BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CYPARISSOS STEPHANOS

Sur la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle homogène

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, n° 1 (1884), p. 120-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_120_0>

MÉLANGES.

SUR LA DÉCOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES D'UNE FONCTION RATIONNELLE HOMOGÈNE;

Par M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Lorsqu'on considère la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle

$$\frac{\varphi}{f^2}$$

(où φ et f désignent deux formes binaires $\varphi = \varphi_x^{2m}$ et $f = a_x^{m+1}$, dont la seconde a son discriminant D différent de zéro), on est conduit à remarquer que *la somme des fractions du premier degré, dans le résultat de la décomposition en question, est égal à*

$$\frac{1}{D}\frac{t_x^{m-1}}{f},$$

$t = t_x^{m-1}$ *représentant un covariant simultané des deux formes* φ *et* f, et que, de même, *la somme des fractions restantes est égale à*

$$\frac{1}{D}\frac{\alpha_x^{2m}}{f},$$

où $\alpha = \alpha_x^{2m}$ *représente également un covariant simultané des deux formes* φ *et* f.

En allant plus loin, on reconnaît que *la forme* α *coïncide avec la jacobienne* $(f, s)_1$ *de* f *et d'une autre forme* $s = s_x^{m+1}$, *laquelle constitue encore un covariant simultané des deux formes* φ *et* f.

Les formes s et t satisfont ainsi à la relation

$$D\varphi = (f, s)_1 + ft$$

et sont, par conséquent, telles que l'intégrale

$$D\int\frac{\varphi}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

soit égale à

$$\frac{1}{m+1}\frac{s}{f} + \int\frac{t}{f}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1).$$

Il nous a semblé intéressant d'examiner les propriétés des formes

s et t ainsi définies. Cette étude nous a conduit à divers résultats, dont nous nous proposons d'exposer quelques-uns dans le petit travail qui suit ([1]).

A côté de propriétés se rattachant directement à la décomposition en fractions simples, la présente Note contient aussi quelques autres résultats qui ne me paraissent pas dénués de tout intérêt. Parmi ceux-ci, je citerai avant tout les résultats du n° 24, relatifs à la forme $\Lambda = \Lambda_x^{3m-3}$, dont l'évanouissement identique constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la forme $f = a_x^{m+1}$ admette deux racines doubles distinctes ou bien une racine quadruple.

Dans une prochaine occasion, nous espérons revenir sur quelques autres propriétés des formes s et t, relatives à la manière dont on peut représenter ces formes au moyen d'opérations (*Ueberschiebungen*) portant une seule fois sur chacune des formes φ, f et le covariant $\Delta = \Delta_x^{2m-2}$ de f, défini par les relations

$$(\Delta, f)_m = 0, \quad (\Delta, f)_{m+1} = 0 \text{ ([2]).}$$

I.

Formules et remarques préliminaires.

1. Rappelons tout d'abord certaines formules où figurent les racines de $f = a_x^{m+1}$ et qui nous seront bien utiles par la suite.

([1]) La plupart des résultats de cette Note (n^{os} 1-22) nous étaient déjà connus lors de la rédaction de notre Mémoire *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 12 décembre 1881, et inséré dans le t. XXVII du *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*, 1883). Le § 4 de la première Partie du Mémoire en question est consacré à l'étude de faits étroitement liés avec ceux exposés dans la présente Note.

([2]) *P. S.* — Dans une Note *Sur l'intégration d'une fonction rationnelle homogène*, insérée dans les *Comptes rendus* du 3 décembre 1883 (t. XCVII, p. 1290), nous avons indiqué la solution d'une question plus générale dont voici l'énoncé :

Étant données deux formes binaires

$$\varphi = \varphi_x^{m_1+m-1} \quad \textit{et} \quad f = a_x^{m+1}$$

ou

$$m_1 + m + 2 \geq (m+1)(n+1),$$

déterminer l'expression générale des formes S *et* T, *d'ordres respectifs* m_1 *et*

Les facteurs linéaires de f seront désignés par

$$(xx_1),\ (xx_2),\ \ldots,\ (xx_m),\ (xx_{m+1}),$$

étant posé, pour abréger,

$$(xx_\iota) = x_1 x_{\iota 2} - x_2 x_{\iota 1}.$$

Nous aurons ainsi

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2)\ldots(xx_{m+1}).$$

De là on déduit

(1) $$(m+1)a_y a_x^m = f\sum \frac{(yx_\iota)}{(xx_\iota)},$$

(2) $$\frac{m(m+1)}{2} a_y^2 a_x^{m-1} = f\sum \frac{(yx_\iota)(yx_j)}{(xx_\iota)(xx_j)} \quad (\iota \gtrless j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Maintenant, si l'on pose

$$\Pi_\iota = (x_\iota x_1)(x_\iota x_2)\ldots(x_\iota x_{\iota-1})(x_\iota x_{\iota+1})\ldots(xx_{m+1}),$$

on aura

(3) $$(m+1)a_y a_{x_\iota}^m = \Pi_\iota (yx_\iota),$$

(4) $$\frac{m(m+1)}{2} a_y^2 a_{x_\iota}^{m-1} = \Pi_\iota (yx_\iota)\sum \frac{(yx_j)}{(xx_j)} \quad (\iota \gtrless j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De la formule (4) on déduit

$$\frac{m(m+1)}{2}(aa')^2 a_{x_\iota}^{m-1} a_{x_\iota}'^{m-1} = \Pi_\iota a_{x_\iota}^m \sum \frac{a_{x_j}}{(x_\iota x_j)}, \quad \text{où} \quad a_x^{m+1} = a_x'^{m+1}.$$

$m_1 - (n-1)(m+1) - 2$, satisfaisant à la relation

$$D^n \varphi = (f, S)_1 + f^n T$$

(*où* D *designe le discriminant de* f, *supposé différent de zero*).

La détermination de ces formes S et T est ramenée également à la considération de la forme Δ.

Quant aux formes s et t, considérées dans la présente Note, elles ont pour expressions

$$s = (\Delta, \sigma)_{2m-2}, \quad t = (\Delta, \tau)_{2m-2},$$

etant posé

$$\sigma = \sigma_y^{2m-2} = a_x(a_x^m \varphi_y^m - a_y^m \varphi_x^m)\varphi_x \varphi_y^{m-1} : (xy),$$

$$\tau = \tau_y^{2m-2} = \Big[(a\varphi)a_y^m \varphi_x^m \varphi_y^{m-1} - \frac{1}{m+1}(a\varphi)a_x^m \varphi_y^{2m-1}$$

$$- \frac{a_y(a_x^m \varphi_y^m - a_y^m \varphi_x^m)\varphi_x \varphi_y^{m-1}}{(xy)}\Big] : (xy)$$

Nous aurons ainsi, par suite de (3),

$$(5)\qquad \frac{(m+1)^2}{2}(aa')^2 a_{x_i}^{m-1} a'^{m+1}_{x_i} = -\Pi_i^2.$$

Si l'on pose maintenant

$$f = (xx_i)p_x^m,$$

on aura, conformément aux formules précédentes,

$$(6)\qquad (m+1)a_y a_{x_i}^m = (yx_i)p_{x_i}^m,$$

$$(7)\qquad \frac{m+1}{2} a_y^2 a_{x_i}^{m-1} = (yx_i)p_y p_{x_i}^{m-1}.$$

Soit remarqué, en passant, que la dernière de ces formules exprime cette propriété bien connue qu'*étant donné un groupe de $m+1$ éléments $f = a_x^{m+1}$ (points d'une droite, etc.), les deux points y (qui sont centres) harmoniques du second degré d'un quelconque x_i de ces éléments par rapport au groupe $f=0$, coïncident l'un avec le point x_i, l'autre avec le point (qui est centre) harmonique du premier degré de x_i par rapport au groupe des m points restants $p_x^m = \frac{f}{(xx_i)}$ de f.*

2. Les notations précédentes étant adoptées, la formule ordinaire, pour la décomposition de

$$\frac{h}{f} = \frac{h_x^m}{a_x^{m+1}}$$

en fractions simples, devient

$$(8)\qquad \frac{h}{f} = \sum \frac{h_{x_i}^m}{\Pi_i}\,\frac{1}{(xx_i)},$$

la forme f étant supposée à racines inégales.

