G. KREWERAS

# Traitement simultané du « problème de Young » et du « problème de Simon Newcomb »

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche*, tome 10 (1967), p. 23-31

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1967__10__23_0>

# TRAITEMENT SIMULTANÉ DU «PROBLÈME DE YOUNG» ET DU «PROBLÈME DE SIMON NEWCOMB»

par

G. KREWERAS

## 1 - INTRODUCTION

Le présent article concerne le traitement simultané de deux problèmes qui apparaissent tout à fait indépendamment l'un de l'autre dans la littérature combinatoire.

L'un de ces deux problèmes est connu sous le nom de "problème de Simon Newcomb", et s'énonce habituellement de la manière suivante. On se donne un paquet de cartes de n'importe quelle "spécification", c'est-à-dire composé de n'importe quelle manière quant aux hauteurs possibles $1, 2, \ldots, h$ des cartes (qui seules interviennent dans le problème), et l'on passe ces cartes en revue pour les disposer en piles successives, de manière à commencer une nouvelle pile chaque fois qu'apparaît une carte strictement moins "haute" que celle qui la précède. De combien de manières distinctes peut-on ainsi obtenir un nombre donné $r + 1$ de piles ? Différentes méthodes ont été utilisées pour résoudre ce problème, c'est-à-dire pour organiser le calcul du nombre demandé en fonction de l'entier non-négatif $r$ et de la suite d'entiers positifs $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h$ qui définit la spécification du paquet. Voir notamment à ce sujet [5].

L'autre problème, que nous appellerons pour la brièveté du langage le "problème de Young", peut s'énoncer comme suit. On se donne deux suites finies non-croissantes d'entiers non-négatifs (ou *suites de Young*) $Y = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_h)$ et $Y' = (y'_1\ y'_2\ \ldots\ y'_h)$, de même longueur $h$, et telles que $Y$ majore $Y'$ terme à terme (au sens large). De combien de manières peut-on relier $Y'$ à $Y$ par une "chaîne de Young", c'est-à-dire par une succession de suites qui soient toutes de Young, et dont chacune s'obtienne à partir de la précédente en ajoutant une unité à un seul terme ? Ce problème a été résolu dans le cas particulier où les termes de $Y'$ sont tous nuls, d'une part par une formule analytique due à A. Young [7], d'autre part par un algorithme monôme remarquablement élégant introduit par Frame, Robinson et Thrall [2]. Nous en avons donné une solution dans le cas de $Y'$ quelconque en exprimant le nombre $f(Y, Y')$ cherché à l'aide d'un déterminant d'ordre $h$ [3].

Or le problème de Simon Newcomb et le problème de Young peuvent être fondus assez naturellement en un problème unique plus général. En effet si l'on se pose le problème de Young à partir de $Y$ et $Y'$, chacune des chaînes de suites de Young répondant aux conditions du problème comporte un certain nombre $r$ (éventuellement nul) de "retours en arrière" : nous appelons retour en arrière le cas où, en appelant $U$, $V$, $W$ trois suites consécutives de la chaîne de Young $Y' \ldots UVW \ldots Y$, le terme à augmenter pour passer de $V$ à $W$ soit d'*indice strictement inférieur* à celui du terme à augmenter pour passer de $U$ à $V$. Le nombre total $f(Y, Y')$ des chaînes de Young reliant $Y'$ à $Y$ se décompose ainsi en une somme

$$f(Y, Y') = \theta_o + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_r + \ldots, \qquad (1)$$

dont chaque terme $\theta_r$ dénombre celles d'entre elles qui comportent $r$ retours en arrière (bien entendu seuls un nombre fini d'entre les $\theta_r$ peuvent être non nuls). Le problème général est de calculer $\theta_r(Y, Y')$ connaissant $r$, $Y$ et $Y'$.

Il est aisé de voir que si l'on sait résoudre ce problème général, on saura par là même fournir aussi bien une solution du problème de Young (par sommation des $\theta_r$ par rapport à $r$) qu'une solution du problème ordinaire de Simon Newcomb. Celui-ci se présentera en effet, si on le pose avec la "spécification" $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_h$, simplement comme un cas particulier du problème général : il suffira par exemple de définir $Y$ et $Y'$ par :

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h \\ y'_1 = y_2 &= \alpha_2 + \ldots + \alpha_h \\ &\ \ \vdots \\ y'_{h-1} = y_h &= \alpha_h \\ y'_h &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dans ces conditions toute suite de $h$ entiers majorant $Y'$ et majorée par $Y$ sera *ipso facto* une suite de Young, et seule interviendra dans le dénombrement la "condition de Simon Newcomb", relative aux $r$ retours en arrière (les indices jouant le rôle des "hauteurs" des cartes de la formulation traditionnelle).

