SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 266-269

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__266_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 DÉCEMBRE 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Démission :

M. Quintard et M. Mathé adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Lancelin : *Sur une propriété géométrique de la surface engendrée par les ellipses osculatrices dans le mouvement troublé.*

M. Borel : *Remarques sur la représentation des fonctions qui admettent des dérivées de tous les ordres.*

M. Raffy : *Sur une propriété commune aux hélicoïdes, aux surfaces spirales et aux surfaces minima.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième ordre.*

M. Fleury : *Sur la considération de l'infini.*

M. Caronnet : *Sur la déformation des surfaces de translation.*

M. S. Mangeot adresse la Note suivante :

Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions infiniment petites.

Le problème général des déblais et remblais, qui a attiré l'attention des géomètres à la suite des travaux de Monge, conduit par une voie naturelle à la question qui fait l'objet de cette Note.

Je considère un solide infiniment petit ayant pour forme limite un segment fini de droite, AB. Le centre de gravité de ce solide, que je suppose homogène, a pour position limite un point H. Je me propose de déterminer le point H quand le solide est défini de la manière suivante : il est limité, d'une part, par deux surfaces arbitraires passant respectivement aux extrémités A, B du segment et, d'autre part, par une surface fermée infiniment petite S, d'une congruence de droites Δ, dont l'une, Δ', contient les points A et B.

J'admettrai que, en allant de A à B sur Δ', on ne rencontre aucun des deux points focaux F, F' de cette droite.

Soient ρ la distance, affectée de signe, d'un point variable de la droite Δ au pied de cette droite sur une surface fixe σ prise à volonté; et a, b, h, f, f' les valeurs de ρ qui définissent, sur Δ', les cinq points A, B, H, F, F'.

Si ε est le volume compris entre la surface S et les deux surfaces infiniment voisines $\rho =$ const., $\rho + d\rho =$ const., on a

$$h\int_a^b \varepsilon = \int_a^b \rho\varepsilon,$$

les deux intégrales se rapportant à la variable ρ. Or, ε a pour expression $(\rho - f)(\rho - f')\,d\rho$, à un facteur près qui est indépendant de ρ. On obtient donc la formule

$$2h = \frac{3(a^4 - b^4) - 4(f+f')(a^3 - b^3) + 6ff'(a^2 - b^2)}{2(a^3 - b^3) - 3(f+f')(a^2 - b^2) + 6ff'(a - b)}$$

pour déterminer la position du point H.

Si l'on fait passer la surface σ par le milieu O de AB, cette relation prend la forme involutive

$$3hff' + a^2(h + f + f') = 0.$$

En partant de cette formule, on est conduit à la construction géométrique suivante du point H :

On décrit deux demi-cercles sur AB et OF comme diamètres; on projette leur intersection I en C sur la droite AB, sur laquelle on porte ensuite les longueurs OD $=$ OD' $= \frac{1}{3}$OC, OD ayant la direction OF. Puis, aux points D et D', on élève à la droite AB deux perpendiculaires d'égales longueurs DE, D'E', la première terminée au demi-cercle OIF. Le point H appartient à un côté de l'angle droit dont le sommet est placé au point E' et dont l'autre côté passe par F'.

Si le point F' est à l'infini, le point H coïncide avec le point D'.

Dans le cas où les deux points focaux F, F' sont tous les deux à l'infini, le point H est le milieu même de AB.

Remarquons, pour terminer, que l'on pourra construire de cette manière le centre de gravité de chacun des éléments de volume compris à l'intérieur des divers pinceaux formés par les normales à une surface.

M. Gérard adresse la Note suivante :

Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de Varignon.

Depuis Duhamel, on appelle *équivalents* deux polygones formés de polygones partiels superposables chacun à chacun. Dans cet ordre d'idées, il est indispensable de démontrer qu'un polygone ne peut pas être équivalent à l'une de ses parties. Dans ces derniers temps, MM. Réthy, Schur, Rausenberger, Veronèse, Lazzeri, etc, etc., ont donné diverses démonstrations de ce théorème fondamental. Mais la démonstration est immédiate si l'on s'appuie sur le théorème de Varignon.

On appelle *moment d'un vecteur* AB *par rapport à un point* O le produit de la longueur de ce vecteur par sa distance au point O précédé du signe + ou du signe — selon que le point O est à gauche ou à droite d'un mobile qui parcourt la droite AB dans le sens AB.

Considérons un polygone P et supposons qu'un observateur, parcourant le périmètre dans le sens dit *positif*, c'est-à-dire de manière à avoir l'intérieur du polygone à sa gauche, rencontre les sommets dans l'ordre A, B, C, ..., M, N; nous appellerons *moment du polygone* P *par rapport au point* O la somme des moments des vecteurs AB, BC, ..., NA.

Il est aisé de voir que le moment d'un polygone ainsi défini est indépendant de la position du point O. Car, si l'on mène par A des vecteurs égaux et parallèles à AB, BC, ..., NA, la somme des moments de ces nouveaux vecteurs est nulle, en vertu du théorème de Varignon; or la différence entre le moment de chacun des nouveaux vecteurs et celui du vecteur primitif correspondant ne dépend pas du point O ; donc, la somme des moments des vecteurs primitifs, c'est-à-dire le moment du polygone, est indépendante de la position du point O.

D'autre part, si l'on décompose un polygone en plusieurs autres, on voit immédiatement que le moment du polygone total est la somme des moments des polygones partiels ; et, si l'on considère un triangle, en faisant coïncider le point O avec l'un des sommets, on voit que le moment du triangle est *positif*. Comme un polygone est décomposable en triangles, le moment d'un polygone quelconque P est aussi *positif* et peut se représenter par lp, en désignant par l une longueur constante et par p une longueur qui ne dépend que du polygone P.

Ceci posé, supposons le polygone P décomposé en plusieurs polygones Q, R, S ; le moment de P sera égal à la somme des moments de Q, R, S :

$$lp = lq + lr + ls.$$

Si le polygone total P pouvait être équivalent à l'une de ses parties, Q par exemple, c'est-à-dire si P et Q pouvaient être décomposés en polygones partiels superposables chacun à chacun, le moment de P, comme celui de Q, serait égal à la somme des moments des polygones partiels, et l'on aurait

$$lp = lq;$$

d'où

$$q + r + s = q.$$

Donc, la *longueur* totale $q + r + s$ serait égale à l'une de ses parties q, ce qui est impossible. Il est donc impossible que le polygone P soit équivalent à l'une de ses parties. C. Q. F. D.

Inutile de dire que je suppose qu'on a démontré le théorème de Varignon sans se servir de la considération des aires.

D'ailleurs toutes ces considérations s'appliquent aux polyèdres.

FIN DU TOME XXIII.