SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 142-152
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__142_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 AVRIL 1899.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination des surfaces dont les lignes asymptotiques d'un système sont égales deux à deux.*

M. Leau adresse une Note sur la *Représentation des fonctions par des séries de polynômes.*

M. Petrovitch adresse une Note intitulée : *Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre.*

M. de Polignac fait la Communication suivante :

Sur le théorème de Tait (1).

Appelons, pour abréger, *diagramme de Tait* un ensemble de points reliés les uns aux autres par des lignes, de telle sorte que de chaque point partent trois lignes, et trois seulement; toute ligne issue d'un point devant aboutir à un autre point.

En prenant, s'il le faut, les points dans l'espace, on pourra toujours supposer que les lignes ne se rencontrent qu'aux points donnés. Nous appellerons toute ligne joignant deux points : *ligne de jonction, chemin de jonction, ou chemin partiel.*

Un caractère obligatoire de tout diagramme de Tait est que le nombre des points donnés soit pair. On le vérifiera sans peine.

Cela posé, il arrivera de deux choses l'une :

1° On pourra composer avec les chemins partiels un chemin continu passant par tous les points sans répétition et ramenant au point de départ. En d'autres termes il existera dans le diagramme un circuit rentrant comprenant tous les points ;

2° Il n'existera pas de tel circuit.

(1) Cette Note se rapporte à la question 360 de *l'Intermédiaire des mathématiciens.*

Dans le premier cas, l'exactitude du théorème de Tait est en quelque sorte intuitive. En voici la raison :

Soient

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ \ldots$$

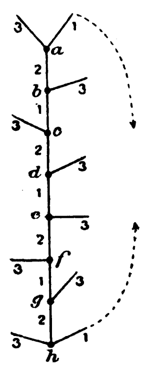
les points dans leur ordre de succession sur le circuit rentrant.

Outre la ligne de jonction ab, qui fait partie du circuit, il existe, par l'hypothèse d'un diagramme de Tait, deux autres lignes de jonction issues du point a. L'une des deux aboutit au dernier point, par l'hypothèse d'un circuit rentrant, l'autre à un point quelconque.

Coupons-les l'une et l'autre, par moitié pour fixer les idées; chacune d'elles, de ligne de jonction qu'elle était, sera changée en *deux* lignes distinctes issues de deux points différents et ne se rejoignant plus.

Du point b partent également trois chemins de jonction ba, bc, et un troisième. Coupons encore ce troisième, et faisons-en autant à chaque point, de manière, à mesure que nous procédons, à ne conserver que les chemins partiels dont l'ensemble forme le circuit rentrant. Quand nous serons arrivés au dernier point, le diagramme de Tait sera transformé en une *ramification* dont les

Fig. 1.



nœuds seront tous situés sur une branche principale. Les deux nœuds extrêmes auront chacun deux branches *libres,* c'est-à-dire n'aboutissant à aucun autre nœud, et les nœuds intermédiaires une branche libre chacun (*fig.* 1).

Les branches libres se correspondront deux à deux, chacune d'elles n'étant que la moitié d'un même chemin de jonction coupé en deux. Une des branches libres du premier nœud correspondra à l'une des branches libres du dernier nœud, par l'hypothèse d'un circuit rentrant.

Maintenant, il est aisé de voir que, dans la ramification entière, les branches pourront être affectées des numéros 1, 2, 3, sans que deux branches contiguës reçoivent jamais le même numéro.

L'annotation en est exécutée dans la figure ci-jointe. La branche libre du premier nœud, qui a pour correspondante une branche libre du dernier nœud, est d'abord affectée du numéro 1. Les branches de jonction sur la ligne des nœuds sont ensuite affectées alternativement des numéros 2, 1, 2, 1, 2. Elles sont en nombre impair puisque le nombre des nœuds est pair. Donc la dernière recevra comme la première le numéro 2, et, par conséquent, la branche libre contiguë au dernier nœud, qui correspond à la branche libre du premier nœud déjà numérotée 1, pourra être numérotée 1 également. Enfin toutes les autres branches libres seront numérotées 3.