Pour aborder la résolution du problème général, il sera commode de considérer les suites Y' et Y , quitte à les prolonger par des termes nuls, comme des éléments d'un treillis distributif **T** (treillis de Young, cf [3]) ; ce treillis **T** est celui des suites non-croissantes d'entiers non-négatifs qui sont illimitées mais de somme finie, et dans lequel l'ordre partiel, noté $>$ bien qu'il soit réflexif, est celui de la majoration terme à terme (au sens large).

## 2 - SEGMENTS ET LIGNES POLYGONALES DANS LE TREILLIS DE YOUNG

Etant donné dans **T** deux éléments distincts R et S tels que $S > R$ (ou $R < S$) , nous appellerons par définition *segment RS* l'ensemble des éléments X de **T** qui satisfont aux conditions suivantes :

(i) $R < X < S$

(ii) il existe, dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, un indice p tel que

$$i < p \Longrightarrow x_i = s_i$$

$$i > p \Longrightarrow x_i = r_i$$

Le segment RS possède les propriétés ci-après, dont la vérification est aisée :

- R et S appartiennent au segment RS (pour R on a $p = 1$ , et pour S on peut prendre p égal à l'indice au-dessus duquel les $r_i$ et $s_i$ sont tous nuls et par conséquent égaux).

- Si $\sum_{i\in\mathbf{N}} r_i = \rho$ et $\sum_{i\in\mathbf{N}} s_i = \sigma$ , le segment RS se compose de $\sigma - \rho + 1$ éléments distincts.

- le segment RS est totalement ordonné par la relation d'ordre du treillis **T** ; si on énumère les éléments du segment dans l'ordre croissant, on passe de chacun au suivant en augmentant d'une unité le terme qui a le plus petit indice possible.

*Exemple :* si R = (220) et S = (544), on a $\rho = 4$ et $\sigma = 13$ ; le *segment RS* est formé, dans l'ordre croissant, des 10 éléments (220) (320) (420) (520) (530) (540) (541) (542) (543) (544).

On a enfin la propriété suivante, qui achève de justifier la dénomination de "segment" : *si $R'$ et $S$ sont distincts et si $R'$ appartient au segment $RS$ et $S$ au segment $R'S'$, $R'$ et $S$ appartiennent tous deux au segment $RS'$.*

En effet, en vertu du (ii), si $R' \in$ segment $RS$, il existe un $p$ tel que

$$i < p \Rightarrow r'_i = s_i \tag{3}$$

$$i > p \Rightarrow r'_i = r_i \tag{4}$$

de même si $S \in$ segment $R'S'$, il existe un $q$ tel que :

$$i < q \Rightarrow s_i = s'_i \tag{5}$$

$$i > q \Rightarrow s_i = r'_i \tag{6}$$

En outre, on a $R' < S$, d'où, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $s_i > r'_i$ ; et puisque $S \neq R'$ il existe au moins un indice $n$ pour lequel $r'_s < s_n$. Cet indice $n$ ne pouvant être ni $< p$ par suite de (3) ni $> q$ par suite de (6), on a $p \leqslant n \leqslant q$, d'où $p \leqslant q$.

Montrons que $R' \in$ segment $RS'$ (on opèrerait de même pour $S$). La condition (i) est satisfaite puisque $R < R' < S < S'$. Quant à la condition (ii), elle est satisfaite avec l'entier $p$. En effet $i < p \Longrightarrow r'_i = s_i$ en vertu de (3), et puisque $p \leqslant q$ on a aussi $i < p \Longrightarrow i < q \Longrightarrow s_i = s'_i$ en vertu de (5) ; d'où $i < p \Longrightarrow r'_i = s'_i$. Et d'autre part $i > p \Longrightarrow r'_i = r_i$ en vertu de (4).