A côté de cette formule, il convient de placer cette autre,

$$(9)\qquad \sum \frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} = 0$$

(t_x^{m-1} désignant une forme quelconque d'ordre $m-1$), laquelle n'est au fond, comme on sait, qu'un cas particulier de la formule précédente (8).

Si dans la formule (8), écrite comme il suit,

$$h_x^m = \sum \frac{h_{x_i}^m}{\Pi_i}\,p_i, \quad \text{ou} \quad p_i = \frac{f}{(xx_i)},$$

on remplace les symboles h_1, h_2 par y_2 et $-y_1$, et puis les x_1, x_2 par les symboles $-h_2$, h_1, on obtient la formule

$$h_y^m = \sum \frac{(h, p_\iota)_m}{\Pi_\iota}(yx_\iota)^m,$$

qui fournit la relation linéaire par laquelle la forme h_y^m est liée aux puissances $m^{\text{ièmes}}$ des $m+1$ expressions (yx_ι). De même, il est à remarquer que la formule (9) peut être écrite

$$\sum \frac{(rx_\iota)^{m-1}}{\Pi_\iota} = 0,$$

et fournit ainsi la relation linéaire qui doit exister entre les puissances $(m-1)^{\text{ièmes}}$ des $m+1$ facteurs linéaires de f.

3. Il n'y a pas, à proprement parler, de formule de décomposition en fractions simples, pour le quotient de deux *formes,* dans le cas où la forme en numérateur serait d'un degré moindre de plus d'une unité que le degré du dénominateur (celui-ci étant supposé à racines inégales). Pourtant, s'il s'agissait, par exemple, de l'expression

$$\frac{t}{f} = \frac{t_x^{m-1}}{a_x^{m+1}},$$

on pourrait appliquer la formule (8) à l'expression $\frac{(xy)t}{f}$. De cette manière, on obtient

$$(xy)\frac{t}{f} = (xy)\frac{t_x^{m-1}}{a_x^{m+1}} = -\sum \frac{t_{x_\iota}^{m-1}}{\Pi_\iota}\frac{(yx_\iota)}{(xx_\iota)}. \tag{10}$$

Cette dernière formule se prête fort bien aux besoins d'une première intégration. En effet, comme on a

$$d\left[\log\frac{(xx_\iota)}{(xy)} + \text{const.}\right] = \frac{(yx_\iota)}{(xy)(xx_\iota)}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1), \tag{11}$$

on doit aussi avoir

$$\left\{\begin{aligned} \int \frac{t}{f}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) &= -\sum \frac{t_{x_\iota}^{m-1}}{\Pi_\iota}[\log(xx_\iota) - \log(xy)] + C \\ &= -\sum \frac{t_{x_\iota}^{m-1}}{\Pi_\iota}\log(xx_\iota) + C. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

4. En appliquant la formule (8) à l'expression

$$\frac{g}{(xy)f} = \frac{b_x^{m+1}}{(xy)a_x^{m+1}},$$

on obtient

$$\frac{b_x^{m+1}}{(xy)a_x^{m+1}} = -\sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} \frac{1}{(xx_\iota)(yx_\iota)} + \frac{b_y^{m+1}}{(xy)a_y^{m+1}},$$

ou bien

(13) $$\frac{a_x^{m+1} b_y^{m+1} - a_y^{m+1} b_x^{m+1}}{(xy)} = \sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} \frac{f(x)}{(xx_\iota)} \frac{f(y)}{(yx_\iota)}.$$

De là on déduit la valeur remarquable suivante pour la jacobienne $(m+1)(f, g)_1$:

(14) $$(m+1)(ab)a_x^m b_x^m = \sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} \frac{f^2}{(xx_\iota)^2}.$$

Il résulte de cette formule (14) que *l'expression générale des jacobiennes des faisceaux $\lambda f + \mu g$ qui contiennent une forme donnée*

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2)\ldots(xx_{m+1})$$

est

(15) $$\alpha_x^{2m} = f^2 \sum \frac{\lambda_\iota}{(xx_\iota)^2},$$

où les λ_ι désignent des paramètres arbitraires.

Maintenant la formule (13) montre ceci de plus, qu'étant donnée une forme telle que (15), c'est-à-dire qui soit la jacobienne d'un faisceau $\lambda f + \mu g$ contenant la forme $f = a_x^{m+1}$, la condition pour que deux points x et y appartiennent à une même forme de ce faisceau est

(16) $$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{(xy)} = (m+1)\sum \lambda_\iota \frac{f(x)}{(xx_\iota)} \frac{f(y)}{(yx_\iota)} = 0.$$

5. On aurait pu arriver également à la formule (14) en considérant la différentielle de l'expression rationnelle

$$\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}} = -\sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} \frac{(xy)}{(xx_\iota)(yx_\iota)} + \frac{b_y^{m+1}}{a_y^{m+1}}.$$

Cette différentielle est, en effet,

(17) $$\left\{\begin{aligned} d\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}} &= (m+1)\frac{(ab)a_x^m b_x^m}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) \\ &= \sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} \frac{1}{(xx_\iota)^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1), \end{aligned}\right.$$

et cela par suite de la formule

$$(18)\qquad d\,\frac{(xy)}{(xx_i)} = -\,\frac{(yx_i)}{(xx_i)^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

qu'il convient de comparer à la formule (11) précédente.

La propriété exprimée par la relation (17) fait voir que la détermination des faisceaux de formes binaires de degré $m+1$ ayant une jacobienne donnée $\alpha = \alpha_x^{2m}$ fournit la solution de cette question : *Déterminer les formes $f = a_x^{m+1}$ qui sont telles que l'intégrale*

$$\int \frac{\alpha}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

où α est une forme binaire donnée de degré $2m$, ait une valeur algébrique de la forme $\dfrac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$ (1).

---

(1) C'est exprès que je dis « de la forme $\dfrac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$ », parce qu'il y a aussi d'autres expressions rationnelles (dont les termes sont des formes d'un degré supérieur à $m+1$) qui conduisent à des différentielles telles que

$$\frac{\alpha}{f^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1),$$

f étant une forme de degré $m+1$ admettant des systèmes convenables de racines multiples.

Le problème de la recherche de ces diverses expressions rationnelles rentre, comme cas particulier, dans la question de la *détermination des formes*

$$f = a_x^{m+1} = (xx_1)^{k_1}(xx_2)^{k_2}\ldots(xx_n)^{k_n},\quad (\Sigma k_i = m+1),$$

auxquelles correspond une intégrale

$$\int \frac{\psi_x^{m+n-1}}{\Pi(xx_i)^{k_i+1}}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

(*où ψ désigne une forme donnée*) *admettant une valeur algébrique* $\dfrac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$. (En prenant $n = m+1$, on a le cas considéré dans le texte.)

