CAHIERS DU BURO

CLAUDE REBOUL

Un exemple de processus ponctuel à évolution markovienne

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 11 (1967), p. 27-49

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1967__11__27_0>

UN EXEMPLE DE PROCESSUS PONCTUEL A ÉVOLUTION MARKOVIENNE

par

Claude REBOUL

Pages

INTRODUCTION

Dans le premier paragraphe de cet article, nous montrons comment il est possible de retrouver la définition classique des processus ponctuels unidimensionnels (par les intervalles) à partir de la fonction conditionnelle d'intensité, en dégageant l'aspect plus dynamique de ce point de vue.

Dans les paragraphes suivants, nous nous consacrons à la construction et à l'étude d'un modèle stochastique défini par sa fonction d'intensité.

Précisons tout de suite que les processus ponctuels dont il sera question sont du type unidimensionnel, simple, permanent et continu en probabilité (cf. Girault, article précédent, II). De plus, nous supposons que ces processus se développent à partir d'une origine O finie.

Nous prenons comme définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Cette définition nous a semblé mieux adaptée à l'étude du modèle considéré que la définition habituellement utilisée en France car elle nous permet une écriture simple et cohérente des formules.

1 - GENERALITES

1 - Résultat fondamental

Proposition 1 :

Soit (t_i) $(i = 1, 2, \dots)$ un processus ponctuel, non stationnaire, dont la fonction de répartition conditionnelle du $(n+1)$ème intervalle, connaissant t_n, est :

$$P(X_{n+1} \leqslant x/t_n) = F(t_n, x) \tag{1}$$

avec $F(t_n, x) \geqslant 0$, $n = (1, 2, \dots)$. Nous supposons que $F(t, x)$ est continue par rapport au couple (t, x) et qu'elle possède une densité par rapport à x pour tout t : $f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$. Dans ces conditions, il existe alors une fonction $A(t, x)$, continue par rapport au couple (t, x) monotone croissante par rapport à x, non bornée quand x tend vers l'infini, ceci quel que soit t, et telle que :

$$F(t_n, x) = 1 - e^{-[A(t_n, x) - A(t_n, 0)]} \tag{2}$$

En effet, évaluons de deux manières la probabilité de l'événement "$x < X_{n+1} \leqslant x + dx$", connaissant t_n.

En désignant par $a(t_n, x)$ le taux de mortalité de X_{n+1} au-delà de x (ou fonction conditionnelle d'intensité en (t_n, x)), nous pouvons écrire :

$$f(t_n, x)dx = [1 - F(t_n, x)]\, a(t_n, x)dx \tag{3}$$

soit :

$$a(t_n, x)dx = -\, d \operatorname{Log}[1 - F(t_n, x)] \tag{4}$$

par intégration nous obtenons :

$$A(t_n, x) = -\operatorname{Log} C(t_n)\,[1 - F(t_n, x)] \tag{5}$$

où $C(t_n)$ représente la constante d'intégration par rapport à x.

De la relation précédente nous déduisons :

$$1 - F(t_n, x) = \frac{1}{C(t_n)}\, e^{-A(t_n, x)} \tag{6}$$

Déterminons $C(t_n)$ en écrivant que F est telle que $F(t\ ,\ 0) = 0$ quel que soit t ; nous trouvons $C(t_n) = e^{-A(t_n,0)}$ d'où :

$$F(t_n\ ,\ x) = 1 - e^{-[A(t_n,x)-A(t_n,0)]} \tag{2}$$

Les propriétés de la fonction A sont quasi évidentes ; précisons seulement que c'est la condition $F(t\ ,\ +\infty) = 1$ quel que soit t qui implique que $A(t\ ,\ x)$ devienne infinie avec x. Remarquons que cette dernière n'intervient dans la relation (2) que par la différence de ses valeurs en deux points ; il est donc toujours possible de lui ajouter une constante de sorte que sa valeur à l'origine $A(0\ ,\ 0)$ soit nulle.

Il est facile d'établir la loi de probabilité de la durée de survie de X_{n+1} au-delà de la valeur u déjà atteinte. Posons $X_{n+1} = u + Y_{n+1}$, nous avons :

$$P(X_{n+1} > x) = P(X_{n+1} > u) \times P(Y_{n+1} > x - u/X_{n+1} > u) \tag{7}$$

d'où :

$$P(Y_{n+1} \leqslant x - u/X_{n+1} > u) = 1 - e^{-[A(t_n,x)-A(t_n,u)]} \tag{8}$$

Ce résultat est évidemment conditionnel à l'hypothèse : t_n donné.

