SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 252-258
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__252_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 JUILLET 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Élection :

M. Molk, présenté par MM. Tannery et Hadamard, est élu membre de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Hadamard présente un résultat de M. Fréchet relatif *aux dérivées des fonctions de lignes.*

M. Hadamard : *Sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées et sur la connexion des surfaces minima.*

M. André : *Sur un problème de combinaisons.*

SÉANCE DU 16 JUILLET 1902.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Lecornu : *Sur un théorème de Hugoniot.*

M. Zoukis : *Sur certaines configurations de l'espace.*

M. Bricard : *Sur le mouvement à trois paramètres.*

SÉANCE DU 5 NOVEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Correspondance :

M. Maupin adresse une Note relative aux *Volumes des foudres ovales*.

Communications :

M. Hadamard : *Sur certaines équations différentielles du second ordre*.

M. Lecornu : *Sur un problème de balistique externe*.

M. Blutel : *Sur le degré des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique*.

M. Hadamard fait la Communication suivante :

Sur une question de calcul des variations.

On sait, à l'heure actuelle, établir avec rigueur les conditions du maximum et du minimum d'une intégrale simple contenant un nombre quelconque de fonctions inconnues, ou encore d'une intégrale multiple contenant une seule de ces fonctions [1]. Dans le premier cas, si l'on se borne, pour simplifier, à l'étude d'une intégrale

$$\int f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)\, dx$$

où les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ne sont assujetties à aucune relation donnée et figurent au premier ordre, la condition de Legendre, équivalente en général [2] à celle de Weierstrass relative au mi-

---

[1] Je fais ici abstraction des cas dans lesquels quelques-unes des inégalités qui doivent être vérifiées pour qu'il y ait maximum ou minimum sont remplacées par les égalités correspondantes : cas qui sont loin d'être élucidés et ne le seront probablement jamais complètement (*voir* Hedrick, *Bulletin of the American Math. Society*, 2e série, t. IX, 1902). Ces cas sont exceptionnels, au lieu que la difficulté dont il est question dans le texte se présente dans des cas tout à fait généraux.

[2] Les exceptions n'ont lieu que pour les cas limites auxquels il est fait allusion dans la note précédente.

nimum faible, est que la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial y'_i \partial y'_k} u_i u_k$$

soit définie positive. Dans le second, l'intégrale étant

$$\int\int\cdots\int\int f(y, x_1\ x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n), dx_1 dx_2, \ldots, dx_n$$

et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les dérivées partielles de la fonction inconnue y, par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce sera la forme

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} u_i u_k$$

qui devra être définie.

Le cas plus général où interviennent à la fois plusieurs variables indépendantes et plusieurs fonctions inconnues a été, au contraire, presque universellement négligé, comme si l'on ne devait y voir qu'une généralisation naturelle et immédiate des précédents.

D'après cette analogie, on devrait, étant donnée une intégrale

$$(1)\quad \int\int\cdots\int f(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n, p'_1, \ldots, p_n^m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

où la quantité sous le signe $\int\int\cdots\int$ dépend des m fonctions inconnues y, des n variables indépendantes x et des mn dérivées

$$p_k^i = \frac{\partial y_i}{dx_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

des premières par rapport aux secondes, considérer comme une condition nécessaire du minimum, que la forme quadratique

$$(2)\qquad \sum_{i,k,i',k'} \frac{\partial f}{\partial p_k^i \partial p_{k'}^{i'}} u_k^i u_{k'}^{i'}$$

aux mn indéterminées $u_1^1, \ldots, u_n^m$, soit définie positive.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer qu'il n'en est rien, et que le cas de $m > 1$, $n > 1$ offre une difficulté qui lui est propre. La remarque n'est d'ailleurs nullement nouvelle : elle résulte avec évidence des transformations effectuées par Clebsch dans son Mémoire *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* [1]. Ces transformations, généralisation de celles qui avaient été effectuées par Jacobi sur la seconde variation des intégrales simples, consistent uniquement dans l'addition de termes que l'intégration par parties permet de faire disparaître, en les transportant à la frontière. Clebsch montre que, par une introduction convenable de termes de cette espèce, on peut ajouter à la forme (2) n'importe quelle combinaison linéaire des $\frac{m(m-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2}$ expressions

$$(3) \qquad u_k^i u_{k'}^{i'} - u_{k'}^i u_k^{i'} \qquad \begin{pmatrix} i, i' = 1, 2, \ldots, m; \\ k, k' = 1, 2, \ldots, n; \\ i \neq i', \quad k \neq k' \end{pmatrix}.$$

Il n'est donc point nécessaire que la forme (2) soit définie : *il suffit qu'elle puisse le devenir lorsqu'on la combine d'une manière quelconque avec des formes* (3).