Il est à remarquer que les conditions auxquelles doivent satisfaire les n facteurs linéaires d'une pareille forme f (supposés inégaux et de degrés de multiplicité $k_i > 0$) coïncident avec celles qui expriment que la forme $\varphi_x^{2m} = \psi.\Pi(xx_i)^{k_i-1}$ constitue la jacobienne d'un faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$ contenant la forme f. Le nombre de ces conditions est égal à $n-1$, comme cela a déjà été remarqué (Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 506). Nous examinerons plus bas (nos 21 et 22) ce que deviennent les n conditions en question dans le cas où l'on a $n = m+1$ (pour $k_i = 1$). Dans le cas où $f = (xx_1)^{k_1}(xx_2)^{k_2}$, $(n = 2)$, on doit avoir simplement $\psi_{x_1}^{k_2}\psi_{x_2}^{k_1} = 0$.

En effet, on voit bien que, si pour une valeur déterminée de $f = a_x^{m+1}$ l'intégrale précédente devient égale à $\frac{b_x^{m+1}}{a_x^{m+1}}$, toute autre forme $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$, placée dans l'expression de l'intégrale considérée, au lieu de f, doit également conduire à une valeur algébrique

$$\frac{\lambda' a_x^{m+1} + \mu' b_x^{m+1}}{\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}}$$

de la même intégrale.

6. Deux formes binaires a_x^{m+1} et b_x^{m+1}, d'un même degré, sont appelées *conjuguées* (d'après M. Rosanès), dans le cas où leur invariant simultané $(ab)^{m+1}$ est nul.

Les formes b_x^{m+1} qui sont conjuguées aux formes d'un *système linéaire à k paramètres*

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$$

forment aussi un *système linéaire,* à $m - k$ paramètres,

$$\lambda_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \lambda_m f_m + \lambda_{m+1} f_{m+1}.$$

(Les formes $f_0, f_1, \ldots, f_k$ doivent être linéairement indépendantes entre elles ; il doit en être de même pour les formes $f_{k+1}, \ldots, f_{m+1}$).

Deux pareils systèmes linéaires, conjugués entre eux, admettent les mêmes covariants (*combinants* des formes f_i qui déterminent ces systèmes). Ainsi, par exemple, les déterminants fonctionnels

$$\sum \pm \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \cdots \frac{\partial^k f_k}{\partial x_2^k}$$

et

$$\sum \pm \frac{\partial^{m-k} f_{k+1}}{\partial x_1^{m-k}} \cdots \frac{\partial^{m-k} f_m}{\partial x_1 \partial x_2^{m-k-1}} \frac{\partial^{m-k} f_{m+1}}{\partial x_2^{m-k}}$$

de ces deux systèmes ne diffèrent entre eux que par un facteur constant.

Lorsqu'on pose

$$a_x^{m+1} = (xx_1)(xx_2) \ldots (xx_{m+1}),$$

l'invariant $(ab)^{m+1}$ devient

$$(ab)^{m+1} = b_{x_1} b_{x_2} \ldots b_{x_{m+1}}.$$

Il résulte de là que, si l'on a

$$a_y^k a_z^{m-k+1} = 0,$$

la forme $(xy)^k(xz)^{m-k+1}$ est conjuguée à $f = a_x^{m+1}$. En particulier, la forme $(xy)^{m+1}$ est conjuguée à f, si l'on a

$$a_y^{m+1} = 0.$$

Dans le cas où les diverses racines $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ de f sont inégales, l'expression générale des formes conjuguées à f est

$$\lambda_1(xx_1)^{m+1} + \lambda_2(xx_2)^{m+1} + \ldots + \lambda_{m+1}(xx_{m+1})^{m+1}.$$

On dit que la forme a_x^{m+1} est *apolaire* par rapport à une forme c_x^n de degré $n > m+1$, si l'on a identiquement

$$(ac)^{m+1} c_x^{n-m+1} = 0.$$

On voit que dans ce cas la forme c_x^n est conjuguée à toute forme $a_x^{m+1}\lambda_x^{n-m+1}$ contenant f en facteur. On peut désigner cette relation de la forme c_x^n à la forme a_c^{m+1} en disant encore que la forme c_x^n est *conjuguée* à la forme a_x^{m+1}. Si les racines de f sont inégales, on doit avoir, pour des valeurs convenables des λ_i,

$$c_x^n = \lambda_1(xx_1)^n + \lambda_2(xx_2)^n + \ldots + \lambda_{m+1}(xx_{m+1})^n.$$

7. Nous savons déjà (n° 4) que les jacobiennes des faisceaux de degré $m+1$, qui contiennent une forme donnée $f = a_x^{m+1}$, constituent un système linéaire à m paramètres. Il résulte de là que les formes A_x^{2m}, conjuguées à toutes ces jacobiennes, doivent constituer un système linéaire à $m-1$ paramètres.

Comme ces formes A_x^{2m} doivent satisfaire à la relation

$$(Aa)^m(Ab)^m(ab) = 0,$$

quelle que soit la forme b_x^{m+1}, on voit que l'on doit avoir identiquement

$$(Aa)^m A_x^m a_x = 0.$$

Il est manifeste que, réciproquement, toute forme A_x^{2m} satisfaisant à cette relation est conjuguée par rapport à toutes les jacobiennes $(f, g)_1$, quel que soit $g = b_x^{m+1}$.

En ayant égard à l'expression générale des jacobiennes $(f, g)_1$ en question, donnée au n° 4, on voit que, si toutes les racines x_i de f sont inégales, on devra avoir

$$(A, p_i)_{2m} = 0, \quad \text{où} \quad p_i = \frac{f}{(xx_i)},$$

quelle que soit la racine x_i.

8. Comme toute forme $(xy)^m(xz)$, telle que $a_y^m a_z = 0$, est conjuguée à f, on voit que les formes $(xy)^m a_y^m a_x$ doivent être conjuguées à f, quel que soit y.

Plus généralement, toute forme comprise dans l'expression

$$(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x$$

doit être conjuguée à f, quelle que soit la forme λ_x^{2m}.

D'après le numéro précédent, il n'y a parmi les formes λ_x^{2m} que m, linéairement indépendantes entre elles, qui donnent lieu à une expression $(\lambda, a)_m$ identiquement nulle. Il suit de là que l'expression $(\lambda, a)_m$ est toujours capable de représenter $m+1$ formes linéairement indépendantes entre elles, lorsque la forme a_x^{m+1} est donnée. On voit ainsi que l'expression $(\lambda, a)_m$ peut représenter, dans tous les cas, toute forme b_x^{m+1} conjuguée à a_x^{m+1}.