En joignant bout à bout les branches correspondantes, on reconstituera le diagramme de Tait, et, d'après l'annotation de la ramification, chaque moitié de chemin de jonction ayant le même numéro, le diagramme sera convenablement annoté suivant le théorème.

La méthode ne s'applique plus s'il n'y a pas de circuit rentrant.

Les cas d'inexactitude du théorème de Tait ne peuvent donc se rencontrer que dans les diagrammes qui ne présentent pas de circuit rentrant passant par tous les points. Un cas *général* d'exception a été signalé dès le début, bien que non rattaché à la notion de circuit. Sont exceptés du théorème les diagrammes qui contiendraient deux constellations distinctes de points reliées l'une à l'autre par une seule ligne de jonction. Il est manifeste que dans ce cas il ne saurait y avoir de circuit rentrant.

M. Petersen vient de signaler un autre cas d'inexactitude, *spécial* celui-là, applicable au cas de dix points. Il est aisé de s'assurer, sur l'exemple qu'il donne, que le diagramme n'admet pas de circuit rentrant.

Un nombre pair de points étant donné, on pourra toujours former avec eux un diagramme de Tait auquel s'appliquera le théorème. Il suffira de commencer par tracer une ligne polygonale dont ces points seront les sommets. On achèvera ensuite le diagramme, qui sera à circuit rentrant.

La question, pour être complètement élucidée, exige donc la classification des diagrammes de Tait qui n'admettent pas de circuit rentrant, au point de vue de leur adaptation au théorème, en tant que cette adaptation est possible.

SÉANCE DU 19 AVRIL 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur les surfaces à un seul côté.*

M. Duporcq : *Sur la transformation de Lie.*

SÉANCE DU 3 MAI 1899.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Laisant : *Sur la notion d'aire d'une courbe gauche fermée.*

M. Félix Lucas : *Sur le plan sur lequel la projection de l'aire d'une courbe fermée est maxima.*

MM. Bourlet et Blutel présentent quelques observations sur le même sujet.

M. Bourlet : *Sur la stabilité de l'équilibre, dans le déplacement d'un point assujetti à rester sur une surface.*

M. Lindelöf : *Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre.*

M. Fontené : *Sur les soixante-trois systèmes de coniques doublement tangentes à une quartique.*

M. Autonne adresse un Mémoire *Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions.*

M. Duporcq fait la Communication suivante :

Sur une généralisation de la transformation de Lie.

La transformation de Lie associe, comme on sait, à tout point de l'espace une droite isotrope, de telle sorte qu'aux points d'une droite quelconque correspondent les génératrices d'une demi-sphère.

Dans la généralisation que nous avons en vue, nous considérons, au lieu du complexe des droites isotropes, celui des droites qui touchent une même quadrique S; nous allons montrer, en effet, qu'on peut associer à tout point de l'espace une droite tangente à S, et cela de telle sorte qu'aux points d'une droite quelconque correspondent les génératrices d'une demi-quadrique circonscrite à la quadrique fixe S ; la définition géométrique que nous donnons de cette transformation peut s'appliquer, en particulier, à la transformation de Lie, dont l'existence et les propriétés caractéristiques peuvent ainsi être établies par une voie élémentaire et géométrique.

Désignons par (1), (2), (3), (4) et (5) cinq tangentes arbitraires à la quadrique S; on sait qu'il existe deux demi-quadriques circonscrites à S, dont les génératrices s'appuient sur les tangentes (1) et (2); choisissons arbitrairement l'une d'elles, que nous désignerons par la notation [1 2]; considérons de même trois autres demi-quadriques [1 3], [1 4] et [1 5]. Les deux quadriques [1 2] et [1 3], par exemple, sont évidemment bitangentes; comme elles ont en commun la génératrice (1), elles ont une seconde génératrice commune (1 2 3), de système différent, qui s'appuie à la fois sur les tangentes (1), (2) et (3); cette droite appartient donc à l'une des demi-quadriques circonscrites à S et dont les génératrices s'appuient sur (2) et (3) : nous désignerons par [2 3] la demi-quadrique ainsi déterminée. Nous définirons de même les demi-quadriques [2 4], [2 5], ..., [4 5] et nous désignerons par (ijk) la génératrice commune aux trois demi-quadriques $[ij]$, $[jk]$ et $[ik]$.