La notion de segment une fois définie, considérons dans une chaîne de Young reliant $Y'$ à $Y$ trois suites consécutives $UVW$, et supposons que l'on ait dans ces suites $v_i = u_i + 1$ et $w_j = v_j + 1$

Deux circonstances seulement peuvent se produire, comme il est aisé de le voir :

1/ si $j < i$, il y a, "à l'occasion de $V$", un retour en arrière, et $V$ n'appartient pas au segment $UW$

2/ si $j \geqslant i$, $V$ ne donne pas lieu à un retour en arrière, mais appartient par contre au segment $UW$.

Il en résulte que pour qu'une chaîne de Young reliant $Y'$ à $Y$ donne lieu exactement à $r$ retours en arrière, et cela à l'occasion de $V_1\ V_2 \ldots V_r$, il faut et il suffit que les suites de Young dont elle se compose engendrent les $r + 1$ segments successifs $Y'V_1$, $V_1V_2, \ldots, V_{r-1}V_r$, $V_rY$, étant exclu que l'un de ces segments "prolonge" son prédécesseur (c'est-à-dire forme avec lui une réunion qui se réduise à un segment unique). Nous dirons, tout naturellement, que ces segments constituent une *ligne polygonale à* $r+1$ *côtés*, dont $Y'$, $V_1$, ..., $V_r$, $Y$ sont les $r+2$ sommets.

En d'autres termes, le nombre $\theta_r(Y, Y')$ cherché est aussi le nombre de manières de définir une ligne polygonale reliant $Y'$ à $Y$ et ayant exactement $r+1$ côtés, ou si l'on préfère $r$ sommets intermédiaires entre $Y'$ et $Y$.

## 3 - RESOLUTION DU PROBLEME GENERAL

Sous cette dernière forme, le problème présente une parenté étroite avec un autre problème posé et résolu dans [3]. dont nous nous contentons de rappeler ici l'énoncé et le résultat final : étant donné $Y$, $Y'$ et $r$, combien y a-t-il, dans $\mathbf{T}$, de $r$-chaînes reliant $Y'$ à $Y$, c'est-à-dire de suites $Z_1 Z_2 \ldots Z_r$ telles que

$$Y' < Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_r < Y \quad ? \tag{7}$$

La réponse à cette question est un entier $w_r(Y, Y')$ égal au déterminant dont l'élément général (ligne $i$, colonne $j$) est $C_{y_i - y'_j + r}^{i-j+r}$. Cette dernière notation désigne si l'on veut le coefficient de $t^{i-j+r}$ dans le développement de $(1+t)^{y_i - y'_j + 1}$ pour $|t| > 1$ ; elle a donc un sens pour tout système de valeurs entières (de signe quelconque) de ses indices supérieur et inférieur, et ce sens est celui du coefficient binomial ordinaire lorsque $0 \leqslant i-j+r \leqslant y_i - y'_j + r$. Il y a lieu de noter que ce déterminant ne dépend pas de l'ordre $h$ avec lequel on le calcule, pourvu que $h$ soit assez grand pour que $i > h \Longrightarrow y_i = y'_i = 0$ ; pour toutes les justifications, nous renvoyons a [3].

Si l'on se fixe $Y$ et $Y'$ avec $Y' < Y$, il existe entre les nombres $w_r(Y, Y')$, que nous savons calculer, et les nombres $\theta_r(Y, Y')$, que nous cherchons, une relation que nous pouvons maintenant préciser. En effet dans une $r$-chaîne telle que celle définie par (7), il peut se faire que pour aucun $i$ l'élément $Z_i$ n'appartienne au segment $Z_{i-1} Z_{i+1}$ (en posant $Z_0 = Y'$ et $Z_{r+1} = Y$) ; dans ce cas la $r$-chaîne en question permet immédiatement de définir une ligne polygonale à $r+1$ côtés reliant $Y'$ à $Y$. S'il n'en est pas ainsi, on peut "nettoyer" la $r$-chaîne (7), c'est-à-dire y supprimer tous ceux des $Z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) qui appartiennent à un segment défini par deux autres d'entre eux. Si l'on peut ainsi en supprimer $\lambda$ au plus, les $r - \lambda$ qui restent définissent une ligne polygonale $P$ ayant exactement $r - \lambda + 1$ côtés ; le cas extrême est celui où $\lambda = r$ et où $P$ se réduit au segment $Y'Y$.