Il est aisé d'obtenir l'expression de $(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x$ sous la forme $\Sigma \mu_\iota (xx_\iota)^{m+1}$. Il suffit pour cela de considérer la formule (14) du n° 4, formule qu'on peut écrire comme il suit :

$$(ab) a_x^m b_x^m = \frac{1}{m+1} \sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} p_\iota^2 \quad \text{ou} \quad p_\iota = \frac{f}{(xx_\iota)}.$$

En changeant dans cette formule les x_1, x_2 en λ_2, $-\lambda_1$ et les b_1, b_2 en $-x_2$, x_1, on obtient, en effet,

$$(\lambda a)^m \lambda_x^m a_x = \frac{1}{m+1} \sum \frac{(\lambda, p_\iota^2)_{2m}}{\Pi_\iota} (xx_\iota)^{m+1}.$$

Il est à remarquer que la formule (13) du n° 4 peut aussi conduire à une représentation de la forme

$$(ac)^{m+1} b_x^{m+1} - (ab)^{m+1} c_x^{m+1}$$

(laquelle est manifestement conjuguée à f), par une expression

$$\Sigma \mu_\iota (xx_\iota)^{m+1}.$$

En remplaçant, en effet, dans la formule en question

$$f(x)g(y) - f(y)g(x) = \sum \frac{b_{x_\iota}^{m+1}}{\Pi_\iota} (xy) p_\iota(x) p_\iota(y),$$

les x_1, x_2 par les symboles c_2, $-c_1$, puis les symboles b_1, b_2 par $-x_2$, x_1, et enfin les y_1, y_2 par b_2, $-b_1$, on obtient

$$(ac)^{m+1} b_x^{m+1} - (ab)^{m+1} c_x^{m+1} = (-1)^m \sum \frac{(bc)(bp_\iota)^m (cp'_\iota)^m}{\Pi_\iota} (xx_\iota)^{m+1}.$$

Dans le cas où la forme $g = b_x^{m+1}$ est conjuguée à f, $(ab)^{m+1}$ étant égal à zéro, la formule précédente donne la représentation de g sous la forme d'une somme

$$\Sigma\, \mu_\iota (xx_\iota)^{m+1},$$

par l'emploi auxiliaire de la forme c_x^{m+1} qui peut être quelconque (différente pourtant de f dans le cas où m est impair).

II.

Décomposition en fractions simples de $\frac{\varphi}{f^2}$.

9. J'arrive maintenant à la décomposition de l'expression rationnelle

$$\frac{\varphi}{f^2}, \quad \text{où} \quad \varphi = \varphi_x^{2m}, \quad f = a_x^{m+1},$$

en fractions simples.

Pour obtenir cette décomposition je procéderai de la manière suivante.

Je remarque que

$$\frac{\varphi_x^{2m}}{f^2}$$

peut être considéré comme le carré de l'expression symbolique

$$\frac{\varphi_x^m}{f},$$

laquelle, d'après la formule générale de décomposition (n° 2), doit être égale à

$$\frac{\varphi_x^m}{f} = \sum \frac{\varphi_{x_\iota}^m}{\Pi_\iota} \frac{1}{(xx_\iota)},$$

en supposant toujours que les racines de $f = 0$ soient inégales. Nous aurons ainsi l'identité

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi}{f^2} &= \left[\sum \frac{\varphi_{x_\iota}^m}{\Pi_\iota} \frac{1}{(xx_\iota)} \right]^2 \\ &= 2 \sum \frac{\varphi_{x_\iota}^{m} \varphi_{x_j}^{m}}{\Pi_\iota \Pi_j} \frac{1}{(xx_\iota)(xx_j)} + \sum \frac{\varphi_x^{2m}}{\Pi_\iota^2} \frac{1}{(xx_\iota)^2}. \end{aligned} \right.$$

De cette manière la somme des fractions du premier degré dans le développement de $\frac{\varphi}{f^2}$ en fractions simples sera

$$(2)\qquad \frac{1}{D} \frac{t_x^{m-1}}{f} = 2 \sum \frac{\varphi_{x_\iota}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_\iota \Pi_j} \frac{1}{(xx_\iota)(xx_j)} \quad (j > \iota),$$

D désignant le discriminant de la forme f. Quant à la forme $t = t_x^{m-1}$, elle constitue un covariant simultané des deux formes φ et f, dont les coefficients sont des expressions entières du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m - 1$ par rapport aux coefficients de f.

De même, la somme des fractions du second degré dans le développement considéré sera

$$(3) \qquad \frac{1}{D}\frac{\alpha_x^{2m}}{f^2} = \sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\frac{1}{(xx_i)^2},$$

$\alpha = \alpha_x^{2m}$ étant un covariant simultané des deux formes φ et f, du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m$ par rapport aux coefficients de f. Remarquons que, d'après le n° **4**, la forme α doit être la jacobienne d'un faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$; elle doit donc être de la forme $(ab) a_x^m b_x^m$.

10. Dans le cas où $D = 0$, les deux formes t et α, définies par les relations (2) et (3) précédentes, subsistent encore, quoiqu'elles ne correspondent plus aux sommes des fractions de premier et de second degré dans le développement de $\frac{\varphi}{f^2}$.

En supposant, en effet, que x_i et x_j soient les deux racines de f qui deviennent égales dans ce cas, on aura

$$t = \quad 2[\Pi_{ij}]\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m \frac{f}{(xx_i)(xx_j)},$$

$$\alpha = -2[\Pi_{ij}]\varphi_x^m \varphi_{x_j}^m \frac{f}{(xx_i)(xx_j)},$$

où

$$[\Pi_{ij}] = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Pi_1\Pi_2 \ldots \Pi_{i-1}\Pi_{i+1} \ldots \Pi_{j-1}\Pi_{j+1} \ldots \Pi_{m+1},$$

et cela en admettant que, dans le cas général, on a

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Pi_1\Pi_2 \ldots \Pi_{m+1}.$$

Maintenant, pour que les formes t et α deviennent identiquement nulles à la fois, il faut et il suffit que la condition $D = 0$ soit accompagnée par une des circonstances suivantes :

1° Que le facteur double $(xx_i) = (xx_j)$ de f entre aussi en facteur (au moins simple) dans φ;

2° Qu'il y ait encore une troisième racine de f qui devienne égale à $x_i = x_j$;

3° Qu'il y ait, en dehors de $x_i = x_j$, un autre couple de racines de f qui deviennent égales entre elles.

11. Tant que les deux formes t et $\alpha = (ab) a_x^m b_x^m$ ne deviennent pas identiquement nulles à la fois, elles peuvent être définies par la relation

$$(4) \qquad D \varphi_x^{2m} = a_x^{m+1} t_x^{m-1} + (ab) a_x^m b_x^m.$$

On voit par là que, dans le cas où $D \lesseqgtr 0$, la forme t ne peut être identiquement nulle que si φ est la jacobienne d'un faisceau

$$\lambda f + \mu g = \lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1},$$

contenant la forme f. De même, lorsque $D \lesseqgtr 0$, la forme

$$\alpha = (ab) a_x^m b_x^m$$

ne peut être identiquement nulle que si la forme φ est divisible par $f = a_x^{m+1}$.

Dans le cas où $D = 0$, l'évanouissement identique de l'une des formes t, α entraîne l'évanouissement identique de l'autre ([1]).

