BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 62-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__62_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MARS 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Bioche : *Sur une valeur approchée de* π.

M. Picard : *Sur l'équation différentielle du premier ordre et du second degré.*

M. Carvallo : *Sur les équations de Lagrange.*

M. Floquet adresse une Note *Sur les fonctions algébriques à trois déterminations.*

M. Demoulin adresse une Note *Sur la détermination des couples de surfaces applicables, telles que la distance de deux points correspondants soit constante.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

Remarque sur une équation différentielle linéaire.

On a une intégrale particulière de l'équation

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 10 y = 0,$$

en remarquant que le produit $i(i-1)(i-2)(i-3)$ est égal à -10, de telle sorte que si l'on pose $y = cx^i$, il vient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -10 c x^{i-4} = -\frac{10}{x^4} y,$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle est vérifiée.

Il en sera évidemment de même si, au lieu de i, on écrit pour l'exposant de x l'une quelconque des racines de l'équation

$$z(z-1)(z-2)(z-3) + 10 = 0.$$

Or, ces racines sont i, $-i$, $3+i$, $3-i$.

On a donc pour l'intégrale générale

$$y = cx^i + c_1 x^{-i} + c_2 x^{3+i} + c_3 x^{3-i}.$$

En posant $c + c_1 = k$, $c - c_1 = k_1$, $c_2 + c_3 = k_2$, $c_2 - c_3 = k_3$, on peut encore avoir l'intégrale sous la forme suivante

$$\begin{aligned} y &= k \cos \log x + k_1\, i \sin \log x + x^3 [k_2 \cos \log x + k_3\, i \sin \log x] \\ &= (k + k_2 x^3) \cos \log x + (k_1 + k_3 x^3)\, i \sin \log x. \end{aligned}$$

Les constantes pouvant aussi bien prendre des valeurs imaginaires que réelles, l'intégrale peut enfin s'écrire :

$$y = \mathrm{A} \sin \log ax + \mathrm{B} x^3 \sin \log bx,$$

A, a, B, b étant les quatre constantes arbitraires.

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur certaines équations différentielles linéaires.

Je ne sais si la proposition suivante n'a pas été déjà remarquée :

Pour intégrer l'équation linéaire d'ordre n, qui admet comme solutions particulières x, x^2, ..., x^n, il suffit d'y remplacer les dérivées par des constantes arbitraires.

Formons en effet l'équation d'ordre n que vérifie le polynôme

$$(1) \qquad y = \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_n x^n.$$

Différentiant n fois successivement et éliminant les constantes C, on devra égaler à zéro un déterminant dont une colonne contient y et ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$; tous les autres éléments sont des puissances de x, des constantes ou des zéros. L'équation, développée, est donc de la forme

$$(2) \qquad p_n y^{(n)} - p_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} p_1 y' + (-1)^n p_0 y = 0,$$

tous les coefficients p étant des polynômes entiers en x. Pour les déterminer, remarquons que cette équation doit entraîner $y^{(n+1)} = 0$. Or, en la différentiant, on trouve

$$\begin{aligned} p_n y^{(n+1)} + (p'_n - p_{n-1}) y^{(n)} - (p'_{n-1} - p''_{n-2}) y^{(n-1)} + \ldots \\ + (-1)^{n-1}(p'_1 - p_0) y' + (-1)^n p'_0\, y = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que p_0 se réduit à une constante et que tous les binômes entre parenthèses sont nuls :

$$p'_1 - p_0 = p'_2 - p_1 = \ldots = p'_n - p_{n-1} = 0.$$

Il suit de là que chaque polynôme p_r sera du degré r et contiendra le terme $p_0 x^r : r!$ Il n'en aura d'ailleurs pas d'autre, l'équation (2) devant être vérifiée quand on y remplace x par kx, quelle que soit la constante k. En conséquence cette équation peut s'écrire

$$(2) \qquad y = y'x - \frac{y''}{2!}x^2 + \frac{y'''}{3!}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{y^{(n)}}{n!}x^n.$$

Il suffit de la comparer à son intégrale générale (1) pour arriver à la conclusion annoncée.

On voit, par cet exemple, qu'*il existe dans tous les ordres des équations différentielles dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant les dérivées par des constantes arbitraires*. Il serait curieux, mais sans doute difficile, de former toutes ces équations.

SÉANCE DU 20 MARS 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Hott, présenté par MM. Désiré André et Raffy; M. Dermenghem, présenté par MM. Appell et Goursat.

Communications :

M. Désiré André : *Sur les permutations quasi alternées.*

M. d'Ocagne : *Sur l'influence des erreurs de même sens.*

M. Laisant : *Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure.*

M. Humbert : *Génération géométrique des asymptotiques de la surface de Kummer.*

M. Goursat : *Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut.*