Ceci posé, soient 1, 2, 3, 4 et 5, cinq points quelconques de l'espace; à tout plan 12α, passant par les deux premiers, on peut faire correspondre anharmoniquement une génératrice (12α) de la demi-quadrique [1 2], de sorte que les génératrices (1 2 3),

$(1\,2\,4)$ et $(1\,2\,5)$ correspondent respectivement aux plans $1\,2\,3$, $1\,2\,4$ et $1\,2\,5$; définissons de même, sur les demi-quadriques $[1\,3]$ et $[2\,3]$, les génératrices $(1\,3\alpha)$ et $(2\,3\alpha)$ correspondant aux plans $1\,3\alpha$ et $2\,3\alpha$.

Il existe deux demi-quadriques circonscrites à S, dont les génératrices s'appuient sur les droites $(1\,2\alpha)$ et $(1\,3\alpha)$, par exemple; l'une d'elles contient la droite (1) : désignons-la par $[1\,\alpha]$ et considérons de même les demi-quadriques $[2\alpha]$ et $[3\alpha]$. Ces trois surfaces ont en commun une génératrice (α), qui s'appuie à la fois sur les droites $(1\,2\alpha)$, $(1\,3\alpha)$ et $(2\,3\alpha)$. C'est cette droite (α) que nous associerons au point α, commun aux trois plans 12α, 13α et 23α.

Si ce point décrit une droite arbitraire, la droite (α) engendre, comme on peut le voir aisément, une demi-quadrique circonscrite à S.

Dans le cas où S se réduit à un cône ou à une conique, les considérations précédentes se simplifient, car il n'existe plus qu'une quadrique circonscrite à S et passant par deux tangentes à cette surface : la transformation se trouve alors bien définie par le choix des cinq droites qui doivent correspondre à cinq points arbitraires de l'espace; dans le cas général, au contraire, suivant le choix qu'on fait des surfaces $[12]$, $[13]$, $[14]$ et $[15]$, on obtient seize transformations satisfaisant à des conditions analogues.

Une autre différence essentielle entre cette transformation et celle de Lie, c'est que toute tangente à S correspond à deux points de l'espace, tandis que, dans la transformation de Lie, il n'existe qu'un point auquel corresponde une droite isotrope déterminée. On peut voir de même que tout élément de contact correspond à quatre éléments de contact différents.

Si l'on suppose que S est une sphère, à toute droite Δ correspond une quadrique de révolution Σ, circonscrite à S; les sphères orthogonales à S, et dont les centres sont sur Σ, enveloppent, comme on sait, deux sphères, symétriques relativement à la sphère S; chacune de ces sphères correspond à Δ par une transformation de Lie.

SÉANCE DU 17 MAI 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Communications :

M. Bricard : *Sur une généralisation de la transformation de Lie.*

M. Ferber : *Sur un symbole analogue aux déterminants.*

M. Fontené : *Sur l'inscription du polygone régulier de* 17 *côtés.*

M. Le Roux adresse un Mémoire intitulé : *Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second.*

SÉANCE DU 7 JUIN 1899.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Thybaut, présenté par MM. Leau et Borel; M. Syrieix, présenté par MM. Laisant et de Montessus.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'inscription du polygone régulier de* 257 *côtés.*

M. Ferber : *Sur les simili-déterminants.*

M. von Koch adresse un Mémoire *Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées.*

M. Mannheim envoie l'énoncé suivant :

AB, CD *sont les côtés parallèles d'un trapèze; par les extrémités* C, D *du plus petit de ces côtés, on mène des parallèles aux diagonales du trapèze; ces droites et le côté* AB *prolongé forment un triangle dont le centre de gravité coïncide avec celui du trapèze.*

M. Painlevé fait la Communication suivante :

Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de Cauchy-Lipschitz.