Du moins, nous voyons que cette condition est suffisante pour rendre la variation seconde essentiellement positive. Mais il est aisé de déduire là les conditions suffisantes du minimum cherché.

Supposons, en effet, que la forme (2) devienne définie par l'addition d'un ou plusieurs termes de la forme

$$\lambda\left(u_k^i u_{k'}^{i'} - u_{k'}^i u_k^{i'}\right)$$

où λ est une quantité, constante ou variable, que l'on peut toujours supposer exprimée en fonction des x. Nous pourrons, avec Clebsch, considérer ces termes comme préexistants dans la forme en question, à la condition d'ajouter à f les termes correspondants

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda y_i p_{k'}^{i'}\right) - \frac{\partial}{\partial x_{k'}}\left(\lambda y_i p_k^{i'}\right) \\ &\quad = \lambda\left(p_k^i p_{k'}^{i'} - p_{k'}^i p_k^{i'}\right) + y_i\left(p_{k'}^{i'}\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} - p_k^{i'}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{k'}}\right),\end{aligned}$$

lesquels ne changent naturellement pas la question posée et, par conséquent, restent aussi sans influence sur les autres éléments

---

(1) *Journal de Crelle,* t. 56, 1859, p. 122-149.

de la solution, je veux dire sur l'équation de Lagrange et la condition de Jacobi. Une fois l'expression de f ainsi transformée, tout se passera comme pour $m = 1$.

Il reste à savoir si la condition ainsi modifiée est nécessaire.

Or on peut aisément établir [1] la condition nécessaire suivante : *la forme* (2) *doit être essentiellement positive pour toutes les valeurs des u qui annulent les expressions* (3).

Seulement, il n'est pas évident que cette condition soit équivalente à la première. De fait, si l'on considère p formes quadratiques quelconques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ et une $(p+1)^{\text{ième}}$ ψ, et si l'on sait que celle-ci est positive pour toutes les valeurs des variables qui annulent les premières, il ne résulte nullement de là que ψ soit une combinaison linéaire des formes φ et d'une forme définie. Tout au plus pourrait-on être plus affirmatif si, au lieu de formes φ quelconques, on considérait les formes particulières (3).

Cependant la déduction en question est légitime lorsque le nombre p est égal à l'unité. Ceci ayant lieu pour $m = 2$, $n = 2$, la question est résolue dans ce cas.

Elle semble, au contraire, appeler de nouvelles recherches pour $m, n > 2$.

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Élections :

MM. D. Egorov, présenté par MM. J. Tannery et Raffy,
D.-F. Diéguez, présenté par MM. Duporcq et Gauthier-Villars,

sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces du quatrième ordre à quatre points doubles.*

---

(1) Cette démonstration, qui repose d'ailleurs sur des considérations tout autres que les intégrations par parties qui viennent d être utilisées pour la démonstration inverse, figure dans mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique,* qui seront publiées prochainement.

M. Carvallo : *Sur l'application de la loi des travaux virtuels à la théorie de l'Électricité, et sur l'Induction.*

M. Lévy présente quelques observations à ce sujet.

M. Raffy : *Sur le système simultané de deux équations de Riccati.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

M. le Président signale, parmi les pièces de la correspondance, le *Mémorial du Centenaire d'Abel,* envoyé en hommage par M. Carl Störmer.

Communications :

M. Estanave : *Sur les coefficients des développements en séries de* tang x, séc x, *et d'autres fonctions*

MM. Borel, Servant et Perrin présentent quelques observations à ce sujet.

M. Borel : *Sur la définition du contact de deux courbes.*

M. Perrin : *Sur l'équation différentielle des coniques.*

M. Laisant : *Sur les rayons de courbure des courbes planes.*

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1902.

PRÉSIDENCE DE M. RAFFY.

Élections :

MM. Lucas de Peslouan, présenté par MM. Laisant et Raffy,
Lebesgue, présenté par MM. Raffy et Borel,
Pux, présenté par MM. Laisant et Duporcq,
Merlin, présenté par MM. Raffy et Demoulin,
le vicomte du Boberil, présenté par MM. Raffy et Duporcq,
sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Fouret : *Sur la surface réciproque de la surface de Steiner.*

M. Cahen : *Sur la résolution des équations linéaires à coefficients quelconques.*

M. Raffy : *Sur les réseaux conjugués persistants.*

FIN DU TOME XXX.