BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 67-75

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__67_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JANVIER 1899.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Elle entend et approuve le rapport de la Commission des finances sur l'exercice 1897-1898.

Communications :

M. Painlevé : *Sur une application des groupes de Lie à la théorie des équations différentielles.*

M. Laisant présente à la Société le numéro spécimen d'une publication nouvelle, l'*Enseignement mathématique;* il fait connaître l'objet et le caractère de cette Revue.

SÉANCE DU 18 JANVIER 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Communications :

M. Fontené : *Sur un nouveau calcul symbolique.*

M. Laisant : *Observation sur le même sujet.*

M. Störmer : *Application de quantités symboliques analogues aux quaternions à l'étude d'une équation indéterminée considérée par M. Humbert.*

M. Raffy : *Généralisation des surfaces de Joachimsthal.*

M. Picard adresse une Note *Sur le prolongement analytique d'une fonction.*

SÉANCE DU 1er FÉVRIER 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Communications :

M. Blutel : *Sur certaines propriétés des centres de courbure de surfaces particulières.*

M. Raffy : *Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques.*

M. H. Duport adresse un Mémoire *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.*

M. Lémeray adresse un Mémoire *Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives.*

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Drach, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Pringsheim, présenté par MM. Darboux et W. Dyck.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche.*

M. Painlevé : *Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur.*

M. Lecornu : *Sur une équation aux différences mêlées.*

M. Humbert fait la Communication suivante :

Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire.

Dans une précédente Communication (t. XXVI de ce *Bulletin*, p. 233), j'ai énoncé, en m'appuyant sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, cette proposition :

« Sur une courbe unicursale C, dont les coordonnées d'un point s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre x, on considère l'involution définie par $f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$, f et φ étant des polynômes d'ordre $2p+1$: si quatre groupes de l'involution, correspondant aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de λ, sont formés respectivement par un point simple, x_i, et par $2p$ points confondus deux à deux, le rapport anharmonique des quatre valeurs λ_i et celui des quatre valeurs x_i sont liés par l'équation modulaire pour $n = 2p+1$. »

On peut faire une application de cette remarque aux *polygones de Poncelet*, d'un nombre impair, $2p+1$, de côtés, inscrits à une conique C et circonscrits à une conique C'.

En effet, sur l'unicursale C, les valeurs du paramètre x qui correspondent aux sommets d'un polygone sont les racines d'une équation de la forme $f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$, comme le montre immédiatement la théorie des fonctions elliptiques; on peut le voir encore en observant que les sommets des polygones déterminent sur la conique C une involution, laquelle est nécessairement rationnelle, c'est-à-dire du type $f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$, puisque C est unicursale.

Parmi les groupes de cette involution, ceux qui comprennent un des quatre points x_i, communs aux deux coniques C et C', comprennent en outre p points confondus deux à deux, car le polygone correspondant se replie sur lui-même à partir du $(p+1)^{\text{ième}}$ sommet; donc, en vertu de la proposition rappelée plus haut, le rapport anharmonique des quatre points x_i sur la conique C et le rapport anharmonique des valeurs de λ qui correspondent aux quatre polygones repliés sont liés par l'équation modulaire pour $n = 2p + 1$.

Afin de donner une forme exclusivement géométrique à ce théorème, observons que les centres des moyennes distances des sommets des polygones inscrits à C et circonscrits à C′ décrivent une conique C″ (*voir* à ce sujet une Note de M. Bricard au t. XXVI, p. 91, de ce *Bulletin*) et que, par suite, le rapport anharmonique des valeurs de λ pour quatre polygones est le même que celui des quatre centres des moyennes distances correspondants sur la conique C″. Ainsi :

Soient deux coniques C *et* C′ *se coupant en* A_1, A_2, A_3, A_4, *et telles qu'il existe des polygones de* $2p + 1$ *côtés inscrits à* C *et circonscrits à* C′ : *on sait que le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone décrit une conique* C″. *Cela posé, le rapport anharmonique des quatre points* A_i *sur la conique* C *et le rapport anharmonique, sur la conique* C″, *des centres des moyennes distances correspondant aux quatre polygones qui ont respectivement un des points* A_i *pour sommet, sont liés par l'équation modulaire du cas de* $n = 2p + 1$.

