couples $\mathcal{G}$ appuyés entre eux, passent donc $\frac{3.4}{6} = 2$ surfaces $\mathfrak{S}_2$. Deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ se coupent,* par conséquent, *toujours suivant deux couples de droites $\mathcal{G}$.*

Tout tétraèdre T dont un couple d'arêtes est situé sur une surface $\mathfrak{S}_2$ a aussi un autre couple d'arêtes situé sur la même surface.

34. Chacun des neuf couples $\mathcal{G}$ situés en dehors de la surface *ijk.lmn* est formé de droites dont l'une est la polaire de l'autre par rapport à cette surface, car ce couple appartient à un tétraèdre T dont les deux autres couples sont situés sur la surface considérée.

Ces neuf couples $\mathcal{G}$ constituent les arêtes de six tétraèdres T conjugués par rapport à la surface $ijk.lmn$ et formant deux systèmes desmiques conjugués. Ainsi, ceux de ces neuf couples dont les symboles appartiennent aux divers rangs du Tableau

$$\begin{array}{ccc} il, & jm, & kn, \\ km, & in, & jl, \\ jn, & kl, & im, \end{array}$$

déterminent trois tétraèdres d'un système desmique, tandis que les couples dont les symboles appartiennent aux diverses colonnes du même Tableau déterminent trois autres tétraèdres formant le système desmique conjugué.

Les dix paires de systèmes desmiques conjugués (n° **32**) *correspondent aux diverses surfaces* $\mathfrak{S}_2$. *Les deux systèmes* A, B, C *et* a, b, c *correspondent en particulier à la surface* S'_2.

Chacun des tétraèdres T est conjugué par rapport à quatre surfaces $\mathfrak{S}_2$. Deux tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes sont simultanément conjugués par rapport à deux surfaces $\mathfrak{S}_2$.

Deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ sont toujours conjuguées par rapport à deux tétraèdres T ayant pour arêtes communes les droites du couple $\mathcal{G}$ appuyé sur les deux couples $\mathcal{G}$ communs à ces deux surfaces. Les cinq couples $\mathcal{G}$ appartenant à ces deux tétraèdres forment les seuls couples $\mathcal{G}$ situés en dehors de ces deux surfaces.

35. A toute paire de systèmes desmiques T conjugués correspondent seize droites L et autant de droites Λ. Sur chacune de ces droites se trouve un sommet de chacun des tétraèdres de l'un des systèmes, en même temps que passe par elle une face de chacun des tétraèdres du système conjugué. Ainsi :

Les soixante points $\mathfrak{S}$ *sont situés par trois sur trois cent vingt droites* $\mathfrak{L}$, *par lesquelles passent aussi par trois les soixante plans* $\mathfrak{F}$. *Les trois tétraèdres ayant pour sommets les points* $\mathfrak{S}$ *situés sur une de ces droites appartiennent à un même système desmique, au système conjugué duquel appartiennent les tétraèdres dont les faces* $\mathfrak{F}$ *passent par la même droite.*

A toute paire de tétraèdres T ayant un couple commun d'arêtes correspondent huit droites H (n° **25**), sur chacune desquelles est situé un sommet de chacun des deux tétraèdres, tandis que par elle passe une face de chacun de ces mêmes tétraèdres. Comme il y a quarante-cinq pareilles paires de tétraèdres T, il s'ensuit que :

Les soixante points $\mathfrak{S}$ *sont situés par deux sur* $8.45 = 360$ *droites* H, *par lesquelles passent aussi par deux les soixante plans* $\mathfrak{F}$. *A chacune de ces droites* H *correspondent deux tétraèdres* T, *ayant pour sommets les points* $\mathfrak{S}$ *situés sur cette droite et pour faces les plans* $\mathfrak{F}$ *qui y passent.*

Les soixante points $\mathfrak{S}$ déterminent, pris deux à deux, $\frac{60.59}{2} = 1770$ droites. De ces droites, $\frac{6.5}{2} = 15$ coïncident avec chacune des droites $\mathcal{G}$, $\frac{3.2}{2} = 3$ coïncident avec chacune des droites $\mathfrak{L}$, et les autres coïncident avec les droites H. Le nombre 1770 égale en effet la somme

$$15.30 + 3.320 + 360.$$

Ces mêmes dix sept cent soixante-dix droites forment les intersections des soixante plans $\mathfrak{F}$ pris deux à deux.