Inversement, soit $P$ une ligne polygonale de $r - \lambda + 1$ côtés reliant $Y'$ à $Y$. On peut à partir de $P$ définir une r-chaîne à laquelle appartiennent comme termes particuliers tous les *sommets* de $P$ : il est nécessaire et suffisant pour cela d'introduire arbitrairement $\lambda$ nouveaux éléments de **T**, distincts ou non, sommets de $P$ ou non, mais dont chacun appartienne à un côté de $P$. Or la réunion des côtés de $P$ se compose manifestement, si $\sum_i y_i = \eta$ et $\sum_i y'_i = \eta'$, de $\eta - \eta' + 1$ éléments de $T$ ; on en déduit aisément que les $\lambda$ nouveaux éléments peuvent être affectés aux $\eta - \eta' + 1$ positions possibles de $C^{\eta-\eta'}_{\eta-\eta'+\lambda}$ manières distinctes.

Il apparaît finalement ainsi que, pour $Y$ et $Y'$ donnés, on a:

$$w_r = \theta_r + C^{\eta-\eta'}_{\eta-\eta'+1}\,\theta_{r-1} + C^{\eta-\eta'}_{\eta-\eta'+2}\,\theta_{r-2} + \dots + C^{\eta-\eta'}_{\eta-\eta'+r}\,\theta_o \qquad (8)$$

Ces relations se résolvent aisément par rapport aux $\theta_r$, par exemple en remarquant que (8) entraîne la propriété suivante des fonctions génératrices :

$$\sum_{r\geqslant o} w_r\, t^r = \frac{1}{(1-t)^{\eta-\eta'+1}} \sum_{r\geqslant o} \theta_r\, t^r$$

D'où la solution générale du problème :

$$\theta_r(Y\,,\ Y') = \sum_{k=o}^{r} (-1)^k\, C^k_{\eta-\eta'+1}\, w_{r-k}(Y\,,\ Y') \qquad (9)$$

formule dans laquelle les $w_{r-k}$ sont bien entendu précalculés à l'aide des déterminants mentionnés plus haut.

*Exemple numérique :* si $Y' = (220)$ et $Y = (544)$ le calcul direct, par la méthode donnée en [3], fournit $f(Y\,,\ Y') = 288$. Le tableau ci-dessous montre, dans la dernière colonne, calculée à l'aide de (9), la décomposition de ces 288 suivant la formule (1) :

| $r$ | $w_r$ | $\theta_r$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 34 | 24 |
| 2 | 400 | 105 |
| 3 | 2.710 | 120 |
| 4 | 13.006 | 36 |
| 5 | 49.224 | 2 |

## 4 - CAS PARTICULIERS ET CONSEQUENCES

Certaines applications particulières du résultat qui précède donnent lieu à des remarques intéressantes.

1/ Si l'on définit $Y$ et $Y'$ par les formules (2) avec tous les $\alpha_i$ égaux à $1$, le problème est le problème d'Euler, cas particulier le plus simple du problème de Simon Newcomb : parmi les $h\,!$ permutations des entiers $1, 2, \ldots, h$, combien y en a-t-il qui présentent $r$ fois une décroissance (retour en arrière) entre deux termes consécutifs ? Les $\theta_r$ de la réponse sont alors les *nombres d'Euler* qui ont été abondamment étudiés (cf. par exemple [1]) ; une table de ces nombres d'Euler jusqu'à $h = 10$ est donnée dans [5]. Or dans ce cas le déterminant qui exprime $w_r(Y , Y')$ est d'un calcul immédiat puisque tous ses éléments sous-diagonaux sont nuls : on obtient :

$$w_r(Y , Y') = (r+1)^h$$

Les égalités (8) et (9), avec $\eta - \eta' = h$, permettent ainsi de retrouver deux propriétés bien connues des nombres d'Euler

2/ Si l'on se contente, dans les formules (2), de prendre tous les $\alpha_i$ égaux à un même entier naturel $\alpha$, on a, comme on dit, le problème de Simon Newcomb "avec la spécification $\alpha^h$". De même que précédemment, le déterminant qui exprime $w_r$ se réduit à son produit diagonal, et l'on obtient :

$$w_r = \binom{r+\alpha}{\alpha}^h$$

$\eta - \eta'$ est égal à $\alpha h$, et les formules (8) et (9) expriment des résultats établis par Worpitzky [6].

