Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Paul Tannery

Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 278-291

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_278_0>

MÉLANGES.

POUR L'HISTOIRE DES LIGNES ET SURFACES COURBES DANS L'ANTIQUITÉ;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

La première courbe qu'un géomètre grec ait considérée en dehors du cercle paraît avoir été la *quadratrice* (τετραγωνίζουσα) (¹)

$$\rho \sin\varphi = \mathrm{R}\,\frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi},$$

si son invention remonte réellement au sophiste Hippias d'Elis, qui florissait dans la seconde moitié du v^e^ siècle avant J.-C.

Proclus (²), p. 272 : « D'autres ont résolu le même problème (la trisection de l'angle) par les quadratrices (³) d'Hippias et de Nicomède, lignes également *mixtes* (comme la conchoïde de Nicomède). »

P. 356 : « C'est, au reste, la coutume générale des mathématiciens, quand ils traitent des lignes, de donner le *caractère* (τὸ σύμπτωμα, la relation correspondant à ce que nous appelons aujourd'hui l'*équation*) de chaque espèce. Ainsi Apollonius donne le *caractère* de chacune des *coniques;* Nicomède a fait de même pour les *conchoïdes,* Hippias pour les *quadratrices,* Persée pour les *spiriques.* »

A la vérité, Hankel a prétendu, sans toutefois donner de raisons, que l'Hippias cité par Proclus dans ces deux passages n'était pas le contemporain de Socrate. Mais M. Cantor (*Vorlesungen,* p. 165) a excellemment défendu l'opinion commune, fondée d'ailleurs sur-

(¹) Je donne l'équation polaire de cette courbe sous la forme la plus simple qui corresponde à sa définition dans *Pappus,* IV, 31, éd. Hultsch, p. 252.

(²) *Procli Diadochi in primum* Euclidis Elementorum *librum commentarii,* G. Friedlein. — Leipzig, Teubner, 1873.

(³) Le pluriel est ici un hellénisme et ne doit nullement faire soupçonner que les anciens aient considéré sous le nom de *quadratrice* différentes espèces de courbes. *Mixtes* désigne chez Geminus, qui suit Proclus, les lignes autres que la droite et le cercle.

tout sur ce qu'on ne connaît pas d'autre géomètre du nom d'Hippias. Je me contenterai donc de répondre aux objections nouvelles formulées par M. G.-I. Allman (*Greek Geometry from Thales to Euclid,* Part II, Dublin, 1881).

1° Hippias d'Elis ne figure pas comme mathématicien, mais seulement comme autorité historique, dans la liste des géomètres de Proclus (p. 64-68), liste qui provient d'Eudème. L'inventeur de la quadratrice aurait mérité davantage.

Mais cette omission s'explique suffisamment par le discrédit qui frappait les sophistes aux yeux d'Eudème, et la liste en question en présente une autre bien plus singulière, celle de Démocrite.

2° Diogène Laërce (VIII, 83) dit qu'Archytas fut le premier à introduire un mouvement d'instruments dans une figure géométrique; et le tracé de la quadratrice réclame un tel mouvement. Cette remarque est inexacte. Un nombre indéfini de points de la quadratrice, aussi rapprochés qu'on le veut, peuvent être obtenus avec la règle et le compas, et il est douteux que les anciens aient jamais cherché un autre procédé pour construire cette courbe.

L'autorité de Diogène Laërce est d'ailleurs d'autant moins acceptable qu'il parle en termes exprès de la solution du problème de Délos par Archytas; or Eutocius (*Archimède,* éd. Torelli, p. 143-144) nous a conservé, d'une part, cette solution où ne figure l'emploi d'aucun instrument, et, d'un autre côté (p. 145), une lettre où Eratosthène affirme que, « si Archytas, Eudoxe, etc., furent capables de démontrer l'exactitude de leurs solutions, ils ne purent les réaliser manuellement et pratiquement, sauf jusqu'à un certain point Ménechme, mais d'une façon très pénible ».