2 - Cas particuliers

a) Si la fonction $A(t\ ,\ x)$ ne dépend des deux variables t et x que par leur somme, elle est nécessairement symétrique par rapport à ces dernières et constante sur les droites d'équation $t + x = Cte$. Il s'ensuit que $A(t\ ,\ x)$ présente par rapport à t les mêmes propriétés que par rapport à x et que $A(t_n\ ,\ x) = A(t_n + x\ ,\ 0)$. Sa connaissance dans le quadrant $(t\ ,\ x) \geqslant 0$ est alors entièrement définie par celle sur l'un des axes de coordonnées, celui des t par exemple. Pour simplifier l'écriture, nous noterons $A(t\ ,\ 0) = A(t)$.

La relation (2) s'écrit :

$$F(t_n\ ,\ x) = 1 - e^{-[A(t_n+x)-A(t_n)]} \tag{9}$$

et s'identifie avec celle donnant la loi conditionnelle des intervalles dans le processus général de Poisson de densité $a(t)$.

b) Si maintenant la fonction $A(t\ ,\ x)$ ne dépend que de x , il suffit de la connaître sur l'axe des x ; nous noterons alors $A(0\ ,\ x) = A(x)$.

Dans ce cas, la relation (2) caractérise le processus de renouvellement dont la loi commune des intervalles est :

$$F(x) = 1 - e^{-[A(x)-A(0)]} = 1 - e^{-A(x)} \tag{10}$$

car $A(0) = 0$

3 - Exemple d' application

En nous plaçant dans le cas b) ci-dessus, prenons pour différentes formes de la fonction conditionnelle d'intensité, les fonctions suivantes :

$$a_1(x) = 1 \qquad a_2(x) = \frac{x}{1+x} \dots$$

$$a_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!\left[1 + x + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right]} \tag{11}$$

Les intégrales correspondantes, nulles pour $x = 0$, sont :

$$A_1(x) = x \qquad A_2(x) = x - \mathrm{Log}(1+x) \dots$$

$$A_k(x) = x - \mathrm{Log}\left[1 + x + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right] \tag{12}$$

Les fonctions F_k qui leur sont associées par la relation (10) valent :

$$F_1(x) = 1 - e^{-x} \qquad F_2(x) = 1 - e^{-x}(1+x) \dots$$

$$F_k(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \tag{13}$$

Nous reconnaissons là les fonctions de répartition des diverses lois $\gamma_k(1)$ $(k = 1, 2, \dots)$ qui peuvent servir à définir le processus uniforme de Poisson $(k = 1)$ et les processus d'Erlang $(k \geq 2)$.

Cet exemple montre comment, étant donné un processus de renouvellement, il est équivalent de le définir par la loi commune des intervalles ou par la fonction conditionnelle d'intensité. Ce dernier point de vue peut être intéressant dans certaines applications où l'on cherche à représenter un processus ponctuel concret par un modèle de renouvellement par exemple. Il peut se faire que la loi de probabilité des intervalles ne s'impose pas de façon naturelle et même, qu'il soit difficile de la pressentir alors que la détermination du taux de mortalité peut s'avérer plus aisée. De toute manière, la considération de cette dernière est instructive en elle-même, par l'information qu'elle apporte sur l'enchaînement des événements E_n dont les instants de réalisation forment les points du processus ponctuel.

En particulier, si la suite (t_i) forme un processus d'Erlang-2, la fonction $a_2(x)$ croît avec x ; autrement dit, sachant qu'au temps $t_n + x$ l'événement E_{n+1} ne s'est pas encore produit, il est d'autant plus probable qu'il se produise dans $]t_n + x , t_n + x + dx]$ que x est plus grand. Au contraire, dans un processus uniforme de Poisson, et sous la même condition, E_{n+1} peut se produire de manière équiprobable dans tout intervalle élémentaire $]t_n + x , t_n + x + dx]$ quel que soit x. Cela illustre la différence de structure intime entre le processus uniforme de Poisson d'une part et les processus d'Erlang d'autre part, bien que ces derniers puissent paraître comme une généralisation du premier.

