BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 113-122

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__113_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, défini sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Humbert : *Sur une certaine transformée homographique de la surface des ondes.*

M. Max Genty : *Sur les involutions d'espèce quelconque.*

M. Humbert : *Involutions qui peuvent exister sur des courbes de genre quelconque.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Stéphane Mangeot, présenté par MM. D. André et Raffy; M. Caronnet, présenté par MM. Darboux et Raffy; M. le prince Roland Bonaparte, présenté par MM. Poincaré et d'Ocagne; M. von Koch, présenté par MM. D. André et L. Lévy.

Communications :

M. Lemoine : *Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème.*

M. d'Ocagne : *Démonstration nouvelle du théorème de Fermat généralisé.*

M. Fouret : *Sur quelques relations caractéristiques entre les dérivées partielles de certaines fonctions symétriques de plusieurs variables.*

M. von Koch : *Sur les déterminants d'ordre infini.*

M. Raffy : *Sur la détermination des éléments linéaires doublement harmoniques.*

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Cellérier, présenté par MM. Poincaré et Sarrau; M. Fehr, présenté par MM. Laisant et Raffy; M. Paul Genty, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. D. André : *Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premiers nombres.*

M. Genty adresse, par l'intermédiaire de M. Laisant, un Mémoire de Géométrie vectorielle sur la théorie générale des surfaces.

M. Haton de la Goupillière : *Centre des moyennes distances des centres de courbure successifs.*

MM. Laisant et Fouret présentent quelques observations sur cette Communication.

M. Demoulin : *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires.*

M. D. André présente quelques observations sur cette Communication.

M. Lucien Lévy donne quelques explications sur le Mémoire, extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* dont il offre un exemplaire à la Société.

Le théorème suivant, déjà énoncé à une séance précédente, s'explique facilement par des considérations géométriques.

Si l'on fait tourner autour de son axe une surface-moulure de Monge dont le noyau est un cylindre de révolution, toutes les positions successives de cette surface constituent une famille d'un système triplement orthogonal.

On s'en rend compte aisément en remarquant que les sections d'une de ces surfaces par un plan perpendiculaire à l'axe sont des développantes de cercles tous projetés orthogonalement suivant un même cercle, que les tangentes à ces cercles sont normales à toutes les développantes de leur plan, et, par suite, que les plans tangents au cylindre de révolution constituent une famille orthogonale à la famille précédente. Comme un quelconque des plans coupe une quelconque des surfaces suivant une de ses lignes de courbure, le système triplement orthogonal existe.

Il n'a pas été possible d'interpréter aussi simplement le résultat suivant, dont le Mémoire contient la démonstration analytique :

Si les cylindres de révolution, qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'un périsphère symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite Δ *du plan de symétrie du périsphère, la translation parallèle à* Δ *de ce périsphère donnera naissance à une série de surfaces qui constitueront une des trois familles d'un système triplement orthogonal.*

Rappelons qu'un *périsphère symétrique* est une surface enveloppe de sphères à directrice plane.

M. Caronnet fait la Communication suivante :

Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface.

Considérons sur une surface une famille quelconque de courbes, et soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2$$

son élément linéaire, quand on la rapporte à ces courbes (u) et à leurs trajectoires orthogonales (v).

Les rayons de courbure géodésique des lignes coordonnées ont pour expressions

$$\rho_{gu} = -\frac{AC}{\dfrac{\partial A}{\partial v}} = \frac{A}{r},$$

$$\rho_{gv} = \frac{AC}{\dfrac{\partial C}{\partial u}} = \frac{C}{r_1};$$

on les obtient au moyen de la formule générale connue (¹)

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r\,du + r_1\,dv;$$

d'autre part, les coordonnées des centres de courbure géodésique G, G', rapportés au trièdre de la surface (M, xyz) s'écrivent

$$(G) \qquad x = 0, \quad y = \rho_{gu}, \quad z = 0;$$
$$(G') \qquad x = -\rho_{gv}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Ceci posé, soit une famille (F) de trajectoires isogonales des courbes (u).