36. Par tout point $\mathfrak{S}$ passent : 1° trois faces du tétraèdre T dont ce point $\mathfrak{S}$ est un sommet, faces formant un trièdre ayant pour arêtes les trois droites $\mathcal{G}$ passant par ce point ; 2° deux faces de chacun des six tétraèdres T ayant avec le tétraèdre précédent un couple commun d'arêtes. De ces douze plans, quatre passent par chacune des arêtes du trièdre et coupent la face opposée de ce trièdre suivant quatre droites H; les douze droites H ainsi obtenues sont les seules passant par le point $\mathfrak{S}$ considéré. Ces douze plans se coupent de plus par trois suivant seize droites $\mathfrak{L}$, les seules passant par le même point $\mathfrak{S}$.

Sur tout plan $\mathfrak{F}$ sont situés : 1° trois sommets du tétraèdre T dont ce plan $\mathfrak{F}$ forme une face, sommets déterminant un triangle ayant pour côtés les droites $\mathcal{G}$ situées dans ce plan ; 2° deux sommets de chacun des six tétraèdres T ayant avec le tétraèdre précédent un couple commun d'arêtes. De ces douze points, quatre sont situés sur chaque côté du triangle et sont projetés du sommet opposé de ce triangle par quatre droites H; les douze droites H ainsi obtenues sont les seules situées sur le plan $\mathfrak{F}$ considéré. Ces douze points sont situés de plus par trois sur seize droites $\mathfrak{L}$, les seules situées dans le même plan $\mathfrak{F}$.

Quant à la disposition des douze droites H et des seize droites $\mathfrak{L}$, autour d'un point $\mathfrak{S}$ ou sur un plan $\mathcal{F}$, nous pouvons remarquer ce qui suit.

Les douze droites H passant par un point $\mathfrak{S}$ sont situées par trois sur seize plans N.

Les seize droites $\mathcal{L}$ passant par le même point sont situées par couples sur quarante-huit plans Q, dont chacun contient aussi une droite H passant par le point considéré.

Les douze droites H situées dans un plan $\mathcal{F}$ convergent par trois vers seize points M.

Les seize droites $\mathcal{L}$ situées dans le même plan passent par couples par quarante-huit points P, par chacun desquels passe aussi une droite H située dans le plan considéré.

Les soixante points $\mathfrak{S}$ *sont situés par quatre sur neuf cent soixante plans* N *et par six sur quatre cent quatre-vingts plans* Q. *Sur chacun des plans* N *sont situées une droite* $\mathcal{L}$ *et trois droites* H ; *tandis que sur chacun des plans* Q *sont situées quatre droites* $\mathcal{L}$ *formant un quadrilatère complet, dont les trois diagonales sont des droites* H.

De même :

Les soixante plans $\mathcal{F}$ *passent par quatre par neuf cent soixante points* M *et par six par quatre cent quatre-vingts points* P. *Vers chacun des points* M *convergent une droite* $\mathcal{L}$ *et trois droites* H ; *tandis que vers chacun des points* P *convergent quatre droites* $\mathcal{L}$ *et trois droites* H *formant*, etc.

Par chacune des droites $\mathcal{L}$ passent trois plans N contenant respectivement les points $\mathfrak{S}$ opposés aux plans $\mathcal{F}$ passant par cette droite. Sur chacune de ces mêmes droites $\mathcal{L}$ sont situés aussi trois points M, formant les traces des trois plans $\mathcal{F}$ opposés aux trois points $\mathfrak{S}$ situés sur cette droite.

37. Tout couple de droites $\mathcal{G}$ détermine une homologie involutive gauche, suivant laquelle deux points, ou deux droites, ou deux plans forment deux éléments homologues aussitôt qu'ils sont séparés harmoniquement par les droites du couple $\mathcal{G}$ considéré, droites qui constituent les deux axes d'homologie.

Suivant chacune de ces homologies, les quatorze autres couples $\mathcal{G}$ se transforment en eux-mêmes ; d'abord les couples appuyés sur les axes d'homologie, dont les droites correspondent à elles-mêmes, puis les couples séparés harmoniquement par les axes d'homologie, dont les droites se permutent. Tout tétraèdre T se transforme donc par cette homologie en lui-même; pareillement, toute surface $\mathfrak{S}_2$ se transforme en elle-même.