4 - Remarque importante

Au prix d'une complication d'écriture, il est possible d'étendre la validité de la proposition 1 aux cas où la fonction d'intensité dépend d'autres paramètres que t_n. Si à l'instant $t = t_n + x$, $a(\dots)$ est de la forme $a(y , x)$ où $y = t_n - t_{n-1}$ est la longueur du dernier intervalle réalisé, le processus correspondant est du type de Wold : les intervalles consécutifs sont liés en chaîne de Markov homogène. Si en $t = t_n + x$, $a(\dots)$ est de la forme $a_n(t)$ où n est le nombre de points déjà obtenus sur $[0 , t]$, le modèle correspondant est du type de Polya : la loi de probabilité d'un intervalle dépend du rang et de l'origine de celui-ci. Le processus que nous étudions dans la suite appartient à cette dernière classe, mais présente des particularités intéressantes.

2 - HYPOTHESES GENERALES

t étant un instant donné, notons $N(t)$ la fonction aléatoire représentant le nombre de points du processus tombant dans l'intervalle $[0 , t]$. Supposons que $N(t) = n$ et soient $t_1 , t_2 , \dots , t_n$ les n premiers points du processus avec $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n \leqslant t$. Supposons aussi que ce dernier est évolutif et possède une mémoire rapportée au paramètre $N(t)$ et que, plus précisément, conditionnellement à l'hypothèse $N(t) = n$, la probabilité pour que le $(n + 1)^{\text{ème}}$ point tombe dans $]t , t + dt]$, vaut :

$$a_n(t)\,dt = \frac{(n + 1)\,dt}{t} \qquad (n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad t \geqslant t_1 > 0) \tag{14}$$

Remarquons que cette fonction d'intensité $\frac{n+1}{t}$ représente l'inverse de la longueur moyenne des $n + 1$ intervalles t_1, $t_2 - t_1$, ..., $t_n - t_{n-1}$, $t - t_n$ et que chacun figure avec le même poids. Nous "lançons" le processus en nous donnant la loi de probabilité du premier intervalle, $f_1(t)\,dt$, dont nous supposons l'existence du premier moment au moins.

3 - LOI CONDITIONNELLE DES INTERVALLES

1 - Loi de X_{n+1}

Cherchons d'abord la fonction de répartition conditionnelle de X_{n+1}, connaissant t_n :

$$P(X_{n+1} \leqslant x/t_n) = F_{n+1}(t_n\,,\,x)\,. \tag{15}$$

En vertu de la proposition 1 (cas particulier a) et de la remarque du 4e, nous avons, compte-tenu de (14) :

$$F_{n+1}(t_n\,,\,x) = 1 - e^{-(n+1)\left[\mathrm{Log}(t_n+x)-\mathrm{Log}(t_n)\right]} = 1 - \left(\frac{t_n}{t_n + x}\right)^{n+1}$$

$$(n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad x \geqslant 0\,,\ t_n > 0) \tag{16}$$

Précisons que nous appliquons la proposition 1 à la fonction $A(t) = (n + 1)(\mathrm{Log}\,t - \mathrm{Log}\,t_1)$ définie seulement dans l'intervale $[t_1, +\infty]$ avec $t_1 > 0$; cela n'en restreint pas la validité car nous aurions pu faire la démonstration en supposant $t \geqslant m > 0$, $x \geqslant 0$ et $A(m, 0) = 0$.

Par dérivation de la formule (16), nous obtenons la loi élémentaire conditionnelle de X_{n+1} :

$$f_{n+1}(t_n\,,\,x)dx = \frac{(n+1)(t_n)^{n+1}\,dx}{(t_n + x)^{n+2}} \tag{17}$$

Par le changement de variable $V_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{t_n}$, la relation précédente devient :

$$P(v < V_{n+1} \leqslant v + dv/t_n) = \frac{(n+1)dv}{(1+v)^{n+2}} = f_{n+1}(1\,,\,v)\,dv \quad \begin{matrix}(n \geqslant 1)\\(v \geqslant 0)\end{matrix} \tag{18}$$

Calculons $E(V_{n+1})$. Nous avons en intégrant par parties :

$$\int_0^{\infty} \frac{v\,dv}{(1+v)^{n+2}} = \left[\frac{-v}{(n+1)(1+v)^{n+1}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{dv}{(n+1)(1+v)^{n+1}} =$$

$$= \left[\frac{-1}{n(n+1)(1+v)^n}\right]_0^{\infty} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \qquad (n \geqslant 1)$$

En effet, pour ces valeurs de n, la partie toute intégrée est nulle ainsi que la limite de $\frac{1}{(1+v)^n}$ quand v tend vers $+\infty$.