Considérons un système de n équations différentielles du premier ordre

$$(S)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots, w), \\ \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dw}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots, w). \end{cases}$$

Convenons de dire que le point $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ de l'espace à $(n+1)$ dimensions est un point *régulier* du système S si, dans un domaine D suffisamment petit,

$$(D)\qquad |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b, \quad |z - z_0| < b, \quad \ldots, \quad |w - w_0| < b,$$

les fonctions f_i sont des fonctions continues des variables *réelles* $x, y, z, \ldots, w$, et satisfont, de plus, à la condition

$$(1)\qquad \begin{cases} |f(x, y, z, \ldots, w) - f(x, y_1, z_1, \ldots, w_1)| \\ \quad < k_1 |y - y_1| + k_2 |z - z_1| + \ldots + k_n |w - w_1|, \end{cases}$$

du moment que $(x, y, \ldots, w)$ et $(x, y_1, \ldots, w_1)$ sont deux points du domaine D, ($k_1, \ldots, k_n$ sont des constantes numériques positives) [1]. Si ces conditions ne sont pas remplies, le point $(x_0, y_0, \ldots, w_0)$ sera dit *singulier*.

Le point $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ étant un point *régulier* du système (S), on sait que les conditions initiales $x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0$ définissent une solution (et une seule) $y(x), z(x), \ldots, w(x)$ du système (S), solution qui reste sûrement continue dans un certain intervalle $|x - x_0| < k$, et qui représente une courbe Γ (à une dimension) de l'espace à $(n+1)$ dimensions. Nous dirons que la solution $y(x), z(x), \ldots, w(x)$ est *régulière* dans l'intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$ (qui comprend x_0) si, dans cet intervalle, $y(x), \ldots,$

(1) *Voir* au sujet de ces conditions deux Notes de M. Peano et de M. Osgood (*Wiener Monatshefte*, 1896, 1897).

$w(x)$ sont continues et si la courbe Γ ne passe par aucun point singulier du système (S). Si $\alpha\beta$ est *le plus grand* intervalle de *régularité* de la solution, la solution ne peut, en général, être prolongée d'une façon continue au delà de β (non plus que de α), ou peut l'être de plusieurs manières.

Trois méthodes principales permettent de calculer la solution $y(x), \ldots, w(x)$, qui répond aux conditions initiales $x_0, y_0, \ldots, w_0$: la méthode de Cauchy-Lipschitz, la méthode d'approximations successives de M. Picard, la méthode déduite du *calcul des limites*. Des trois méthodes, la première est la plus simple. Elle permet aussi d'obtenir très aisément [1] tous les résultats auxquels conduisent les autres méthodes. Mais son avantage le plus remarquable, c'est qu'*elle définit la solution $y(x) \ldots w(x)$ dans tout son intervalle de régularité, c'est-à-dire dans tout l'intervalle où la solution est continue et définie sans ambiguïté par les conditions initiales.*

Tout d'abord, on sait, d'après la démonstration classique, que la solution est sûrement continue et définie par la méthode de Cauchy dans l'intervalle $|x - x_0| < l$, l désignant la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$, et M le module maximum des f_i dans D. A cet intervalle, il est facile de substituer un autre intervalle (en général plus grand), introduit déjà par M. Lindelöf dans l'étude de la méthode de M. Picard; appelons M_0 le module maximum des fonctions $f_i(x, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ dans l'intervalle $|x - x_0| < a$; appelons β *la plus grande* des quantités

$$\frac{b}{M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{M_0(k_1 + \ldots + k_n)}{b}\right],$$

et λ *la plus petite* des quantités a et β; la solution $y(x) \ldots w(x)$ est sûrement continue dans l'intervalle $|x - x_0| < \lambda$, et la méthode de Cauchy la définit dans cet intervalle.