Ces quinze homologies $\mathcal{G}$ constituent *un groupe de transformations,* parce qu'on n'obtient pas de nouvelles homographies en multipliant ces transformations deux à deux. Ainsi, de la superposition de deux homologies involutives $\mathcal{G}$ dont les axes se rencontrent résulte l'homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes s'appuient sur les axes des premières; d'autre part, la superposition de deux homologies involutives $\mathcal{G}$ dont les axes sont séparés entre eux harmoniquement donne lieu à l'homologie $\mathcal{G}$ dont les axes sont séparés harmoniquement par les axes de chacune des premières et sont de plus situés sur une même surface $\mathfrak{S}_2$ que ces axes.

38. De même, toute surface $\mathfrak{S}_2$ détermine une corrélation polaire suivant laquelle chacun des quinzes couples $\mathcal{G}$ se transforme en lui-même. En effet, les couples $\mathcal{G}$ situés sur cette surface ont des droites correspondant à elles-mêmes, tandis que les neuf autres couples ont des droites dont chacune est la polaire de l'autre par rapport à cette surface. Dans chacune de ces corrélations polaires, les quinze tétraèdres T se transforment en eux-mêmes; de même, les neuf autres surfaces $\mathfrak{S}_2$ se transforment en elles-mêmes.

Comme la corrélation polaire déterminée par une des surfaces $\mathfrak{S}_2$ établit entre les génératrices d'une autre surface $\mathfrak{S}_2$ une correspondance involutive (¹) identique avec celle déterminée par l'homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes s'appuient sur les génératrices communes de ces deux surfaces, il s'ensuit que :

L'homographie résultant de la superposition (²) *de deux cor-*

(¹) On trouve dans le § 5 des *Beiträge zur Geometrie der Lage* de Staudt, paragraphe intitulé *Involutorische Regelschaaren in Polarsystemen*, les propriétés principales des correspondances établies par des corrélations polaires et focales (Polarsystemen) sur les deux systèmes de génératrices d'un hyperboloïde gauche transformé en lui-même.

(²) L'opération de la superposition de deux transformations peut se faire de deux manières différentes, qui dans tous les cas que nous aurons à considérer ici conduisent à des résultats identiques.

rélations polaires déterminées par deux surfaces $\mathfrak{S}_2$ est identique avec l'homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes s'appuient sur les génératrices communes aux deux surfaces considérées.

La corrélation résultant de la superposition de la corrélation polaire déterminée par une surface $\mathfrak{S}_2$ et d'une homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes sont situés en dehors de cette surface $\mathfrak{S}_2$ est identique avec la corrélation polaire déterminée par une autre surface $\mathfrak{S}_2$, coupant la précédente suivant deux couples de droites $\mathcal{G}$ appuyés sur les axes de l'homologie involutive $\mathcal{G}$ considérée.

39. Examinons maintenant les corrélations qui résultent de la combinaison d'une corrélation polaire déterminée par une des surfaces $\mathfrak{S}_2$ et d'une homologie involutive $\mathcal{G}$ dont les axes sont situés sur cette surface.

Considérons pour cela la corrélation polaire $ijk.lmn$ et l'homologie involutive jk; nous allons voir que la corrélation résultante de la superposition de ces deux correspondances est *focale*. En effet, si Σ et Σ' sont deux points homologues dans l'homologie considérée, le plan polaire Π de Σ' par rapport à la surface $ijk.lmn$, qui sera le correspondant du point Σ dans la nouvelle corrélation, passe toujours par le point Σ.

Cette nouvelle corrélation laisse invariable la correspondance établie entre les génératrices de $ijk.lmn$ par l'homologie involutive jk. Une droite correspond à elle-même, suivant cette corrélation focale, c'est-à-dire elle appartient au complexe linéaire déterminé par cette corrélation, aussitôt que sa droite homologue dans l'homologie involutive jk coïncide avec sa polaire par rapport à la surface $ijk.lmn$. Ainsi, les droites des couples dont les symboles

$$jk,\ jl,\ jm,\ jn,\ kl,\ km,\ kn,\ lm,\ ln,\ mn$$

présentent les dix combinaisons des indices j, k, l, m, n pris deux à deux appartiennent à ce complexe. Au contraire, les droites des autres couples dont les symboles

$$ij,\ ik,\ il,\ im,\ in$$

contiennent l'indice i se permutent entre elles.