Le *mésolabe* d'Eratosthène est de fait le plus ancien instrument dont on connaisse l'emploi pour une construction géométrique; car, en présence du texte que je viens de citer, on ne peut considérer que comme apocryphe l'élégante solution pratique du problème de Délos attribuée à Platon par Eutocius (p. 135). Ce même texte indique qu'avant Ménechme on ne se préoccupait pas du tracé pratique des courbes, tandis que l'inventeur des sections coniques aurait essayé plus ou moins de résoudre cette question pour les lignes qu'il avait découvertes.

3° M. Allman objecte encore que Pappus ne connaît nullement Hippias.

Pappus dit en effet (IV, 30, p. 250-2) : « Pour la quadrature du cercle, Dinostrate, Nicomède et quelques autres plus récents ont employé une courbe qui prend son nom de sa propriété même, car ils l'appellent *quadratrice ;* voici sa génération. »

Dinostrate, frère de Ménechme, vivait vers le milieu du IVe siècle et doit avoir été postérieur à Hippias de deux générations. Quant à Nicomède, postérieur à Ératosthène, il appartient au IIIe siècle.

Mais la divergence des renseignements fournis par Proclus et par Pappus s'explique facilement par la différence des sources où ils puisent. Tout ce que dit le premier des courbes est incontestablement emprunté à Geminus, auteur du Ier siècle avant l'ère chrétienne, et son langage prouve dès lors que Geminus connaissait un écrit d'Hippias sur la quadratrice et le considérait comme inventeur de cette courbe, quoiqu'il n'ignorât pas que Nicomède s'en était également occupé.

Cette remarque nous permet d'écarter immédiatement le quatrième argument de M. Allman, à savoir qu'il y aurait eu un autre Hippias auquel pourraient se rapporter les citations de Proclus. Ce serait un architecte contemporain de Lucien, qui en fait un grand éloge comme géomètre, etc., dans son écrit : *Hippias ou le Bain.* A vrai dire, l'existence de cet Hippias n'est nullement prouvée, car l'écrit en question semble bien n'être qu'une pure fantaisie ; mais, en tout cas, il est impossible de songer à aucun géomètre postérieur à Geminus ou même, nous semble-t-il, à Nicomède.

Quant à Pappus, il ne cite Geminus qu'à propos des travaux d'Archimède en Mécanique ; il ne semble lui avoir rien emprunté pour la Géométrie, et notamment en ce qui concerne les lignes et les surfaces courbes. Sa manière de voir diffère en plusieurs points essentiels de celle de l'auteur suivi par Proclus. A la citation qu'il fait d'ailleurs (IV, 31, p. 254) d'un Sporos dont il reproduit les critiques sur la quadrature du cercle au moyen de la courbe d'Hippias, on ne peut guère douter que ce Sporos ne soit la source où il puise ce qu'il dit sur la quadratrice.

J'ai essayé d'établir ailleurs (1) que ce Sporos, de Nicée, vivait

(1) *Annales de la Faculte des Lettres de Bordeaux,* p. 70-76, 257-261 ; 1882.

probablement à la fin du III^e siècle de notre ère, c'est-à-dire qu'il était contemporain de Pappus, mais plus âgé que lui; qu'il avait recueilli, pour une compilation intitulée Ἀριστοτελικὰ κήρια (rucher aristotélique), les travaux mathématiques relatifs à la quadrature du cercle et à la duplication du cube; que ce recueil fut pour les deux objets la source principale de Pappus et d'Eutocius.

Au temps de Sporos, l'écrit d'Hippias pouvait parfaitement avoir disparu sans laisser de traces ailleurs que dans Geminus; et cela d'autant plus que les travaux postérieurs de Dinostrate, de Nicomède, etc., avaient naturellement dû le faire négliger. Le silence de Pappus sur Hippias n'a donc rien d'étonnant, et l'identification de cet Hippias avec le sophiste d'Elis reste, en somme, l'hypothèse la plus plausible.

II.