Les courbes de cette famille, coupant les lignes coordonnées sous le même angle constant ω, leur courbure géodésique est définie par

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos\omega}{\rho_{gu}} + \frac{\sin\omega}{\rho_{gv}},$$

et les coordonnées du centre de courbure géodésique Γ relatif à celle de ces courbes qui passe en M sont

$$x = -\rho_g \sin\omega, \quad y = \rho_g \cos\omega, \quad z = 0.$$

Nous voyons, par conséquent, que le point Γ appartient à la droite GG', qui a d'ailleurs pour équation

$$\frac{x}{-\rho_{gv}} + \frac{y}{\rho_{gu}} = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

En chaque point d'une surface, les centres de courbure géodésique de toutes les familles (F) *de trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes* (C) *sont alignés suivant une droite* (D).

Remarque I. — Supposons que deux des familles (F) soient formées de géodésiques, la droite (D) sera rejetée à l'infini ; toutes les trajectoires isogonales seront des géodésiques et la surface donnée sera développable.

Nous retrouvons ainsi la proposition de Liouville.

(¹) *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.*

Remarque II. — Parmi toutes les trajectoires qui passent en M, il y en a une, et en général une seule, qui a son plan osculateur normal à la surface en ce point; elle a pour tangente la perpendiculaire à (D) issue de M.

S'il en existait deux jouissant de cette propriété, il en serait de même pour toutes les autres.

Remarque III. — Supposons que les courbes de deux familles (F) soient des cercles géodésiques de rayon constant, égal à ρ pour l'une, égal à ρ' pour l'autre. Dans ces conditions, la droite (D) est invariablement liée au trièdre de la surface, et toutes les trajectoires isogonales sont des cercles géodésiques, dont le rayon est le même quand on les associe par familles.

En remarquant que, parmi ces trajectoires, il existe une famille de géodésiques, et rapportant la surface à ces courbes et à leurs trajectoires orthogonales, on obtient pour son élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2,$$

Cette surface a sa courbure totale constante et égale à $-\frac{1}{a^2}$.

M. Laisant fait la Communication suivante :

Remarques sur les fonctions homogènes.

Une fonction homogène de plusieurs variables

$$u = f(x_1, x_2, \ldots)$$

est définie, comme on le sait, par la relation

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots). \tag{1}$$

Le degré m de la fonction peut être positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable. On pourrait même le supposer imaginaire.

Le théorème d'Euler se déduit de l'identité (1) et s'exprime par la formule

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots = m f(x_1, x_2, \ldots). \tag{2}$$

Ce théorème est réciproque, c'est-à-dire que, si la formule (2) est vérifiée identiquement, la fonction f est homogène.

On sait aussi qu'en employant un mode de démonstration analogue, appliqué aux dérivées successives, on obtient la formule plus générale

$$(3)\qquad [x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots]^{(p)} = m(m-1)\ldots(m-p+1) f(x_1, x_2, \ldots),$$

l'expression $[x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots]^{(p)}$ représentant une puissance symbolique, dans laquelle, en ce qui concerne les dérivées, les puissances sont remplacées par des indices de dérivations.

Si nous désignons par $u^{(p)}$ cette expression symbolique, facile à former quand la fonction u est donnée, les précédentes formules peuvent s'écrire

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} u^{(1)} = mu, \\ u^{(2)} = m(m-1)u, \\ u^{(3)} = m(m-1)(m-2)u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(p)} = m(m-1)\ldots(m-p+1)u. \end{array}\right.$$