12. Par suite de l'identité

$$\frac{1}{(xx_i)(xx_j)} = \frac{1}{(xy)} \left[\frac{(yx_i)}{(xx_i)} (x_j x_i)^{-1} + \frac{(yx_j)}{(xx_j)} (x_i x_j)^{-1} \right],$$

il se trouve que l'expression

$$\frac{1}{D} \frac{t}{f} = 2 \sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(xx_i)(xx_j)}$$

peut être écrite comme il suit

$$(5) \qquad \frac{1}{D} \frac{t}{f} = -2 \sum \frac{\varphi_{x_i}^m \varphi_{x_j}^m}{\Pi_i \Pi_j} \frac{1}{(x_i x_j)} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

Pour obtenir la valeur du coefficient de

$$\frac{1}{\Pi_i} \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}$$

([1]) Lorsque $D = 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être mise sous la forme $ft + (f, g)_1$, est que φ admette comme racine k^{uple} toute racine $(k+1)^{\text{uple}}$ de f; mais alors il y a une k^{uple} infinité de déterminations pour les formes t et $(f, g)_1$. Cela correspond encore au problème de la décomposition de $\frac{\varphi}{f^2}$ en fractions simples.

dans cette expression, je remarque que, d'après la formule de décomposition (8) du n° 2, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(xx_j)} &= \frac{\varphi_{x_i}^m\varphi_x^m}{f(x)} - \frac{\varphi_{x_i}^m\varphi_{x_i}^m}{(xx_i)\Pi_i}\\ &= \frac{\varphi_{x_i}^m\varphi_x^m}{(xx_i)p(x)} - \frac{\varphi_{x_i}^m\varphi_{x_i}^m}{(xx_i)p(x_i)}\end{aligned}\right\} \quad (\text{où } j \lesseqgtr i).$$

Maintenant, si l'on fait $x = x_i$ dans cette relation, on obtient

$$\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(x_ix_j)} = m\,\frac{(\varphi p)\varphi_{x_i}^{2m-1}p_{x_i}^{m-1}}{p(x_i)p(x_i)}$$

ou bien

$$\varphi_{x_i}^m \sum_j \frac{\varphi_{x_j}^m}{\Pi_j(x_ix_j)} = -\frac{m(m+1)}{2}\,\frac{(\varphi a)^2\varphi_{x_i}^{2m-2}a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}\ (^1),$$

par suite de la formule (7) du n° 1.

On voit par là que le coefficient de

$$\frac{1}{\Pi_i}\,\frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)},$$

dans l'expression (5), sera

$$m(m+1)\,\frac{(\varphi a)^2\varphi_{x_i}^{2m-2}a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}.$$

On aura de la sorte

$$\frac{1}{D}\,\frac{t}{f} = m(m+1)\sum \frac{(\varphi a)^2\varphi_{x_i}^{2m-2}a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3}\,\frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

13. Envisageons maintenant la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi}{f^2}(x\,dx) = \frac{1}{D}\int \frac{t}{f}(x\,dx) + \frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(x\,dx) = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1.$$

L'application de la formule (11) du n° 3 à l'expression

$$\frac{1}{D}\int \frac{t}{f}(x\,dx) = m(m+1)\sum\left[\frac{(\varphi a)^2\varphi_{x_i}^{2m-2}a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3}\int \frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}(x\,dx)\right]$$

---

(1) Cette formule paraît n'être qu'un cas particulier d'une autre plus generale, laquelle serait

$$-\frac{m(m+1)}{2}(\varphi, a)_2 = f^3\sum \frac{\varphi_{x_i}^m\varphi_{x_j}^m}{\Pi_i\Pi_j}\,\frac{(x_ix_j)^2}{(xx_i)^3(xx_j)^3} \qquad (i \gtrless j),$$

mais dont je n'ai eu l'occasion de verifier l'exactitude que pour les cas de $m = 1, 2, 3$

donne

$$(6)\qquad \frac{1}{D}\int_f^t (x\,dx) = m(m+1)\sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3}\log(xx_i) + \text{const.}$$

D'une manière analogue, en appliquant la formule (18) du nº 5 à l'expression

$$\frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = \sum\left[\frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\int\frac{(x\,dx)}{(xx_i)^2}\right],$$

on obtient

$$\frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = -\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\frac{(xy)}{(xx_i)(yx_i)}.$$

Dans cette dernière formule, c'est y qui joue le rôle de la constante d'intégration. Toutefois il est aisé de mettre l'expression

$$-\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\frac{(xy)}{(xx_i)(yx_i)}$$

sous une forme où les x et les y figurent séparément.

Pour cela, il suffit de remarquer que, par suite de l'identité symbolique

$$(yx)\varphi_{x_i} = (yx_i)\varphi_x - (xx_i)\varphi_y,$$

on a

$$\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\frac{(yx)}{(xx_i)(yx_i)} = \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} - \sum \frac{\varphi_y \varphi_{x_i}^{2m-1}}{(yx_i)\Pi_i^2}.$$

On obtient ainsi la formule remarquable suivante :

$$(7)\qquad \frac{1}{D}\int \frac{\alpha}{f^2}(x\,dx) = \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} + \text{const.}$$

La valeur de cette intégrale, si l'on fait abstraction de la constante, se présente, comme on voit, sous la forme

$$\frac{1}{(m+1)D}\frac{s}{f},$$

où

$$(8)\qquad s = s_x^{m+1} = (m+1)D\sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}}{\Pi_i^2}\frac{f}{(xx_i)}$$

est une forme du $(m+1)^{\text{ieme}}$ ordre laquelle constitue un covariant simultané des deux formes φ et f, du premier degré par rapport aux coefficients de φ et de degré $2m-1$ par rapport aux coefficients de f.

Le faisceau $\lambda f + \mu s = \lambda a_x^{m+1} + \mu s_x^{m+1}$ admet précisément pour jacobienne la forme α. Quant à la relation qui doit exister entre deux points x et y appartenant à une même forme de ce faisceau, elle est

$$\frac{f(x)s(y) - f(y)s(x)}{(xy)} = (m+1)\,\mathrm{D}\sum \frac{\varphi_{x_i}^{2m}}{\Pi_i^2}\,\frac{f(x)}{(xx_i)}\,\frac{f(y)}{(yx_i)} = 0.$$

14. Dans le cas où la forme s devient identiquement nulle, il en est naturellement de même pour la jacobienne $\alpha = (f, s)_1$.

Maintenant le cas où la forme α devient identiquement nulle a besoin d'être examiné de plus près, puisqu'alors il peut se faire ou bien que la forme s soit identiquement nulle ou bien qu'elle soit proportionnelle à f (égale, par exemple, à λf, pour $\lambda \lessgtr 0$).

Examinons d'abord le cas où $\mathrm{D} = 0$. Si les racines de f qui deviennent égales entre elles dans ce cas sont x_i et x_j, nous aurons, pour la forme s,

$$s = (m+1)[\Pi_{ij}]\,.\,\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}\,\frac{f}{(xx_i)},$$

étant posé

$$[\Pi_{ij}] = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\,\Pi_1\Pi_2\ldots\Pi_{i-1}\Pi_{i+1}\ldots\Pi_{j-1}\Pi_{j+1}\ldots\Pi_{m+1}.$$

L'évanouissement de α est accompagné, dans ce cas, par une des circonstances indiquées au n° 10.

Si la première de ces circonstances a lieu, c'est-à-dire si la forme φ devient nulle pour $x = x_i$, on voit que $\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1}$ sera divisible par (xx_i). La forme s sera alors égale à λf, λ étant un coefficient qui ne devient nul que si la forme φ admet (xx_i) pour facteur double ou bien si, en même temps que l'on a $\varphi(x_i) = 0$, une des deux autres circonstances se présente.

La forme s devient aussi identiquement nulle si la deuxième ou la troisième des circonstances mentionnées a lieu, c'est-à-dire si la forme f admet une racine triple ou bien deux racines doubles.