Il ne me paraît pas douteux que le but de l'invention de la quadratrice n'ait été le partage d'un angle ou d'un arc donné suivant un rapport donné. La génération de la courbe est combinée pour la solution immédiate de ce problème, tandis que la quadrature du cercle, ou plutôt la rectification de la circonférence, ne correspond, pour ainsi dire, qu'accidentellement à la solution d'un problème particulier, la recherche du point d'intersection de la courbe avec son axe. J'avais par suite été amené à interpréter le passage de Pappus, cité plus haut, en admettant que le travail d'Hippias s'était borné à la division d'un angle donné, que Dinostrate avait le premier fait l'application de la courbe à la quadrature du cercle, et que la dénomination qui lui a été donnée correspondait à ce travail postérieur. M. Cantor semble avoir admis (*Vorlesungen*, p. 167, 213), plus ou moins explicitement, les mêmes conclusions; mais, en y réfléchissant davantage, je crois qu'elles soulèvent de graves objections.

Tout d'abord le texte de Geminus dans Proclus suppose nettement que le nom de la courbe lui avait été donné par son inventeur Hippias. D'autre part, il est clair que l'usage pratique de la courbe suppose la construction d'un *patron* découpé en équerre avec la quadratrice remplaçant l'hypoténuse et applicable, comme notre *rapporteur,* sur les figures considérées. Dès lors la détermination de l'intersection de la courbe avec l'axe s'imposait immédiatement, et le problème n'est réellement pas si difficile qu'on doive croire qu'Hippias fût incapable d'apercevoir sa relation avec la quadrature du cercle. Enfin la célébrité de ce dernier problème était dès lors assez grande pour qu'Hippias lui empruntât le nom de sa courbe, plutôt qu'au problème qu'il avait sans aucun doute considéré en premier lieu.

Quant au témoignage de Pappus, les remarques que nous avons faites plus haut en infirment notablement la valeur, et je suis d'autant moins disposé à en tenir compte qu'il ne serait nullement en fait favorable à la thèse que j'examine; car non seulement il ignore absolument Hippias, mais il considère l'emploi de la quadratrice pour la division de l'angle comme une découverte relativement récente, ce qui est inadmissible. On pourrait seulement conclure de là que ni Dinostrate, ni Nicomède n'avaient traité ce problème sur la quadratrice.

Pappus, IV, 45, p. 284 : « Le partage d'un angle ou d'un arc donné en trois parties égales est un problème *solide,* comme nous l'avons démontré (c'est-à-dire un problème réclamant l'emploi de sections coniques); mais la division d'un angle ou d'un arc donné dans un rapport donné est un problème *grammique* (exigeant l'emploi de courbes plus complexes que les coniques); il a été résolu par les auteurs récents (ὑπὸ τῶν νεωτέρων), et nous le traitons de deux façons. »

Suivent en effet deux solutions, l'une par la quadratrice, l'autre (46) par la spirale d'Archimède. Pappus revient plus loin (IV, 51, p. 296) sur la même question pour montrer qu'on peut construire un angle incommensurable avec un angle donné.

Quant aux applications à la quadratrice, elles se rencontrent dans Pappus après le premier passage cité (IV, 31, 32, p. 256 et suiv.), puis (IV, 49, p. 292 : *Trouver un cercle dont la circonférence soit égale à une droite donnée, d'après le théorème démontré précédemment,* et IV, 50 : *Décrire sur une courbe donnée un arc de cercle qui soit à cette corde dans un rapport donné.* Dans tout cela, il n'y a rien évidemment d'original de la part de Pappus, quoique, dans ces derniers problèmes et dans ceux sur la division de l'angle, ce ne soit plus à Sporos qu'il fasse ses emprunts.

Mais, en dehors de Pappus et de Proclus, il existe dans l'antiquité, à propos de la quadratrice, un témoignage important sur lequel l'attention n'a pas été suffisamment appelée, quoiqu'il ait été publié par Bretschneider. C'est un passage d'un commentaire de Jamblique sur les catégories d'Aristote, passage conservé par Simplicius (*Comment. in Aristotelis phys. libros quattuor priores,* ed. Diels, p. 60).