En tenant compte du coefficient $n+1$ négligé dans ce calcul, nous trouvons pour l'espérance cherchée :

$$E(V_{n+1}) = \frac{1}{n}$$

soit en revenant à X_{n+1} :

$$E(X_{n+1}) = t_n\, E(V_{n+1}) = \frac{t_n}{n} \qquad (n \geqslant 1) \tag{20}$$

d'où :

Proposition 2 :

Dans le processus envisagé, l'espérance mathématique conditionnelle du $(n+1)$ème intervalle X_{n+1}, connaissant t_n, est égale à la valeur moyenne de la longueur des n premiers.

2 - Loi de $S_k^{(n)}$.

Posons $S_k^{(n)} = \sum_1^k X_{n+i}$ et cherchons la loi élémentaire conditionnelle de $S_2^{(n)}$. Pour cela, écrivons la loi élémentaire conditionnelle du couple : (X_{n+1}, X_{n+2}).

$$P\,[x_1 < X_{n+1} \leqslant x_1 + dx_1\ ,\ x_2 < X_{n+2} \leqslant x_2 + dx_2 / t_n] =$$

$$P\,[x_1 < X_{n+1} \leqslant x_1 + dx_1/t_n\ ,\ x_2 < X_{n+2} \leqslant x_2 + dx_2/t_{n+1}] =$$

$$\frac{(n+1)(t_n)^{n+1}\,dx_1}{(t_n+x_1)^{n+2}} \times \frac{(n+2)(t_n+x_1)^{n+2}\,dx_2}{(t_n+x_1+x_2)^{n+3}} = \frac{(n+1)(n+2)(t_n)^{n+1}\,dx_1 dx_2}{(t_n+x_1+x_2)^{n+3}} . \tag{21}$$

Selon la méthode classique, nous en déduisons en posant $s = x_1 + x_2$:

$$P\,[s < S_2^{(n)} \leqslant s + ds/t_n] = \frac{(n+1)(n+2)(t_n)^{n+1}\,ds}{(t_n + s)^{n+3}} \int_0^s dx_1$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(t_n)^{n+1}\,s\,ds}{(t_n + s)^{n+3}} \qquad (22)$$

En itérant ce calcul, nous pouvons écrire la loi élémentaire du couple $(S_2^{(n)}, X_{n+3})$ en faisant le changement d'écriture $s = y$ dans la loi de $S_2^{(n)}$ pour conserver l'analogie de forme des résultats :

$$P\,[y < S_2^{(n)} \leqslant y + dy \;,\; x_3 < X_{n+3} \leqslant x_3 + dx_3/t_n] =$$

$$P\,[y < S_2^{(n)} \leqslant y + dy/t_n \;,\; x_3 < X_{n+3} \leqslant x_3 + dx_3/t_{n+2}] =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(t_n)^{n+1}\,y\,dy\,dx_3}{(t_n + y + x_3)^{n+4}} \qquad (23)$$

Nous en déduisons la loi de $S_3^{(n)}$ en posant $s = y + x_3$:

$$P\,[s < S_3^{(n)} \leqslant s + ds/t_n] = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(t_n)^{n+1}\,ds}{(t_n + s)^{n+4}} \int_0^s y\,dy$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(t_n)^{n+1}\,s^2\,ds}{2(t_n + s)^{n+4}} \qquad (24)$$

Ainsi de proche en proche il est possible d'établir la loi conditionnelle de $S_k^{(n)}$:

$$P\,[s < S_k^{(n)} \leqslant s + ds/t_n] = f_k^{(n)}(t_n, s)\,ds = \frac{(n+1)\ldots(n+k)(t_n)^{n+1}\,s^{k-1}\,ds}{(k-1)!\,(t_n + s)^{n+k+1}}$$

$$(\text{avec } n \geqslant 1 \;,\; k \geqslant 1) \qquad (25)$$

Effectuons le changement de variable $V_k^{(n)} = \dfrac{S_k^{(n)}}{t_n}$; la relation précédente devient alors :

$$P\,[v < V_k^{(n)} \leqslant v + dv/t_n] = \frac{(n+1)\ldots(n+k)\,v^{k-1}\,dv}{(k-1)!\,(1+v)^{n+k+1}} = f_k^{(n)}(1, v)\,dv \qquad (26)$$

En multipliant haut et bas par $n!$ les termes du second membre de cette relation, son coefficient devient : $\dfrac{(n+k)!}{n!\,(k-1)!}$ et n'est autre que la valeur du symbole $\dfrac{1}{\beta(k, n+1)}$.