On aurait une interprétation analogue si $n = 2p$; l'énoncé suivant résume les deux énoncés, n étant quelconque :

Parmi les polygones de n *côtés inscrits à* C *et circonscrits à* C′, *il en est quatre qui ont pour sommet ou pour côté un point commun ou une tangente commune à* C *et* C′ : *le rapport anharmonique, sur la conique* C″, *des centres des moyennes distances correspondant à ces quatre polygones, et le rapport anharmonique des quatre points* A_i, *sur la conique* C, *sont liés par l'équation modulaire relative à la transformation d'ordre* n.

M. Humbert fait la Communication suivante :

Sur les polygones de Poncelet.

Parmi les polygones de n côtés inscrits à une conique C et circonscrits à une conique C′, il en est quatre qui sont repliés sur eux-mêmes à partir d'un de leurs sommets.

Si n est impair, ces polygones sont ceux qu'on obtient en partant d'un des quatre points communs à C et C' : le sommet de rang $\frac{n+1}{2}$ est le point de contact d'une tangente commune à C et C', le sommet suivant coïncide avec lui, et le polygone se replie ensuite sur lui-même, de sorte que tous ses sommets sont doubles, à l'exception du premier.

Si n est pair, en faisant la même construction à partir d'un point A commun à C et C', on trouve, pour le sommet de rang $\frac{n}{2}+1$, un autre point commun A'; le polygone revient ensuite sur lui-même, et tous ses sommets sont doubles, à l'exception de A et A'. Enfin, en faisant la construction à partir du point de contact d'une tangente commune à C et C', on trouve un polygone dont tous les sommets sont doubles, et parmi eux figure un deuxième point de contact de tangente commune.

Cela posé, je dis que :

Le centre harmonique des sommets d'un polygone quelconque par rapport à une droite donnée est un point fixe, si la droite coupe la conique C *en deux sommets doubles;*

ou, en langage non projectif :

Le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone quelconque est un point fixe si les deux points à l'infini sur la conique C *sont des sommets doubles.*

Cela résulte immédiatement d'un théorème que j'ai fait connaître ailleurs (*Journ. de Math.*, 4e série, t. III, p. 362) et qui s'applique évidemment au cas actuel : le centre des moyennes distances des points communs à une courbe C et à chacune des courbes d'un faisceau est un point fixe si, quand un des points communs s'éloigne à l'infini, un second s'éloigne en même temps à l'infini, dans la même direction. En particulier :

Le centre harmonique des sommets d'un polygone quelconque, par rapport à la droite qui joint les points de contact de C *avec deux des tangentes communes à* C *et* C', *est un point fixe.*

SÉANCE DU 1er MARS 1899.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communication :

M. Bourlet : *Sur la théorie des opérations, appliquée aux fonctions.*

SÉANCE DU 15 MARS 1899.

PRÉSIDENCE DE M. GUYOU.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'emploi des signes en Géométrie.*
M. Borel : *Sur le prolongement des fonctions analytiques.*

M. Blutel fait la Communication suivante :

Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques.

Si l'on imagine sur une surface quelconque deux familles de courbes ($u =$ const. et $v =$ const.) se coupant sous un angle constant et telles que le rapport de leurs courbures géodésiques soit constant en tous les points de la surface, on démontre aisément que les deux systèmes de courbes en question coupent sous des angles constants une même famille de courbes parallèles et, par suite, une même famille de lignes géodésiques de la surface.

La réciproque est vraie.

Si l'on considère un triangle curviligne formé sur la surface à l'aide de deux courbes C_u, C'_v et d'une courbe parallèle associée, les longueurs des côtés portés par C_u et C'_v sont proportionnelles aux sinus des angles opposés dans ce triangle. Cette propriété, à peu près évidente par la Géométrie, conduit, pour un triangle curviligne formé à l'aide de trois courbes C_u, C'_v, C''_w, à un énoncé analogue à celui que fournit le théorème des projections, appliqué à un triangle rectiligne.

M. ANDRADE adresse la Note suivante :

Sur quelques paradoxes de Statique non euclidienne.

1. J'ai déjà signalé quelques paradoxes de Statique non euclidienne, par exemple ceux-ci :

Dans une balance de l'espace de Lobatchewsky, la charge propre du support dépasse la somme des charges qui se font équilibre, tandis que si la balance est étudiée dans l'espace de Riemann, la fatigue propre du support est toujours moindre que la somme des charges.

L'emploi des fils permet d'accentuer encore ces paradoxes.