« Aristote ne connaissait probablement pas encore la quadrature du cercle, mais elle a été trouvée par les Pythagoriciens, comme il est clair d'après les démonstrations du pythagoricien Sextus qui avait reçu par une tradition éloignée la méthode de ses démonstrations. Plus tard Archimède l'a trouvée au moyen de la ligne hélicoïde, Nicomède au moyen de celle qu'on appelle proprement *quadratrice,* Apollonius au moyen d'une ligne qu'il appelle *sœur de la cochloïde* et qui est la même que celle de Nicomède, Carpos au moyen d'une ligne qu'il appelle simplement *de double mouvement;* beaucoup d'autres enfin ont diversement résolu le problème. »

Il ne semble pas qu'il y ait lieu de s'arrêter au témoignage concernant les Pythagoriciens; leur fanatique prôneur perd tout sens critique quand il s'agit d'eux. Il suffira de remarquer que Sextus ou plutôt Sextius ([1]) vivait sous Auguste et Tibère. Pour Archimède, Jamblique fait incontestablement allusion au théorème (περὶ ἑλίκων, XVIII) sur l'égalité entre la sous-tangente à la spirale à l'extrémité de la première spire et la circonférence du cercle correspondant, théorème que nous ne pouvons évidemment considérer comme donnant la quadrature du cercle, mais auquel les anciens attribuaient une importance considérable, en tant qu'établissant l'égalité d'une droite déterminée avec une courbe.

Nous rencontrons ensuite, en concordance avec Pappus et Proclus, une preuve du travail de Nicomède sur la quadratrice, puis une donnée importante; Apollonius s'est occupé de la même courbe, mais en lui donnant un autre nom : *sœur de la cochloïde.*

« *Cochloïde* est, d'après Pappus, le nom de la courbe inventée par Nicomède et que nous appelons *conchoïde* avec Proclus et Eutocius. Le terme *sœur de la cochloïde* doit donc avant tout être regardé comme une flatterie adressée par Apollonius à Nicomède. Il permet par conséquent de fixer l'époque de ce dernier

([1]) Il y eut deux philosophes de ce nom, le père et le fils; il est difficile de conjecturer duquel Jamblique a voulu parler.

entre Eratosthène et Apollonius, au lieu de la faire descendre après Apollonius, comme on le fait ordinairement. »

Il est difficile de savoir pourquoi le géomètre de Perge a tenu à rejeter le terme de *quadratrice*. Peut-être le trouvait-il trop général et regardait-il d'autres courbes, par exemple, lui aussi, la spirale d'Archimède, comme ayant autant de droits à ce titre; peut-être, ayant calculé plus exactement encore que le Syracusain le rapport de la circonférence au diamètre, voulait-il affirmer l'insuffisance des solutions graphiques.

Le rapprochement de la courbe d'Hippias avec la conchoïde, au point de vue géométrique, ne peut, d'autre part, être regardé que comme passablement forcé; cependant je serais porté à en induire qu'Apollonius avait prolongé la quadratrice en dehors du cercle générateur et qu'il en avait reconnu les asymptotes. On peut être confirmé dans cette hypothèse par ce fait que Geminus (Proclus, p. 111), essayant de classer les courbes d'après leur forme, n'en reconnaît point qui s'arrêtent brusquement, comme le supposerait pour la quadratrice la façon dont Pappus expose la génération de la courbe, et comme on la donne d'ordinaire d'après lui.

Avant de quitter la citation de Jamblique, j'ajouterai que, dans la courbe de *double mouvement* de Carpos, il est difficile de ne pas reconnaître la cycloïde dont la génération si simple n'a pas dû échapper aux anciens.