Ceci posé, si nous considérons maintenant une fonction u quelconque, homogène ou non, qui soit égale à la somme de plusieurs autres fonctions v, w, ..., il est évident, par définition même, que nous aurons

$$(5)\qquad u^{(1)} = v^{(1)} + w^{(1)} + \ldots$$

et, plus généralement,

$$(5')\qquad u^{(p)} = v^{(p)} + w^{(p)} + \ldots.$$

De plus, il est assez facile de reconnaître que, si nous considérons la fonction $u^{(p)} = \mathrm{U}$ et si nous formons la fonction $\mathrm{U}^{(1)}$, nous avons

$$(6)\qquad \mathrm{U}^{(1)} = (u^{(p)})^{(1)} = pu^{(p)} + u^{(p+1)}.$$

La démonstration, que nous passons sous silence pour abréger, se fera en prenant le terme général φ du développement qui définit $u^{(p)}$, et en formant $x_1 \varphi'_{x_1} + x_2 \varphi'_{x_2} + \ldots$. La sommation de tous ces résultats, faite en vertu de la relation (5), donnera la formule (6).

Admettons maintenant qu'une fonction u soit la somme de plusieurs fonctions *homogènes* v, w, ... ayant respectivement pour degrés m, n, ... et que le nombre de ces fonctions soit p.

Il résulte immédiatement des propriétés précédentes que nous aurons le système d'identités

$$(7)\quad \begin{cases} u = v + w + \dots, \\ u^{(1)} = mv + nw + \dots, \\ u^{(2)} = m(m-1)v + n(n-1)w + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u^{(p)} = m(m-1)\dots(m-p+1)v + n(n-1)\dots(n-p+1)w + \dots \end{cases}$$

En éliminant les p éléments v, w, ... entre ces $p+1$ équations, on obtient

$$(8)\quad \begin{vmatrix} u & 1 & 1 & \dots \\ u^{(1)} & m & n & \dots \\ u^{(2)} & m(m-1) & n(n-1) & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ u^{(p)} & m(m-1)\dots(m-p+1) & n(n-1)\dots(n-p+1) & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

formule qui peut encore s'écrire

$$(9)\qquad a_0 u + a_1 u^{(1)} + \dots + a_p u^{(p)} = 0.$$

Donc, *si une fonction est décomposable en une somme de p fonctions homogènes, il existe une relation linéaire identique entre cette fonction et les p premières fonctions* $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(p)}$ *qu'on en déduit.*

Nous allons établir que réciproquement, s'il existe entre u, $u^{(1)}$, ..., $u^{(p)}$ une relation linéaire (9), la fonction u est décomposable en une somme de p fonctions homogènes.

Dans ce but, identifions les deux relations (8), (9). Nous aurons ainsi p équations, permettant de déterminer les p inconnues m, n, ... Substituant ces valeurs dans le système des relations (6), celles-ci donneront linéairement les fonctions v, w, ... en fonction de u, $u^{(1)}$, ..., $u^{(p-1)}$, $u^{(p)}$. Reste à montrer que chacune des fonctions ainsi obtenues est homogène.

Nous pouvons les déterminer par p quelconques des $p+1$ relations (7). Prenons les p dernières et formons les combinaisons suivantes qui s'ensuivent évidemment :

$$(10)\quad \begin{cases} u^{(1)} = mv + nw + \dots, \\ u^{(1)} + u^{(2)} = mmv + nnw + \dots, \\ 2u^{(2)} + u^{(3)} = m(m-1)mv + n(n-1)nw + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (p-1)u^{(p-1)} + u^{(p)} = m(m-1)\dots(m-p+2)mv \\ \qquad + n(n-1)\dots(n-p+2)nw + \dots. \end{cases}$$

D'autre part, si nous effectuons l'opération $(\quad)^{(1)}$ sur toutes les fonctions que renferment les p premières relations (7), nous aurons, en vertu de la formule (6),

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{r}
u^{(1)} = v^{(1)} + w^{(1)} + \ldots, \\
u^{(1)} + u^{(2)} = mv^{(1)} + nw^{(1)} + \ldots, \\
2u^{(2)} + u^{(3)} = m(m-1)v^{(1)} + n(n-1)w^{(1)} + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(p-1)u^{(p-1)} + u^{(p)} = m(m-1)\ldots(m-p+2)v^{(1)} \\
+ n(n-1)\ldots(n-p+2)w^{(1)} + \ldots.
\end{array}\right.$$

La comparaison des systèmes (10) et (11) montre que mv, nw, ... et $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, ... s'obtiennent par le même système d'équations. Donc

$$v^{(1)} = mv, \qquad w^{(1)} = nw, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après la réciproque du théorème d'Euler, que toutes les fonctions v, w, ... sont homogènes et respectivement de degrés m, n, ...