En effet, la méthode de Cauchy consiste à diviser l'intervalle

---

(1) Par exemple, on connaît les belles applications que M. Picard a faites de sa méthode aux équations du second ordre dont l'intégrale $y(x)$ est définie par les valeurs de y pour deux valeurs x_0, x_1 de x; on peut retrouver ces résultats par la méthode de Cauchy-Lipschitz, mais les raisonnements sont assez profondément modifiés.

x_0x en q intervalles (que nous supposons égaux) et à assimiler les équations (S) à des équations aux différences; la quantité $y_q(x) - y_0$, ainsi obtenue, reste moindre en module, comme on le voit aussitôt, que

$$\frac{M_0}{k_1+\ldots+k_n}\left\{\left[1+\frac{(x-x_0)}{q}(k_1+\ldots+k_n)\right]^q - 1\right\},$$

donc moindre que $\frac{M_0}{k_1+\ldots+k_n}\left(e^{(x-x_0)(k_1+\ldots+k_n)} - 1\right)$; la démonstration classique établit dès lors que $y_q(x)$ tend vers la solution $y(x)$ quand q tend vers l'infini, du moment que x vérifie l'inégalité

$$|x-x_0| < \frac{1}{k_1+\ldots+k_n}\log\left[1+\frac{M_0(k_1+\ldots+k_n)}{b}\right].$$

Mais la propriété vraiment essentielle de la méthode de Cauchy, c'est qu'elle converge *dans tout l'intervalle* $\alpha\beta$ où la solution est régulière, et qu'elle converge *uniformément* dans tout intervalle intérieur à $\alpha\beta$. Pour établir cette propriété, il suffit de préciser un peu la démonstration classique.

Dans le cours que j'ai professé au Collège de France (1896-1897), j'ai pris cette proposition comme point de départ pour étudier le mouvement d'un système matériel dans l'intervalle de temps le plus grand possible, et avec le minimum de restrictions relatives à la continuité. J'ai appliqué la proposition à des classes nombreuses de problèmes de la Dynamique, et notamment au problème des trois corps.

J'ai indiqué un procédé pour déduire de là un développement de la solution considérée $y(x), \ldots, w(x)$ en série *de polynômes :* mais ces développements sont artificiels.

Enfin, j'ai comparé *les intervalles de convergence* des *trois* méthodes d'intégration énumérées plus haut. La méthode du calcul des limites exige que les équations (S) soient *analytiques :* si R désigne le rayon du cercle (de centre x_0), à l'intérieur duquel la solution $y(x), \ldots, w(x)$ est *holomorphe,* l'intervalle de convergence attaché à cette méthode est exactement l'intervalle $x_0 - R$ à $x_0 + R$. Quant à la méthode de M. Picard, on ne connaît encore aucun moyen de déterminer son intervalle *exact* de convergence :

cet intervalle est, suivant les cas, égal à l'intervalle de convergence de la méthode de Cauchy-Lipschitz (intervalle maximum), ou, au contraire, plus petit que l'intervalle $(x_0 - R, x_0 + R)$ attaché au calcul des limites.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -4x^3y^2 + \frac{1 - y(1 + x^4)}{1 - \sqrt{2}\,x^2y},$$

et la solution $y(x)$ qui répond aux conditions initiales $x = 0$, $y = 1$. Cette solution n'est autre que $y = \frac{1}{1 + x^4}$. La méthode de Cauchy-Lipschitz définit l'intégrale *pour toutes les valeurs réelles de* x; la série de Mac Laurin, formée d'après le calcul des limites, converge seulement *entre* -1 *et* $+1$. Quant à l'intervalle de convergence de la méthode de M. Picard, il est sûrement compris *entre* $-\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$ *et* $\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$; car, dès la première approximation, le coefficient différentiel, où l'on doit faire $y \equiv 1$, devient infini pour $x = \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$.

La méthode de Cauchy-Lipschitz est donc la seule qui définisse la solution dans le plus grand intervalle de continuité. Toutefois, si, dans le calcul des limites, on substitue aux développements tayloriens les nouveaux développements de M. Mittag-Leffler, ces développements définissent la solution dans *tout* l'intervalle où elle est *holomorphe*.

SÉANCE DU 21 JUIN 1899.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Bricard : *Théorème sur des quadriques qui touchent des droites.*

M. Painlevé : *Sur les équations différentielles du troisième ordre à intégrale générale uniforme.*