L'âge de Carpos ne peut être fixé avec précision. Proclus cite longuement (p. 241 et suiv.) une discussion sur la prééminence logique entre les théorèmes et les problèmes : dans cette discussion, Carpos le mécanicien soutenait une opinion opposée à celle de Geminus : il semble bien lui être postérieur. D'autre part, Pappus cite Carpos d'Antioche à propos des travaux mécaniques d'Archimède. On a ainsi un intervalle de trois siècles de Geminus à Pappus; mais, d'après le titre de l'ouvrage cité par Proclus (ἀστρολογικὴ πραγματεία, Traité astrologique), j'inclinerais à le placer avant Ptolémée, c'est-à-dire au premier siècle de l'ère chrétienne.

III.

La citation de Sporos par Pappus (IV, p. 254), relative à la quadratrice, renferme une expression qui mérite d'appeler l'attention.

Après avoir critiqué l'emploi de la courbe pour la quadrature et observé qu'en fait l'intersection avec l'axe ne peut être déterminée mathématiquement si l'on ne connaît pas le rapport de la circonférence au rayon, Sporos ajoute : « A moins de se donner ce rapport, il ne faut pas, par confiance dans la réputation des inventeurs, admettre une courbe en quelque sorte *trop mécanique* (μηχανικωτέραν πως οὖσαν) ».

Un peu plus loin (p. 258), Pappus reprend cette expression à son compte : « La génération de cette ligne (la quadratrice) est, comme on l'a dit, trop mécanique (μηχανικωτέρα), mais on peut l'analyser comme suit géométriquement par les *lieux en surfaces*. »

Ces deux passages sont remarquables parce que c'est uniquement sur eux qu'a été fondée la fameuse distinction des courbes *géométriques* et des courbes *mécaniques,* que le XVII^e^ siècle considérait comme ayant été classique dans l'antiquité : rien ne justifiait en réalité cette opinion; en fait, Pappus ne distingue guère les courbes que suivant qu'elles sont engendrées par des intersections de solides ou d'une autre façon. Dans la seconde classe, il range à côté des hélices (ce qui comprend les spirales) les quadratrices, les cochloïdes, les cissoïdes (III, p. 54, IV, p. 270). Geminus dans Proclus ne fait que des classements aussi artificiels.

Le véritable sens de l'expression est au reste assez obscur, et il est douteux qu'il soit le même pour Pappus et pour Sporos; chez le premier ce sens paraît plutôt à rapprocher de celui de *grossier;* il oppose la génération vulgaire à celle qu'il va donner, par d'élégantes combinaisons de surfaces, sur lesquelles nous allons revenir, combinaisons qui, au reste, n'aboutissent nullement à un mode de construction pratique, et surfaces qui supportent la construction de l'hélice ou de la spirale d'Archimède, c'est-à-dire de courbes aussi *mécaniques* au moins que la quadratrice.

Pour Sporos, le sens paraît différent, et il me semble précisé par un membre de phrase qui suit dans le texte, mais que le savant éditeur a regardé avec quelque raison comme suspect. Après *trop mécanique,* vient « et servant aux mécaniciens pour beaucoup de problèmes ». Quelle que soit l'origine de cette phrase, que Pappus y ait condensé avec trop de négligence le texte qu'il avait sous les yeux, qu'elle soit une glose postérieure, il n'en paraît pas moins probable que des équerres en quadratrice étaient depuis le temps d'Hippias employées dans la pratique et que Sporos insiste sur ce que la construction nécessairement approximative de ces instruments ne permet point de les comparer à la règle et au compas.

Quoi qu'il en soit au reste à cet égard, je laisse ce sujet pour aborder ce que Pappus (IV, 33, 34, p. 258-264) appelle la génération géométrique de la quadratrice.

Chasles et M. Cantor ont déjà appelé l'attention sur ces deux propositions intéressantes où il est démontré :

1° Qu'on obtient une quadratrice en projetant sur le plan horizontal l'intersection d'une surface de vis à filet carré à axe vertical :

$$y = x \operatorname{tang} 2\pi \frac{z}{h},$$

et d'un plan passant par une des génératrices rectilignes de cette surface

$$z = my;$$

2° Que cette même surface de vis qui donne une quadratrice pour son intersection avec un plan peut être définie comme ayant pour directrice courbe non plus l'hélice, mais l'intersection d'un cône (1) ayant le même axe

$$n^2 z^2 = x^2 + y^2$$

et d'une surface cylindrique (2) à génératrices verticales et ayant pour trace horizontale une spirale d'Archimède dont le pôle est sur l'axe

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Il est intéressant de rechercher à quelle époque on doit attribuer ces propositions.