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction u soit décomposable en une somme de p fonctions homogènes est exprimée par la relation (9).

Quand on a reconnu que cette condition est remplie, et qu'on a déterminé les degrés m, n, ..., il est possible d'obtenir les fonctions v, w, ... d'après la définition même des fonctions homogènes. Si, en effet, dans la fonction $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$ nous substituons à λ des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ quelconques, et si nous appelons u_1, $u_2, \ldots, u_p$ les résultats de ces substitutions, nous aurons

$$\begin{array}{l}
u_1 = \lambda_1^m v + \lambda_1^n w + \ldots, \\
u_2 = \lambda_2^m v + \lambda_2^n w + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_p = \lambda_p^m v + \lambda_p^n w + \ldots,
\end{array}$$

système qui déterminera les p fonctions v, w, ...

Comme application, si nous considérons simplement une fonction de deux variables x, y, décomposable en une somme de deux fonctions homogènes, la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ u^{(1)} & m & n \\ u^{(2)} & m(m-1) & n(n-1) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$u^{(2)} + (1-m-n)u^{(1)} + mnu = 0.$$

Si donc nous avons

$$u^{(2)} + au^{(1)} + bu = 0, \tag{12}$$

il faudra écrire

$$m + n = 1 - a, \qquad mn = b,$$

d'où

$$m = \tfrac{1}{2}\left(1 - a + \sqrt{a^2 - 2a - 4b}\right), \qquad n = \tfrac{1}{2}\left(1 - a - \sqrt{a^2 - 2a - 4b}\right). \tag{13}$$

L'équation (12) pouvant s'écrire

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu = 0, \tag{14}$$

nous voyons donc que l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles du second ordre est

$$u = F(x, y) + G(x, y), \tag{15}$$

F et G étant deux fonctions homogènes arbitraires dont les degrés sont respectivement m et n déterminés par les relations (13).

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données.*

M. Fouret transmet une Note de M. R. Godefroy *Sur les courbes de Lamé.*

M. Humbert traite *Des involutions sur les courbes algébriques.* Il montre que, abstraction faite de la surface de Steiner, il n'existe pas de surface algébrique engendrée par des coniques et telle qu'en chacun de ses points passe plus d'une conique.

M. d'Ocagne fait *Sur les suites récurrentes* une Communication qui se résume ainsi :

Lorsqu'une suite récurrente est définie, en outre des p termes initiaux $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}$, par la relation

$$Y_n + A_1 Y_{n-1} + A_2 Y_{n-2} + \ldots + A_p Y_{n-p} = 0,$$

on dit qu'elle répond à l'échelle d'ordre p $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$.

Soit

$$\varphi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \ldots + A_p = 0$$

l'équation génératrice de cette suite.

Si l'on pose

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i,$$
$$\psi(x) = Y_{p-1} + Q_1(x) Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(x) Y_0,$$

on a ce théorème :

Lorsque les équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune α, *la suite donnée répond à l'échelle d'ordre* $p - 1$ $[Q_1(\alpha), Q_2(\alpha), \ldots, Q_{p-1}(\alpha)]$.

On peut ainsi *réduire l'échelle d'une suite donnée à sa plus simple expression.*

Après avoir fait voir, au moyen de la considération des *suites fondamentales*, qu'il a introduites dans cette théorie (¹), que la série formée par les termes d'une suite récurrente est convergente lorsque l'équation génératrice n'a que des racines de module inférieur à l'unité, M. d'Ocagne démontre que cette condition suffisante est également nécessaire *lorsque l'échelle de la suite a été réduite à sa plus simple expression* (²).

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3ᵉ série, t. III, p. 78.

(²) Ce résultat se trouve démontré dans un Mémoire développé sur les suites récurrentes qui est en voie de publication.