Remarquons que, contrairement à la méthode générale de résolution du problème de Simon Newcomb mentionnée par Riordan [5], la méthode indiquée ci-dessus n'exige pas la possession (ou la formation) préalable d'une table des nombres d'Euler.

3/ Si les deux suites de Young $Y$ et $Y'$ n'ont l'une et l'autre que deux termes non nuls, $Y = (a , b)$ et $Y' = (a' , b')$, le calcul de $\theta_r(Y , Y')$ peut s'effectuer sans passage préalable par les $w_r(Y , Y')$, du fait que $\theta_r$ est donné par l'expression condensée :

$$\theta_r = C^r_{a-a'}\, C^r_{b-b'} - C^{r+1}_{b-a'+1}\, C^{r-1}_{a-b'-1} \; ; \qquad (10)$$

cette expression est assez facile à justifier par récurrence sur $a + b - a' - b'$, en remontant à la signification combinatoire du problème, car les seuls retours en arrière possibles dans ce cas font suivre un accroissement du deuxième terme d'un accroissement du premier. Si l'on particularise encore en faisant $b = a = n + 1$ et $a' = b' = 0$, on obtient

$$\theta_r = \left(C^r_{n+1}\right)^2 - C^{r+1}_{n+2}\, C^{r-1}_{n}$$

$$= \frac{n\,!\,(n+1)\,!}{r\,!\,(r+1)\,!\,(n-r)\,!\,(n-r+1)\,!}$$

$$= \frac{(r+s)\,!\,(r+s+1)\,!}{r\,!\,(r+1)\,!\,s\,!\,(s+1)\,!} = c_{r,s} \qquad (s = n - r) \qquad (11)$$

La fonction (11) de $r$ et $s$, rencontrée notamment par Narayana [4], est tabulée ci-dessous pour $r + s \leqslant 7$ :

| | s = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r = 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | |
| 2 | 1 | 6 | 20 | 50 | 105 | 196 | | |
| 3 | 1 | 10 | 50 | 175 | 490 | | | |
| 4 | 1 | 15 | 105 | 490 | | | | |
| 5 | 1 | 21 | 196 | | | | | |
| 6 | 1 | 28 | | | | | | |
| 7 | 1 | | | | | | | |

Elle possède un certain nombre de propriétés remarquables, notamment que :

$$\sum_{r=0}^{n} c_{r,n-r} = \frac{(2n+2)\,!}{(n+1)\,!\,(n+2)\,!}$$

(ce qui résulte presque immédiatement de la définition des $c$) et que, sous réserve de convergence :

$$\sum_{\substack{r\geq 0 \\ s\geq 0}} c_{r,s}\, u^r v^s = \frac{1 - u - v - \sqrt{1 - 2(u+v) + (u-v)^2}}{2uv}$$

résultat qui est énoncé sans démonstration complète dans [4] et qui ne paraît pas facile à établir par un procédé purement analytique .

Mais l'égalité (8) donne ici un résultat supplémentaire, du fait que $w_r$ (comme il est facile de s'en assurer en développant le déterminant d'ordre 2 correspondant) est précisément égal à $c_{r,n}$ . On obtient ainsi l'identité remarquable :

$$c_{r,n} = c_{r,n-r-1} + \binom{2n+1}{2n} c_{r-1,n-r} + \binom{2n+2}{2n} c_{r-2,n-r+1} + \cdots + \binom{2n+r}{2n} c_{0,n-1}.$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CARLITZ and RIORDAN - Congruences for Eulerian numbers , *Duke Math. Journal* , vol. 20 (1953), pp. 339-344

[2] FRAME, ROBINSON, THRALL - The hook graphs of the symmetric groups, *Canadian J. of Math.*, vol. 6 (1954), pp. 316-323

[3] KREWERAS,G. - Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. Cahiers du B. U. R. O. , n° 6, Paris (1965), pp. 15-67.

[4] NARAYANA and SATHE - Minimum variance unbiased estimation in coin tossing problems, *Sankhya*, A, vol. 23, 2 (1961), pp. 183-186

[5] RIORDAN,J. - An introduction to Combinatorial Analysis ; Wiley , New-York (1958), pp. 216-219.

[6] WORPITZKY,J. - Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *Journal f. reine u. ang. Math.*, vol. 94 (1883), pp. 203-232.

[7] YOUNG,A. - On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2), vol. 28 (1927), pp. 255-292