SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 65-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__65_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Élie Perrin : *Quelques remarques sur la démonstration d'un théorème d'Arithmétique.*

M. d'Ocagne : *Sur une transformation géométrique conduisant à la construction de courbes unicursales par points et par tangentes.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

Sur un problème de Géométrie.

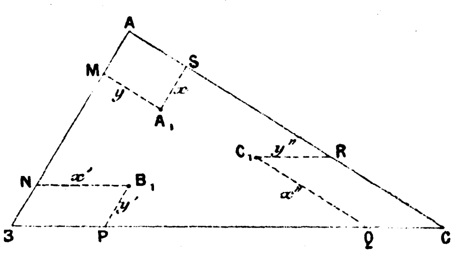
L'énoncé suivant m'a été communiqué, il y a bien des années déjà, par M. Lemoine. Je ne crois pas qu'il l'ait publié, ni qu'une solution en ait été donnée :

Trois points A_1, B_1, C_1 *ont respectivement pour coordonnées* x, y; x', y'; x'', y'' *par rapport aux côtés* AB, AC; BC, BA; CA, CB *d'un triangle, pris pour axes coordonnés.*

Connaissant A_1, B_1, C_1, *et les six valeurs* x, y, x', y', x'', y'', *trouver le triangle* ABC.

Mon intention n'est pas de donner ici une solution de cette

Fig. 1.



question, et je ne crois pas qu'il soit aisé ni même possible d'en trouver une simple. Je veux simplement montrer théoriquement comment on pourrait la résoudre, et surtout en indiquer une transformation assez curieuse.

Si nous appelons α, β, γ les inclinaisons des trois droites inconnues BC, CA, AB sur une direction fixe quelconque, et si nous posons (*voir* la *fig.* 1) :

$$MN = w\varepsilon^\gamma \qquad PQ = u\varepsilon^\alpha, \qquad RS = v\varepsilon^\beta,$$

nous avons évidemment les trois équipollences

$$(1) \qquad \begin{cases} x'\varepsilon^\alpha + y\,\varepsilon^\beta + w\varepsilon^\gamma = A_1 B_1, \\ u\,\varepsilon^\alpha + x''\varepsilon^\beta + y'\varepsilon^\gamma = B_1 C_1, \\ y''\varepsilon^\alpha + \ v\varepsilon^\beta + \ x\varepsilon^\gamma = C_1 A_1. \end{cases}$$

Ce système contient six inconnues α, β, γ, u, v, w, et il équivaut à six équations algébriques.

Il est donc bien déterminé. On verrait d'ailleurs qu'une fois les valeurs α, β, γ, u, v, w obtenues, la construction des points A, B, C serait des plus simples.

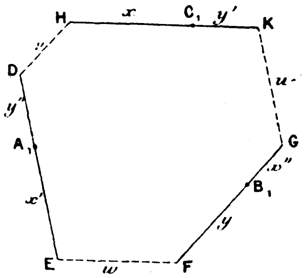
La résolution du système (1) peut être effectuée de la façon suivante, que nous indiquons seulement. On en tire les valeurs de ε^α, ε^β, ε^γ en considérant les équipollences comme des équations linéaires; et l'on multiplie l'expression de ε^α par sa conjuguée, ce qui donne pour produit 1. De même pour ε^β, ε^γ. On a donc ainsi trois équations en u, v, w. Mais chacune d'elles est du sixième degré, ce qui paraît indiquer presque l'impossibilité d'une solution simple, à moins de réductions imprévues.

Mais le problème, comme nous le disions plus haut, se transforme en un autre équivalent, par la considération des équipollences (1) qui en traduisent l'énoncé. Prenons, en effet, par exemple, la première de ces équipollences. Le premier membre doit représenter une ligne brisée de trois tronçons partant de A_1 pour aboutir en B_1; le premier tronçon a pour longueur donnée x'; un autre a pour longueur y; et il faut que le tronçon qui complète la ligne brisée ait pour direction γ. En répétant la même observation sur les deux autres équipollences, nous arrivons ainsi à reconnaître que la question peut prendre la forme que voici :

Étant donnés sur un plan trois segments DE, FG, KH *pouvant pivoter chacun autour d'un point fixe* A_1, B_1, C_1, *qui lui* *appartient, orienter ces segments de telle sorte que les droites* GK, HD, EF *soient parallèles à* DE, FG, KH *respectivement.*

Les longueurs données sont représentées sur la figure et celles

Fig. 2.



de GK, HD, EF sont précisément u, v, w.