Je passe maintenant au cas où, D étant différent de 0, on $\mathrm{D}\varphi = ft$, par suite de $\alpha = 0$. On a alors

$$2m\mathrm{D}\varphi_x\varphi_{x_i}^{2m-1} = (xx_i)\,t_{x_i}^{m-1}\,.\,\Pi_i$$

et

$$s = (m+1)\,\mathrm{D}f\sum\frac{\varphi_x\varphi_{x_i}^{2m-1}}{(xx_i)\Pi_i^2} = \frac{(m+1)}{2m}\,f\sum\frac{t_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}.$$

Mais comme, d'après le n° 2, on a $\sum \frac{t_{x_\iota}^{m-1}}{\Pi_\iota} = 0$, on voit bien que la forme s est, dans ce cas, identiquement nulle.

Il est à remarquer que la forme s est aussi identiquement nulle toutes les fois que φ est divisible par f, et cela quel que soit D.

III.

Propriétés relatives à la forme s.

15. La forme s, définie dans ce qui précède par la relation

$$(1) \qquad s = s_x^{m+1} = (m+1)\,\mathrm{D} \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_\iota}^{2m-1}}{\Pi_\iota^2}\,\frac{f}{(xx_\iota)},$$

devient, comme nous venons de remarquer (n° **14**), identiquement nulle toutes les fois que φ est divisible par f, quel que soit du reste D. C'est là un fait bien important et dont découlent des propriétés bien remarquables de cette forme.

Comme la forme s ne contient les coefficients de φ qu'au premier degré, on voit qu'elle ne doit pas être altérée lorsqu'on remplace φ par $\varphi + fh$, h désignant une forme quelconque d'ordre $m-1$. Parmi ces formes $\varphi + fh$ se distingue la forme $\varphi - \frac{1}{\mathrm{D}} ft$, laquelle constitue la jacobienne d'un faisceau contenant la forme f.

Tout cela fait voir que la forme s est déterminée, à un facteur constant près, toutes les fois qu'on donne la forme $f = a_x^{m+1}$ et le faisceau $\lambda a_x^{m+1} + \mu b_x^{m+1}$ qui doit contenir s.

Du reste, pour calculer la forme s, en partant de ces données, on n'a qu'à supposer

$$\varphi = (ab) a_x^m b_x^m,$$

dans l'expression précédente (1) de la forme s.

Ainsi, en remarquant que

$$\begin{aligned} \varphi_x \varphi_{x_\iota}^{2m-1} &= (ab) a_x a_{x_\iota}^{m-1} b_{x_\iota}^m + \frac{1}{2}(xx_\iota)(ab)^2 a_{x_\iota}^{m-1} b_{x_\iota}^{m-1} \\ &= \frac{1}{m+1}\,\Pi_\iota b_x b_{x_\iota}^m + \frac{1}{2}(xx_\iota)(ab)^2 a_{x_\iota}^{m-1} b_{x_\iota}^{m-1}, \end{aligned}$$

on obtient

$$s = \mathrm{D}\sum \frac{b_x b_{x_i}^m}{\Pi_i}\,\frac{f}{(xx_i)} + \frac{m+1}{2} f \mathrm{D}\sum \frac{(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}$$

$$= \mathrm{D}\, b_x^{m+1} + \frac{m+1}{2} f \mathrm{D}\sum \frac{(ab)^2 a_{x_i}^{m-1} b_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}.$$

Si maintenant la forme s devait être proportionnelle à la forme b_x^{m+1}, le coefficient de f, dans l'expression précédente, devait être nul.

Cela montre que *les formes s, contenues dans l'expression*

$$s = (m+1)\,\mathrm{D}\sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}\,\frac{f}{(xx_i)},$$

sont toutes liées à la forme $f = a_x^{m+1}$ par la relation invariante

$$\mathrm{D}\sum \frac{(as)^2 a_{x_i}^{m-1} s_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2} = 0. \tag{2}$$

En d'autres termes, les formes s considérées doivent être toutes conjuguées à la forme

$$\mathrm{D}\sum \frac{(xx_i)^{m-1} a_x^2 a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}, \tag{3}$$

laquelle constitue bien un covariant de f.

Il est à remarquer que, si l'on désigne par $\Delta = \Delta_x^{2m-2}$ le covariant

$$\Delta = (m+1)\mathrm{D}\sum \frac{(xx_i)^{2m-2}}{\Pi_i^2}$$

de f, la forme (3) *sera égale à* $(\Delta a)^{m-1} \Delta_x^{m-1} a_x^2$ (¹).

16. Parmi les formes s il en existe toujours une qui soit composée par un facteur de degré m, $p = \frac{f}{(xx_i)}$, de la forme f et

---

(¹) La forme Δ a la propriété d'être *conjuguée* (*voir* n° 6) par rapport aux premières polaires $a_y a_x^m$ de la forme f. Aussi satisfait-elle aux relations

$$(\Delta a)^m \Delta_x^{m-2} a_x = 0, \quad (\Delta a)^{m+1} \Delta_x^{m-3} = 0.$$

L'évanouissement identique de cette forme Δ constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la forme f admette soit un facteur linéaire triple, soit deux facteurs linéaires doubles distincts. Il est aussi à noter que, si l'on désigne par H la hessienne $(f, f)_2$ de f, on doit avoir

$$\mathrm{D} = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\Delta)^{2m-2}.$$

par un autre facteur linéaire (xz_i). Il est à remarquer que ce facteur (xz_i) coïncide avec la forme $p_x p_{x_i}^{m-1}$, c'est-à-dire qu'il représente le point (qui est centre) harmonique de premier degré de x_i par rapport au groupe des m points $p = 0$.

Cette propriété résulte simplement de ce que la forme s

$$s = (m+1)\,\mathrm{D} \sum \frac{\varphi_x \varphi_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^2}\, \frac{f}{(xx_i)},$$

qui correspond à $\varphi = p^2$, est égale à

$$s = (m+1)\,\mathrm{D} p\, \frac{p_x p_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i}.$$

Ainsi donc *l'expression générale des formes s, dans le cas où les facteurs (xx_i) de f sont inégaux, est*

$$\Sigma \lambda_i p_x p_{x_i}^{m-1} \frac{f}{(xx_i)}, \quad \text{où} \quad p = \frac{f}{(xx_i)}.$$

17. De la proposition que nous venons d'établir, on peut aisément conclure que la relation invariante (2), par laquelle les formes s sont liées à f, peut être écrite de la manière suivante :

$$(5) \qquad s_0 \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_0} + s_1 \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_1} + \ldots + s_{m+1} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_{m+1}} = 0,$$

étant supposé que

$$f = \sum \binom{m+1}{i} a_i x_1^{m-i-1} x_2^i, \quad s = \sum \binom{m+1}{i} s_i x_1^{m-i-1} x_2^i.$$

Pour cela, il suffit, évidemment, de prouver qu'il en est ainsi pour une quelconque des formes

$$(5) \qquad p(xz_i), \qquad \text{où} \qquad p = \frac{f}{(xx_i)}, \quad (xz_i) = p_x p_{x_i}^{m-1}.$$

Dans ce cas on doit, en effet, avoir

$$\sum s_k \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_k} = z_{i1} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_{i1}} + z_{i2} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_{i2}},$$

c'est-à-dire

$$\sum s_k \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_k} = 2\mathrm{D} \sum_j \frac{(z_i x_j)}{(x_i x_j)},$$

par suite de ce que

$$\mathrm{D} = (x_1 x_2)^2 (x_1 x_3)^2 \ldots (x_m x_{m+1})^2.$$

Comme maintenant

$$\sum_j \frac{(z_i x_j)}{(x_i x_j)} = \frac{1}{m}\frac{p_{z_i} p_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i} = 0,$$

on voit que la relation (4) est bien satisfaite pour chacune des formes (5) et, par conséquent, pour toutes les formes s considérées.