Il faut remarquer que la surface de vis est appelée *plectoïde* par Pappus (2). D'après le contexte, on ne peut douter que ce terme ne désigne une surface réglée à plan directeur, dont une des

(1) Pappus suppose ce cône rectangle.

(2) Plus littéralement *cylindroïde*.

(3) P. 262, liv. XIV : ἐν πλεκτοειδεῖ ἐπιφανείᾳ. — P. 260, liv. XIII-XIV, le terme technique est illisible dans les manuscrits. F. Hultsch, induit en erreur par Toselli, a restitué à tort κυλινδρικῇ.

directrices est rectiligne et l'autre une courbe quelconque. C'est ce qu'on appelle d'ordinaire aujourd'hui une surface *conoïde*.

Il serait évidemment à désirer que l'on reprît le terme antique, incontestablement plus rationnel, et que l'on n'employât celui de *conoïde* que dans un sens où pût rentrer celui qu'Archimède lui donnait (1) pour désigner, par exemple, les surfaces de révolution du second degré.

Le terme de *plectoïde* ne se rencontre au reste ailleurs que dans un autre passage de Pappus (IV, 36, p. 270) que nous allons traduire.

Pappus distingue les trois genres de problèmes reconnus par les anciens, problèmes *plans* (du premier ou du second degré), *solides* (du troisième ou quatrième degré), *grammiques* (d'ordre supérieur). Il s'exprime ainsi sur ces derniers (2) :

« Il reste encore un troisième genre de problèmes qu'on appelle *grammiques;* parce que pour leur solution on emploie d'autres lignes (γραμμαί) que celles dont nous venons de parler (3) : ce sont des lignes dont la génération est plus variée et plus forcée, qui dérivent de surfaces moins régulièrement classées et de mouvements plus compliqués. Telles sont les lignes qu'on rencontre dans ce qu'on appelle les *lieux en surface*, ainsi que les autres encore plus diversifiées qu'ont trouvées en grand nombre Démétrios d'Alexandrie dans ses « *Epistases grammiques* » et Philon de Tyane par l'entrelacement de surfaces *plectoïdes* et autres de toute sorte. Ces lignes présentent nombre de caractères singuliers; quelques-unes ont été jugées par les auteurs plus modernes dignes de traités spéciaux, entre autres celle que Menelaos a appelée « *paradoxos* ». Au même genre de problèmes s'appliquent encore d'autres courbes, les hélices, les quadratrices, les cochloïdes, les cissoïdes ».

---

(1) Archimède appelle *conoïde orthogone* notre paraboloïde de révolution, *conoïde amblygone* une des deux nappes de l'hyperboloïde de révolution autour de l'axe transverse. *Plectoïde* dérive de πλέκειν (tresser) et paraît signifier particulièrement « qui ressemble à un ouvrage de vannerie ».

(2) Il est à remarquer que la même distinction se retrouve dans les mêmes termes, mais avec moins de développement, III, p. 54.

(3) La droite, le cercle et les coniques; les anciens n'ont pas à proprement parler de terme spécial pour désigner les courbes.

Il semble permis de conjecturer, d'après ce passage, que les deux propositions mentionnées tout à l'heure ont été empruntées (par l'intermédiaire de Sporos?) aux *Considérations sur les lignes* de Demetrios d'Alexandrie. Quant à l'âge de cet auteur et de Philon de Tyane qui lui est associé, on doit le placer avant l'ère chrétienne (au IIe siècle avant J.-C.?), puisque Pappus leur oppose, comme νεώτερος, Menelaos qui vivait à la fin du Ier siècle de notre ère. Il convient d'ailleurs de remarquer qu'ici, par « ce qu'on appelle les *lieux en surface* », Pappus désigne spécialement l'ouvrage d'Euclide qui portait ce nom, et où ne devaient probablement figurer, ainsi que le pense M. Heiberg, que le cône, le cylindre, la sphère et leurs intersections.

