BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 297-302

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__297_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

M. le Président fait part d'une lettre dans laquelle M. Raffy témoigne le désir de résigner ses fonctions de Secrétaire, pour raisons de santé. M. le Président exprime les regrets que cette détermination causera à la Société et les remercîments qui sont dus à M. Raffy pour les services rendus par lui dans la rédaction du *Bulletin*.

Communications :

M. Bricard : *Sur un théorème de la Géométrie des coniques.*

M. Andoyer : *Sur les surfaces de singularités des complexes.*

M. Fontené : *Sur des lieux de points remarquables relatifs à des triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique.*

M. Bricard présente quelques observations au sujet de propositions analogues établies par M. Humbert.

M. Lecornu : *Sur un problème de Mécanique : Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge.*

M. Goursat adresse une Note *Sur une transformation de l'équation* $s^2 = 4\lambda(x, y)pq$.

M. Lémeray adresse une Note *Sur les équations fonctionnelles linéaires à fonction de substitution inconnue.*

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1899.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Landau, présenté par MM. Laisant et Painlevé ; MM. Cotton, Guichard et Niewenglowski, présentés par MM. Blutel et Borel ; M. Miller, présenté par MM. Borel et Drach.

Communications :

M. Laisant : *Sur quelques propriétés de la série de Fibonacci.*

M. Painlevé : *Sur les intégrales des équations différentielles de la forme* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, *où* $f(x, y)$ *désigne une fonction continue.*

M. E. Landau fait la Communication suivante :

Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci.

Les nombres de Fibonacci sont déterminés par la formule de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

en posant

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1.$$

On sait que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ s'approche, pour n infini, de la limite $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; donc la série des inverses

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \ldots$$

est convergente, et l'on peut se demander s'il est possible d'exprimer la valeur de cette somme par des fonctions connues, problème sur lequel M. Laisant a dirigé mon attention.

Vu que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

on a

$$\frac{1}{u_n} = \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n},$$

d'où, en posant

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -a, \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{a^n} - (-1)^n a^n} = \frac{\sqrt{5}.a^n}{1-(-1)^n a^{2n}}.$$

Considérons d'abord la somme

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_4}+\frac{1}{u_6}+\ldots=\sum_1^\infty \frac{1}{u_{2h}}.$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_1^\infty \frac{1}{u_{2h}}=\sum_1^\infty \frac{a^{2h}}{1-a^{4h}}=\sum_{h=1}^\infty\sum_{k=0}^\infty a^{(4k+2)h}=\sum_{k=0}^\infty\sum_{h=1}^\infty a^{(4k+2)h}$$
$$=\sum_{k=0}^\infty \frac{a^{4k+2}}{1-a^{4k+2}}=\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{a^6}{1-a^6}+\frac{a^{10}}{1-a^{10}}+\ldots.$$

En désignant la valeur de la somme de la série de Lambert

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1-x^\nu}=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots$$

par $L(x)$, on a évidemment

$$\sum_1^\infty \frac{1}{u_{2h}}=\sqrt{5}[L(a^2)-L(a^4)]=\sqrt{5}\left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-L\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\right].$$

Quant à la somme

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_5}+\ldots=\sum_0^\infty \frac{1}{u_{2h+1}},$$

on est conduit à une série traitée par Jacobi, remarque que Catalan a déjà faite.

En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_0^\infty \frac{1}{u_{2h+1}}=\sum_0^\infty \frac{a^{2h+1}}{1+a^{4h+2}}=\sum_0^\infty a^{2h+1}(1-a^{4h+2}+a^{8h+4}-\ldots)$$

$$\begin{array}{rl}
= a - a^3 + a^5 - a^7 + a^9 - \ldots & = a + 2a^5 + a^9 + \ldots \\
+ a^3 \qquad\qquad - a^9 + \ldots & \\
+ a^5 \qquad\quad - \ldots & \\
+ a^7 \quad - \ldots & \\
+ a^9 - \ldots. &
\end{array}$$

La série étant absolument convergente, on peut réunir tous les termes a^n, n parcourant tous les nombres impairs, et l'on voit aisément qu'un terme a^n se présente dans toutes les lignes horizontales correspondant à un diviseur d de n, et avec le signe plus ou moins, suivant que $\frac{n}{d}$ est $\equiv 1$ ou $\equiv 3 \pmod{4}$. $\frac{n}{d}$ parcourant avec d tous les diviseurs de n, on a

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{u_{2h+1}} = \sum a^n D(n),$$

où n parcourt tous les nombres impairs, $D(n)$ désignant l'excès du nombre des facteurs $4k+1$ de n sur celui des facteurs $4k+3$. Or, cet excès est égal au double du nombre des décompositions du nombre n en deux carrés, excepté dans le cas où n est un carré, où il faut retrancher 1 de ce double. On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{u_{2h+1}} \\
&\quad = 2(1 + a^4 + a^{16} + a^{36} + \ldots)(a + a^9 + a^{25} + \ldots) - (a + a^9 + a^{25} + \ldots) \\
&\quad = (1 + 2a^4 + 2a^{16} + 2a^{36} + \ldots)(a + a^9 + a^{25} + \ldots).
\end{aligned}$$

Les deux parenthèses sont des séries thêta, et l'on a

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{u_{2h+1}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \vartheta_2\left(0 \,\Big|\, \frac{4}{\pi i} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \vartheta_3\left(0 \,\Big|\, \frac{4}{\pi i} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1899.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Andoyer : *Sur les développables admettant une ligne triple.*

M. Michel adresse une Note *Sur la courbe d'ombre d'une surface particulière du quatrième ordre.*

M. Lémeray adresse un Mémoire *Sur les fonctions itérées et leur inversion.*

M. PAINLEVÉ fait la Communication suivante :

Sur la représentation des fonctions elliptiques.