J'avais effleuré cette remarque dans une Note sur la Statique non euclidienne imprimée dans mes *Leçons de Mécanique physique;* mais le paragraphe qui termine cette Note contient une erreur et je me propose dans cet article de reprendre la question à son origine.

2. On sait que la Statique, c'est-à-dire la théorie du groupe d'équivalence d'un système de vecteurs, domine les trois géométries; on peut résumer cette théorie en trois propositions dont voici les deux plus simples :

1° La composition des forces concourantes est la même dans les trois géométries et cette composition engendre à la fois la théorie des fonctions dites *circulaires* et la Trigonométrie sphérique ;

2° La réduction des vecteurs d'un plan qui sont perpendiculaires à une même droite se ramène, par l'emploi d'une méthode due à Monge, à la composition de deux forces égales agissant du même côté de leur perpendiculaire commune et voici la loi de cette composition : si les forces égales ont l'intensité P et si la distance de leurs lignes d'action comptée sur leur perpendiculaire commune est $2p$, la résultante des deux vecteurs passe par le milieu de cette perpendiculaire commune et son intensité R est

$$R = 2P\varphi(p);$$

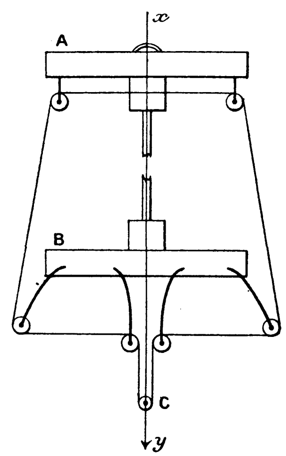
la fonction $\varphi(x)$ ne peut d'ailleurs avoir que l'une des trois formes suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2} \equiv \operatorname{ch} \frac{x}{k} \qquad \text{(espace de Lobatchewsky),}$$

$$\varphi(x) = 1 \qquad \text{(espace d'Euclide),}$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{i\frac{x}{k}} + e^{-i\frac{x}{k}}}{2} \equiv \cos \frac{x}{k} \qquad \text{(espace de Riemann).}$$

3. Ces résultats étant rappelés, considérons deux poutres, l'une A fixe, l'autre B mobile; les deux poutres sont perpendiculaires à l'axe XY et symétriques par rapport à cet axe; la poutre inférieure B porte un système de quatre poulies, et la poutre A un système de deux poulies, de manière qu'un fil sans fin s'enroule sur ces poulies et supporte une poulie libre C, la connexion de cet enroulement étant indiquée par la figure ci-dessous.



La partie B est supposée guidée de manière à ne pouvoir se mouvoir que par une translation dans le plan de la figure : cette translation non euclidienne ayant, bien entendu, la droite XY pour axe. Si la petite poulie C est sollicitée par une force F, et si les brins du fil pendant sont suffisamment rapprochés, la force F produira une tension T du fil, telle que l'on aura

$$F = 2T,$$

en sorte que si α désigne l'angle des brins qui réunissent les deux poutres avec la perpendiculaire à XY et de longueur $2p$, que forment les fils de base, la poutre rigide B sera soumise à un effort *descendant* égal à

$$2\mathrm{T} - 2\mathrm{T}\varphi\left(\frac{p}{k}\right)\cos\alpha.$$

Cette force est toujours descendante ou nulle dans les cas de l'espace de Riemann ou d'Euclide; mais, dans l'espace de Lobatchewsky, cette force pourrait être ascendante, et elle le sera, en particulier, lorsque $\alpha = 0$.

En ce dernier cas le corps B *fonctionnerait tout d'abord comme ascenseur et grimperait le long du fil tendu.*

4. On peut encore donner une autre forme à ces paradoxes.

Si les deux pièces A et B étaient reliées par une tige mince, ayant pour axe XY, cette tige serait comprimée dans le dernier cas qu'on vient de considérer.

Et le paradoxe consiste en ceci que le fil, tiré vers le bas sur le premier corps B sur lequel il s'appuie, pourrait pourtant *comprimer* le corps B sur le corps A avec un effort plus grand que l'action directe exercée par la force directement appliquée.

Ces transmissions d'efforts ne violent d'ailleurs pas le principe du travail virtuel.

Seulement on pourrait ainsi, par un simple *étalement* du fil enroulé et sans multiplication de brins, *renverser et augmenter l'effet de la force.*

En d'autres termes, un fil simple pourrait, *sans multiplication des brins,* jouer le rôle d'un levier.