Il reste à justifier plus pleinement notre hypothèse sur l'époque de l'invention des *plectoïdes*.

Les anciens y furent naturellement conduits par la considération des surfaces de vis sur lesquelles les inventions d'Archimède durent sans aucun doute appeler de bonne heure l'attention des géomètres. Nous allons entrer dans quelques détails à ce sujet.

IV.

Archimède lui-même ne paraît avoir rien écrit sur ses surfaces de vis, ni sur l'hélice cylindrique. On peut le conclure de deux circonstances.

D'une part, Carpos d'Antioche (Pappus, VIII, p. 1026) dit que le Syracusain ne composa sur ses inventions mécaniques que son livre de la *sphéropée* et jugea les autres indignes de Traités semblables. Il semble bien d'un autre côté (Proclus, p. 105) que la théorie de l'hélice fut pour la première fois traitée par Apollonius dans un livre qui portait précisément le titre d'une des plus célèbres inventions d'Archimède « *Sur la vis* » (περί τοῦ κοχλίου).

Le κοχλίας (limaçon d'après Diodore de Sicile et Moschion dans Athénée (*Archimède de Torelli*, p. 365-366) est une machine destinée à l'élévation de l'eau, c'est-à-dire la vis d'Archimède, ainsi que permet de le constater la description de la *cochlia* par Vitruve. Moschion appelle au contraire ἕλιξ la vis comme organe de transformation de mouvement, en rapportant d'ailleurs, comme la précédente, cette invention à Archimède.

Pappus (livre VIII) parle, sous le nom de κοχλίας :

1° D'une vis sans fin engrenant avec une roue dentée (p. 1108-1114); il indique le tracé pratique de l'hélice *monostrophe* et *distrophe* (d'une ou deux spires de l'hélice) et remarque que ce tracé concorde avec la démonstration d'Apollonius; il donne d'autres détails sur la construction de l'appareil, et, d'après Héron dans ses *Mécaniques,* démontre qu'à chaque tour de vis correspond l'avance d'une dent sur la roue;

2° (p. 1122-1130) Et d'une même vis et d'une autre, également sans fin, faisant mouvoir parallèlement à son axe une dent que porte un curseur guidé dans une rainure; l'écrou ne paraît pas inventé.

Les autres passages du livre VIII indiquent que le κοχλίας est une des cinq puissances des anciens (avec le coin, le levier, la moufle et le treuil), qu'il s'appelait proprement ἄπειρος κοχλίας (vis sans fin), pour le distinguer sans doute du κοχλίας pour l'élévation de l'eau. La vis sans fin pouvait d'ailleurs être τετράγωνος (à filet carré) ou bien φακωτός (à filet triangulaire).

D'après Proclus (*loc. cit.*), Apollonius avait démontré dans son écrit *sur la vis* que tous les arcs d'une même hélice cylindrique peuvent coïncider entre eux. Il avait donc poussé assez loin la théorie de cette hélice dont il semble le créateur, mais il n'avait pas dû s'y borner et il avait considéré sans aucun doute les surfaces singulières qu'offrait l'instrument dont il traitait, que ce fût seulement la vis d'Archimède, que ce fût aussi la vis sans fin, ce qui semble plus probable.

Les travaux dont Pappus nous a conservé une faible trace relativement à la surface de vis durent suivre probablement à bref délai l'élan donné par Apollonius. A cette date, ils s'expliquent d'eux-mêmes; plus tard, à une époque de décadence incontestable, il y aurait invraisemblance.

Avant de terminer, j'ajouterai quelques mots au sujet de la ligne *paradoxos* de Menelaos.