Dans la théorie classique des fonctions elliptiques, on indique trois modes généraux de représentation des fonctions elliptiques : 1° en fonction rationnelle de p, p'; 2° à l'aide du quotient de deux produits de fonctions σ; 3° à l'aide des fonctions ζ (décomposition en éléments simples de M. Hermite). Il y aurait un intérêt didactique à mettre explicitement en évidence un quatrième mode de représentation qui est le suivant : *Toute fonction elliptique d'ordre n, soit $\varphi(u)$, est représentable par le quotient de deux expressions de la forme*

$$(1) \qquad a_1 p(u+h) + a_2 p'(u+h) + \ldots + a_n p^{(n-2)}(u+h),$$

h et les a_i désignant des constantes convenables.

Considérons, en effet, les n zéros $u = \alpha_i$, et les n pôles $u = \beta_i$ de $\varphi(u)$; on peut les supposer distincts et tels qu'aucunerelation n'existe de la forme

$$n\alpha_i - \Sigma\alpha = \text{période} \qquad \text{ou} \qquad n\beta_i - \Sigma\beta = \text{période}$$

[sinon, on effectuerait sur $\varphi(u)$ une transformation homographique]. Il est facile de former une expression (1) qui ait précisément pour zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; tout d'abord, si la chose est possible, on a nécessairement

$$nh + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \text{période},$$

d'où

$$h = -\frac{\Sigma\alpha_i}{n} + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n},$$

ce qui donne n^2 valeurs de h distinctes. Adoptons pour h une de ces valeurs, et écrivons que l'expression (1) s'annule pour les $(n-1)$ valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ de u; les $(n-1)$ relations linéaires et homogènes en $a_1, \ldots, a_n$ ainsi obtenues ont leurs coefficients finis et sont toujours compatibles pour des valeurs des a_i qui ne sont pas toutes nulles. La $n^{\text{ième}}$ racine de (1) est alors égale à $-(nh + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})$, c'est-à-dire à $\alpha_n +$ période. On forme de la même manière une expression (1) qui admet comme zéros les n pôles β_i de $\varphi(u)$, et, d'après l'égalité

$$\Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i + \text{période},$$

on peut adopter dans la nouvelle expression la même valeur de h; soit

$$(2)\qquad A_1 \wp(u+h) + A_2 \wp'(u+h) + \ldots + A_n \wp^{(n-2)}(u+h)$$

la nouvelle expression ainsi obtenue. Posons

$$(3)\qquad \psi(u) = \frac{a_1 \wp(u+h) + a_2 \wp'(u+h) + \ldots + a_n \wp^{(n-2)}(u+h)}{A_1 \wp(u+h) + A_2 \wp'(u+h) + \ldots + A_n \wp^{(n-2)}(u+h)};$$

le quotient $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$, qui n'a ni zéros ni pôles, est évidemment une constante. La fonction $\varphi(u)$ peut donc toujours [1] recevoir la forme (3). C. Q. F. D.

Une fois choisie celle des n^2 valeurs de h qu'on adopte, la fonction $\varphi(u)$ ne peut être mise que d'une seule manière sous la forme (3); en effet, h a nécessairement la même valeur dans l'expression (2) et dans l'expression (1), et (une fois h déterminé) deux expressions telles que (1) ne peuvent avoir les mêmes zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sans coïncider, à un facteur constant près. Il suit de là que les coefficients a, A sont déterminés au même facteur constant près. Il existe donc n^2 représentations (3) *distinctes* de la fonction donnée $\varphi(u)$.

L'application de ce théorème aux courbes de genre 1 dans un espace quelconque conduit aussitôt à la représentation classique des coordonnées homogènes d'un point de la courbe (*voir* Halphen, *Fonctions elliptiques,* Tome II, Chapitre XI, où le théorème précédent se trouve employé implicitement).

---

(1) Si l'on a dû effectuer sur φ une transformation homographique, il est clair que la transformation homographique inverse conserve la forme de l'expression (3). Cette transformation peut d'ailleurs être évitée : il suffit d'admettre que les n valeurs de α_i (ou β_i) puissent coïncider entre elles ou avec $-h$ (h étant la valeur adoptée parmi les n^2 valeurs possibles). Si β racines α coïncident avec $-h$, on annule les β derniers coefficients a_j de (1), et l'on exprime ensuite que l'expression admet les autres racines avec leur ordre de multiplicité (diminué d'une unité pour une d'entre elles).

FIN DU TOME XXVII.