Cet énoncé nouveau ne conduirait pas à une solution plus simple, si ce n'est peut-être au point de vue graphique et par tâtonnements. Il est, en tous cas, d'apparence assez différente de la question primitive, bien que le problème soit identiquement le même.

SÉANCE DU 20 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Laisant lit une lettre d'Abel Transon, écrite en 1868, et relative aux principes du Calcul directif.

M. Emile Picard transmet une Note de M. Mangeot intitulée : *Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales.*

M. Félix Lucas : *Sur la théorie des courants polyphasés.*

M. Raffy présente une Note de M. Caronnet : *Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les singularités des courbes algébriques planes.

1. Les nombres qui entrent dans les formules de Plücker sont

deux à deux corrélatifs, sauf le genre p qui est dualistique. Les nombres corrélatifs sont :

1° Le degré n et la classe k ;

2° Le nombre des points doubles d et celui des tangentes doubles t ;

3° Le nombre des points de rebroussement r et celui des tangentes d'inflexion i.

L'égalité de deux nombres corrélatifs n'entraîne pas toujours celles des autres ; car pour les cubiques de genre $p = 1$, on a

$$\begin{array}{lll} n = 3, & d = 0, & r = 0, \\ k = 6, & t = 0, & i = 9. \end{array}$$

Mais ce fait est exceptionnel. En effet, on peut déduire des formules de Plücker les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 3(n - k) &= r - i, \\ 2(d - t) &= (n - k)(n + k - 9) ; \end{aligned}$$

de sorte que

1° Si $n = k$, on a $r = i$, $d = t$;

2° Si $r = i$, on a $n = k$, $d = t$;

3° Si $d = t$, on peut avoir soit $n = k$ et $r = i$, soit $n + k = 9$: cette dernière solution conduit aux cas suivants corrélatifs deux à deux :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{llllll} n = 3, & k = 6, & d = t = 0, & r = 0, & i = 9, & p = 1 ; \\ n = 6, & k = 3, & d = t = 0, & r = 9, & i = 0, & p = 1. \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{llllll} n = 4, & k = 5, & d = t = 2, & r = 1, & i = 4, & p = 0 ; \\ n = 5, & k = 4, & d = t = 2, & r = 4, & i = 1, & p = 0. \end{array} \right.$$

En résumé, sauf les cas que je viens d'énumérer, l'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne celle des autres.

2. La présence de points multiples abaissant la classe d'une courbe, on pourrait penser que, parmi les courbes d'un degré n donné, celles dont la classe a la plus petite valeur sont les courbes unicursales, d'autant plus que c'est ce qui se produit pour les valeurs inférieures de n, $n = 3$, 4 ou 5. Mais cela n'est plus vrai pour les valeurs supérieures, cela tient à ce que l'on a la relation suivante :

$$2k = n + 2 - 2p + i,$$

d'où l'on déduit, i ne pouvant être négatif,

$$k \leqq \frac{n+2}{2} - p.$$

Il est facile de vérifier que l'on peut toujours trouver des nombres positifs satisfaisant aux relations de Plücker et tels que pour $p = 1$, par exemple, on puisse obtenir une valeur de k inférieure à la valeur minima qui correspondrait à $p = 0$. Il est vrai qu'il n'est pas démontré qu'à tout système de nombres positifs vérifiant les formules de Plücker il correspond une courbe. Mais il résulte des Tableaux donnés par Clebsch (*Leçons de Géométrie,* trad. Benoist, t. II, p. 68) que les courbes du 6^e, du 7^e, du 8^e degré de classe minima sont de genre 1; celles du 9^e et du 10^e degré sont de genre 2; celles du 12^e degré sont de genre 3; ces courbes ayant une existence effective comme le montrent des exemples.