Il peut paraître bien aventureux d'essayer de conjecturer, sur la vague et unique indication de Pappus, ce que pouvait être cette courbe. Cependant le champ des recherches peut facilement être limité.

Il résulte incontestablement du texte de Pappus que cette courbe était engendrée par l'intersection des deux surfaces; d'autre part, d'après le genre des recherches que faisaient les anciens sur les courbes, la propriété singulière qui a fait donner son nom à cette courbe doit être relative, soit à une quadrature, soit au tracé de la tangente, et la seconde hypothèse est de beaucoup la plus improbable (1). Enfin rien ne prouve que Menelaos ait été le véritable inventeur de la courbe et de sa propriété singulière; ce fut, à la vérité, un mathématicien de valeur, mais son originalité réelle est bien loin d'être démontrée, et il appartient à un âge où l'on s'occupe plutôt désormais de perfectionner les découvertes antérieures que de les étendre.

Que les quadratures de surfaces courbes aient été abordées par les anciens, comme on est conduit à le conjecturer pour la courbe de Menelaos, Pappus en donne un exemple remarquable, précisément avant le dernier passage que je viens de citer. Il parle (p. 281-268) d'une hélice tracée sur la surface de la sphère et dont l'équation en coordonnées polaires serait, δ étant la distance au pôle, λ la longitude,

$$\delta = \frac{1}{4}\lambda.$$

Il donne la mesure de l'aire de cette hélice et prouve notamment qu'avec le quart de grand cercle passant par le pôle et l'extrémité de l'hélice sur l'équateur, celle-ci divise l'hémisphère en deux parties dont l'une est carrable (2).

Si l'on veut aller plus loin pour la divination de la courbe de Ménélaos, on tombe immédiatement sur des conjectures sans appui et il peut même paraître difficile d'en faire de plausibles. J'essayerai toutefois d'en proposer une.

En fait, je ne connais qu'une courbe qui pourrait satisfaire aux

(1) On doit écarter, par exemple, les propriétés relatives à la rectification de la courbe, question dont les anciens ne paraissent point s'être occupés.

(2) Geminus parle d'hélices sphériques et coniques; la quadrature donnée par Pappus doit donc être antérieure à l'aire chrétienne. On ne peut guère douter que, par analogie avec les hélices cylindrique et sphérique, l'hélice conique n'ait été définie par le mouvement uniforme d'un point sur une génératrice se mouvant elle-même uniformément autour de l'axe du cône. Dans le développement de la surface conique (circulaire droite) sur un plan, ces courbes ont pour transformées des spirales d'Archimède.

conditions énoncées pour représenter la « paradoxos ». C'est celle de la voûte carrable de Viviani, intersection d'une sphère par un cylindre circulaire droit tangent intérieurement, et dont le diamètre est égal au rayon de la sphère. Cette courbe laisse en dehors d'elle dans l'hémisphère qui la comprend une surface équivalente au carré construit sur le diamètre de la sphère.

L'attention des anciens a certainement été appelée de bonne heure sur les courbes de ce genre; car, si le diamètre du cylindre n'est pas déterminé, l'intersection n'est autre que l'*hippopède* inventée par Eudoxe, suivant la restitution de M. Schiapparelli, courbe qui, dans le système astronomique du Cnidien, représentait la trajectoire du mouvement d'anomalie des planètes. D'autre part, le problème de quadrature de surfaces sphériques limitées par des courbes gauches a pu se poser dès l'emploi des voûtes dans les constructions.

Or, si l'on prend pour pôle un des sommets de la courbe, et si l'on compte les longitudes à partir du grand cercle passant par ce pôle et tangent au cylindre, l'équation de la courbe est, en coordonnées polaires,

$$\delta = \lambda.$$

D'après l'exemple donné par Pappus, il est clair que la quadrature n'offrait aucune difficulté pour les anciens. Cette courbe présentait pour eux une autre particularité : un *caractère* qui la classait dans les hélices sphériques, tandis qu'elle s'obtient d'ailleurs par l'intersection de deux surfaces simples.

(*A suivre.*)