La propriété que nous venons de démontrer est intimement liée à ce fait que, dans le cas où la forme f admet un facteur double (xx'), la forme Δ (du n° 15) devient proportionnelle à $(xx')^{2m-2}$, tandis que la forme (3), c'est-à-dire la forme $(\Delta a)^{m-1}\Delta_x^{m-1}a_x^2$, devient proportionnelle à $(xx')^{m+1}$.

On sait en effet que, dans ce cas, les diverses dérivées

$$\frac{\partial D}{\partial a_0}, \frac{\partial D}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial D}{\partial a_{m+1}}$$

du discriminant D sont respectivement proportionnelles à

$$x_1'^{m+1}, \binom{m+1}{1} x_1'^m x_2', \dots, x_2'^{m+1} \text{ (1)},$$

tandis que, d'après ce que nous venons de voir, on a, en général,

$$\left(x_1^{m+1}\frac{\partial D}{\partial a_{m+1}} - x_1^m x_2 \frac{\partial D}{\partial a_m} + \dots\right) = -m(m+1)(\Delta a)^{m-1}\Delta_x^{m-1}a_x^2.$$

IV.

Propriétés relatives à la forme t.

18. Je passe maintenant à l'examen des propriétés relatives à la forme $t = t_x^{m-1}$, laquelle a été définie, dans ce qui précède (§ II), par la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{D}\frac{t}{f} = 2\sum \frac{\varphi_{r} \varphi_{r_i}^m}{\Pi_i \Pi_j}\frac{1}{(xx_i)}\frac{1}{(xx_j)},$$

ou bien par celle-ci :

$$(2) \qquad \frac{1}{D}\frac{t}{f} = m(m+1)\sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1}}{\Pi_i^3}\frac{(yx_i)}{(xy)(xx_i)}.$$

Nous avons déjà vu que dans le cas où $D \lessgtr 0$, la forme t ne peut être identiquement nulle que si la forme φ est la jacobienne

---

(1) *Voir* SALMON, *Higher Algebra*, 3e édition, n° 113.

d'un faisceau contenant la forme f. Grâce à cette circonstance, l'étude des propriétés de cette forme t peut avoir son utilité dans l'étude des formes $\alpha = (ab)a_x^m b_x^m$, correspondant à des faisceaux contenant la forme f.

19. La comparaison de la formule (2) avec celle-ci :

$$\frac{t}{f} = \sum \frac{t_{x_\iota}^{m-1}}{\Pi_\iota} \frac{(yx_\iota)}{(yx)(xx_\iota)}$$

(*voir* le n° **3**), montre qu'on a

$$\frac{1}{D} t_{x_\iota}^{m-1} = m(m+1)\frac{Q_\iota}{\Pi_\iota^2}, \tag{3}$$

étant posé

$$Q_\iota = (\varphi a)^2 \varphi_{x_\iota}^{2m-2} a_{x_\iota}^{m\ 2}.$$

On doit bien remarquer que les $m+1$ expressions Q_ι sont liées entre elles par la relation linéaire

$$\sum \frac{Q_\iota}{\Pi_\iota^3} = \sum \frac{(\varphi a)^2 \varphi_{x_\iota}^{2m-2} a_{x_\iota}^{m\ 1}}{\Pi_\iota^3} = 0, \tag{4}$$

laquelle est une conséquence de la formule (9) du n° **2**.

20. On aurait pu arriver à la formule (3) de la manière suivante :

De la relation

$$D\varphi = (f, g)_1 + ft,$$

qui peut servir à définir les formes $\alpha = (f, g)_1$ et t, pour le cas où $D \gtrless 0$ (*voir* n° **11**), on déduit la relation importante

$$\left\{\begin{aligned} &2m(2m-1)D(\varphi, f)_2 = m(m-1)f(f, g)_3 \\ &\quad + (m+1)(2m-1)\,t(f, f)_2 + (m-1)(m-2)f(f, t)_2. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En faisant maintenant $x = x_\iota$ dans cette relation, on obtient

$$\frac{2m}{m+1} DQ_\iota = t_{x_\iota}^{m-1}\ (aa')^2 a_{x_\iota}^{m-1} a'^{m-1}_{x_\iota},$$

formule qui ne diffère point de la formule (3), par suite de ce qu'on a (*voir* le n° **1**)

$$\frac{(m+1)^2}{2} (aa')^2 a_{x_\iota}^{m-1} a'^{m-1}_{x_\iota} = -\Pi_\iota^2.$$

21. Dans le cas où la forme φ est la jacobienne d'un faisceau $\lambda f + \mu g$ contenant la forme f, la forme $(\varphi, f)_2$ a la propriété d'être divisible par f. La relation

$$\varphi = (f, g)_1$$

conduit, en effet, à

$$(6) \qquad (\varphi, f)_2 = \frac{m-1}{2(2m-1)} f(f, g)_3,$$

conformément à la formule (5) précédente.

On voit par là que, dans le cas considéré, on doit avoir

$$(7) \qquad Q_i = (\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} = 0,$$

pour toutes les racines x_i de f. Dans les cas où $D \gtrless 0$, on pourrait aussi déduire ce fait de ce que la forme t doit être identiquement nulle lorsque φ est la jacobienne d'un faisceau contenant la forme f.

Ainsi donc dans le cas où $D \gtrless 0$ (et aussi dans le cas où la forme f n'a qu'une seule racine double) les $m+1$ relations (7) suffisent bien pour exprimer que la forme f est contenue dans un faisceau ayant φ pour jacobienne. On doit toutefois remarquer que, dans ce cas, une de ces relations est une conséquence des autres, et cela d'après la relation (4) (¹).

22. Par suite de la formule (7) du n° **1**, la relation (7) précédente peut être écrite comme il suit :

$$(8) \qquad (\varphi p) \varphi_{x_i}^{2m-1} p_{x_i}^{m-1} = 0, \quad \text{où} \quad p = \frac{f}{(xx_i)}.$$

(¹) Dans le cas où $D = 0$ et

$$f = (xx_1)^{k_1} (xx_2)^{k_2} \dots (xx_n)^{k_n}, \qquad (k_i > 0),$$

il n'y a que n des relations (7) qui soient différentes entre elles.

On pourrait cependant, plus généralement, se demander, pour ce même cas, quelle est la nature des conditions qui découlent de la supposition que la forme $(\varphi, f)_2$ est divisible par f.

La réponse à cette question est la suivante :

Si x_i est une racine simple ou double de f (c'est-à-dire si $k_i = 1$ ou 2), la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par $(xx_i)^{k_i}$ n'implique qu'une seule condition (laquelle est $\varphi_{x_i}^{m} = 0$ dans le cas où $k_i = 2$). Mais, si l'ordre de multiplicité k_i de x_i est plus grand que 2, la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par $(xx_i)^{k_i}$ n'implique que *deux* conditions, consistant en ce que x_i doit être une racine double de φ. De cette manière on voit que si le nombre des racines *simples* et *doubles* de f est n' et que le nombre des racines restantes de f est n'', $2n'' + n'$ sera le nombre de conditions qu'implique la divisibilité de $(\varphi, f)_2$ par f (étant toujours supposé que D soit nul).

Cette relation exprime que la valeur de x pour laquelle on a $p_x p_{x_i}^{m-1} = 0$ doit satisfaire aussi à la relation $\varphi_x \varphi_{x_i}^{2m-1} = 0$ (1).