Il est manifeste que l'on arrive à la même corrélation en combinant respectivement les diverses corrélations polaires

$$ijk,\ ijl,\ ijm,\ ijn,\ ikl,\ ikm,\ ikn,\ ilm,\ iln,\ imn$$

avec les homologies

$$jk,\ jl,\ jm,\ jn,\ kl,\ km,\ kn,\ lm,\ ln,\ mn.$$

On voit ainsi que :

En combinant successivement la corrélation polaire déterminée par une quelconque des surfaces $\mathfrak{S}_2$ *avec les six homologies involutives gauches ayant pour axes les couples* $\mathcal{G}$ *situés sur cette surface, on arrive à un système unique de six corrélations focales, qui peuvent être représentées par les symboles*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Dans chacune de ces six corrélations, les quinze couples $\mathcal{G}$ *se transforment en eux-mêmes, de manière que les droites des dix couples* $\mathcal{G}$ *dont les symboles ne contiennent pas l'indice représentatif de la corrélation correspondent à elles-mêmes, tandis que les droites de chacun des cinq autres couples se permutent entre elles.*

40. *De la combinaison de deux quelconques de ces corrélations focales résulte une homographie coïncidant avec l'homologie involutive gauche dont les axes forment le couple* $\mathcal{G}$ *représenté par un symbole contenant les deux indices représentatifs des deux corrélations.*

Les six complexes déterminés par ces six corrélations focales sont donc situés en involution deux à deux et forment, pris ensemble, *un système de complexes fondamentaux,* suivant l'expression de M. Klein (n° 30).

Le système de six complexes fondamentaux est susceptible d'un nombre ∞^{15} de déterminations; toutefois on ne peut considérer le système *des six complexes réels* auquel nous venons d'arriver que comme un cas du système de complexes de M. Klein, lequel peut renfermer aussi deux, quatre et même six complexes imaginaires.

Mais il est évident que la particularité de notre système, provenant de ce que nous avons supposé les tétraèdres primitifs A, B, C comme réels, est purement occasionnelle et qu'elle disparaît complètement aussitôt qu'on laisse les éléments déterminatifs de ces tétraèdres être quelconques.

41. De même que toute homologie involutive ij provient de la superposition des deux corrélations focales i et j, de même *toute corrélation polaire* ijk *ou* lmn *résulte de la superposition dans un ordre quelconque des trois corrélations focales* i, j, k *ou de ces autres* l, m, n.

Si l'on désigne maintenant par

$$i_1 i_2 i_3 \ldots i_h$$

la correspondance résultant de la superposition des corrélations focales (composantes)

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_h,$$

prises parmi les six corrélations 1, 2, 3, 4, 5, 6, et par o l'homographie *identique*, c'est-à-dire celle dans laquelle tout élément de l'espace correspond à lui-même, on pourra résumer toutes les propriétés des six corrélations focales relatives aux correspondances qui en sont composées dans les relations suivantes :

$$11 \equiv 22 \equiv 33 \equiv 44 \equiv 55 \equiv 66 \equiv ii \equiv 0,$$
$$123456 \equiv ijklmn \equiv 0.$$

En effet, de ces relations et de l'identité $oi \equiv i$ on peut tirer d'abord la relation

$$ijklm \equiv n,$$

qui exprime la propriété de la superposition d'une corrélation polaire ijk et d'une homologie involutive lm (n° 39). On obtient de même les relations

$$ijkl \equiv mn \quad \text{et} \quad ijjk \equiv ik,$$

qui expriment les propriétés de la superposition de deux homologies $\mathcal{G}$ (n° 37). On en obtient enfin de nouveau $ijk \equiv lmn$.

En général, si l'on considère la correspondance involutive

$$i_1 i_2 i_3 \ \ldots \ i_h,$$

qui, comme on voit, est homographique ou corrélative suivant que h est pair ou impair, on peut démontrer qu'elle peut être obtenue en superposant ses corrélations composantes dans un ordre quelconque. En utilisant dès lors les relations

$$ii \equiv 0, \quad oi \equiv i, \quad 123456 \equiv 0;$$

on pourra réduire le nombre de ses corrélations composantes à être moindre que quatre.

Nous pouvons donc dire que :

Les six corrélations focales 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les quinze homologies involutives* $\mathcal{G}$ *et les dix corrélations polaires* S_2 *forment avec l'homographie identique un système fermé ou groupe.*