Il résulte donc des relations (7) ce fait, que *les jacobiennes* $\varphi = (f, g)_1$ *des faisceaux contenant une forme donnée* $f = a_x^{m+1}$ *sont toutes conjuguées aux* $m+1$ *formes*

$$(9) \qquad A_i = (xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2 = \frac{2}{m+1} (xx_i)^{2m-1} p_{x_i}^{m-1} p_x.$$

Dans le cas où $D \gtrless 0$ ces $m+1$ formes sont toutes différentes entre elles et ne sont liées que par une seule relation linéaire

$$(10) \qquad \sum \frac{A_i}{\Pi_i^3} = \sum \frac{(xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2}{\Pi_i^3} = 0,$$

laquelle est une conséquence de la relation (4).

On voit par là que, dans le cas considéré ($D \gtrless 0$), *l'expression générale des formes* A_x^{2m} *qui sont conjuguées aux jacobiennes* $\varphi = (f, g)_1$ *des faisceaux contenant une forme* $f = a_x^{m+1}$ (n° 7) *est*

$$(11) \qquad A_x^{2m} = \Sigma \mu_i (xx_i)^{2m-2} a_{x_i}^{m-1} a_x^2.$$

23. Lorsqu'on a un système linéaire à $m-1$ paramètres composé de formes d'ordre $2m$, le déterminant fonctionnel de ce système (*voir* n° 6) est une forme d'ordre $m(m+1)$ qui admet comme facteur linéaire $(k+1)^{\text{iple}}$ tout facteur linéaire $(m+k)^{\text{iple}}$ d'une des formes du système. Or nous savons que parmi les formes A_x^{2m}, lesquelles forment précisément un système linéaire à $m-1$ paramètres, il y en a $m+1$ qui admettent respectivement comme facteurs $(2m-1)^{\text{iples}}$ les $m+1$ facteurs linéaires de f : les $m+1$ formes en question sont les formes (9). Cela montre que *le déterminant fonctionnel du système des formes* A_x^{2m} *et, par conséquent, aussi le déterminant fonctionnel du système conjugué, constitué par les jacobiennes des faisceaux contenant la forme* f, *coïncide avec la* $m^{\text{ième}}$ *puissance de la forme* f.

C'est là une proposition qui constitue une généralisation assez curieuse de ce qui arrive pour le cas bien connu de $f = a_x^2$.

Dans le cas où $f = a_x^3$, les formes biquadratiques $\alpha = (f, g)_1$ sont en nombre doublement infini, tandis que les formes A_x^4 du

(1) Cette propriété aurait pu aussi être déduite de l'expression générale des jacobiennes des faisceaux contenant une forme $f = a_x^{m+1}$ donnée (*voir* n° 4).

système conjugué constituent un *faisceau* ayant f^2 pour jacobienne. Dans ce cas, il y a ceci de remarquable que les formes A_x^4 coïncident avec les jacobiennes α des faisceaux $\lambda a_x^3 + \mu b_x^3$ pour lesquels on a $(ab)^3 = 0$. De là il résulte que toutes ces formes A_x^4 sont équianharmoniques et conjuguées les unes aux autres.

Dans le cas où $f = a_x^4$, les formes A_x^6 sont en nombre doublement infini, et sont caractérisées par la propriété que leur covariant $i = (A, A)_4$ coïncide avec la forme $f = a_x^4$.

24. *La forme* Λ. — La relation linéaire

$$\sum \frac{Q_i}{\Pi_i^3} = 0$$

qui existe entre les $m+1$ expressions

$$Q_i = (\varphi a)^2 \varphi_{x_i}^{2m-2} a_{x_i}^{m-1},$$

fait voir que la forme

$$Q = (\varphi a)^2 \varphi_x^{2m-2} a_x^{m-1}$$

est conjuguée à la forme de degré $3m-3$ suivante

$$\Lambda_x^{3m-3} = D \sum \frac{(xx_i)^{3m-3}}{\Pi_i^3}, \tag{12}$$

quelle que soit φ_x^{2m}.

Cette forme Λ_x^{3m-3} constitue un covariant entier (de degré $2m-3$) de la forme f, jouissant des propriétés bien remarquables. Ainsi non seulement elle satisfait à la relation

$$(\Lambda a)^{m-1} \Lambda_x^{2m-2} a_x^2 = 0, \tag{13}$$

laquelle n'est qu'une autre forme de la relation (10), mais elle est aussi *conjuguée* aux formes f et $H = (f, f)_2$. Il est, en effet, aisé de voir que l'on a

$$(\Lambda a)^{m+1} \Lambda_x^{2m-4} = 0 \text{ (1)} \tag{14}$$

et

$$(\Lambda H)^{2m-2} \Lambda_x^{m-1} = 0. \tag{15}$$

(1) A côté des relations (13) et (14) il convient de placer cette autre

$$(m+1)^2 (\Lambda a)^m \Lambda_x^{2m-3} a_x = \Delta_x^{2m-2},$$

où figure la forme Δ considérée au n° 15.

Il est à remarquer que cette dernière relation est une conséquence des relations (13) et (14).

Dans le cas où $D \lessgtr 0$, l'équation (13) peut aussi être considérée comme une conséquence des relations (14) et (15), et cela grâce à la relation (5). Maintenant, si l'on voulait déduire des deux systèmes de conditions (14) et (15) l'expression de la forme Λ_x^{3m-3}, les valeurs des coefficients de cette forme qu'on aurait ainsi obtenues contiendraient D en facteur. Cela tient à ce que dans le cas où $D = 0$ les équations (14) et (15) peuvent aussi être satisfaites par une simple infinité de formes de degré $3m - 3$ (formes qui appartiennent à un faisceau).

Tant que $D \lessgtr 0$ la forme Λ ne saurait être identiquement nulle. Maintenant, lorsque $D = 0$ et qu'on suppose $(x_i x_j) = 0$, la forme Λ est égale à ce que devient la forme

$$\frac{D}{(x_i x_j)^2} \frac{1}{(x_i x_j)} \left[\frac{(xx_i)^{3m-3}}{q^3(x_i)} - \frac{(xx_j)^{3m-3}}{q^3(x_j)} \right],$$

où

$$q(x) = \frac{f}{(xx_i)(xx_j)},$$

lorsqu'on suppose que les x_i, x_j soient venus à coïncider. En d'autres termes, la forme Λ est, dans ce cas, proportionnelle à

$$D(q), \quad (xx')^{3m-4} q_{x'}^{m-2} q_x, \qquad (x' = x_i = x_j),$$

$D(q)$ désignant le discriminant de la forme q_x^{m-1}.

On reconnaît par là que la forme Λ ne peut devenir identiquement nulle que lorsque f admet (au moins) deux couples de racines égales ou bien une racine quadruple. Ainsi donc *la condition nécessaire et suffisante pour que la forme f admette deux racines doubles distinctes, ou bien une racine quadruple, est exprimée par l'évanouissement identique de la forme*

$$\Lambda_x^{3m-3} = D \sum \frac{(xx_i)^{3m-3}}{\Pi_i^3}.$$

Dans le cas où $m = 2$, la forme Λ_x^3 coïncide avec $f = a_x^3$. Dans le cas où $m = 3$, la forme Λ_x^6 constitue le covariant sextique $T = (aa')^2 (aa'') a_x a_x'^2 a_x''^3$ de $f = a_x^4$.

Paris, août 1883.