En définitive (26) s'écrit donc :

$$P\ [v < V_k^{(n)} \leqslant v + dv/t_n] = \frac{1}{\beta(k\ ,\ n+1)}\ \frac{v^{k-1}\,dv}{(1+v)^{k+n+1}} \qquad \begin{matrix}(n \geqslant 1)\\ (k \geqslant 1)\\ (v \geqslant 0)\end{matrix} \qquad (27)$$

D'où :

Proposition 3 :

La loi élémentaire conditionnelle, connaissant t_n , du quotient par t_n , de la somme de k intervalles consécutifs portés à partir de t_n , est la loi eulérienne $\beta_2(k\ ,\ n+1)$.

Dès l'établissement de la formule (17) nous aurions pu écrire $n+1 = \dfrac{1}{\beta(1\ ,\ n+1)}$ et donner la proposition précédente pour $k = 1$; mais cette remarque eut été alors artificielle.

Il est aisé d'établir que le moment d'ordre r d'une variable aléatoire suivant la loi $\beta_2(p\ ,\ q)$ $p\ ,\ q = 1\ ,\ 2\ \ldots$ vaut :

$$E\,[V^r] = \frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{(q-1)\,(q-2)\ldots(q-r)} \qquad r = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots, q-1$$

En faisant $p = k$ et $q = n+1$ nous obtenons :

$$E\ [S_k^{(n)}] = t_n\ E\,[V_k^{(n)}] = \frac{k\ t_n}{n} \qquad (n \geqslant 1)$$

et (28)

$$V\ [S_k^{(n)}] = \frac{k\ t_n^2}{n^2} \times \frac{n+1}{n-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

Remarquons que les principales formules de ce paragraphe sont encore valables pour un instant t quelconque mais tel que $N(t) = n$. En effet si $t = t_n + u$, la formule (8) montre que la loi de survie de X_{n+1} au-delà de u , est ici :

$$P\ [Y_{n+1} \leqslant y/X_{n+1} > u\,] = 1 - \left(\frac{t}{t+y}\right)^{n+1} \qquad (29)$$

en posant $X_{n+1} = u + Y_{n+1}$.

Et nous pouvons écrire, à cause de l'analogie de forme avec $F_{n+1}(t_n\ ,\ x)$ et en posant $S_k^{(n,\,t)} = Y_{n+1} + \sum_2^k X_{n+i}$:

$$P\,[s < S_k^{(n,t)} \leqslant s + ds / N(t) = n] = f_k^{(n)}(t\,,\,s)\,ds\,. \tag{30}$$

Nous allons utiliser cette propriété au paragraphe suivant.

4 - LOI CONDITIONNELLE DU NOMBRE DE POINTS TOMBANT DANS UN INTERVALLE DONNE

Notons $K(t\,,\,t+h)$ le nombre aléatoire de points tombant dans $]t\,,\,t+h]$ et :

$$P_k^{(n)}(t\,,\,h) = P\,[K(t\,,\,t+h) = k / N(t) = n]\,. \tag{31}$$

Posons aussi :

$$\pi_k^{(n)} = \sum_{k}^{\infty} P_i^{(n)}(t\,,\,h)\,. \tag{32}$$

Pour évaluer $\pi_k^{(n)}$ remarquons que l'événement "il y a au moins k points sur $]t\,,\,t+h]$" est équivalent à l'événement "$s < S_k^{(n,t)} \leqslant s + ds$, quel que soit s variant de 0 à h".

Nous avons donc :

$$\pi_k^{(n)} = \int_0^h f_k^{(n)}(t\,,\,s)\,ds = \int_0^h \frac{1}{\beta(k\,,\,n+1)}\,\frac{t^{n+1}\,s^{k-1}}{(t+s)^{n+k+1}}\,ds \tag{33}$$

Intégrons par parties en posant $x = (t+s)^{-n-k-1}$ et $dy = \dfrac{s^{k-1}ds}{(k-1)!}$ d'où : $dx = -(n+k+1)(t+s)^{-n-k-2}\,ds$.

$$y = \frac{s^k}{k!}$$

Nous trouvons ainsi :

$$\pi_k^{(n)} = \left[\frac{(n+k)!\;t^{n+1}\,s^k}{n!\;k!\;(t+s)^{n+k+1}}\right]_0^h + \int_0^h \frac{(n+k+1)!\;t^{n+1}\,s^k\,ds}{n!\;k!\;(t+s)^{n+k+2}} \tag{34}$$

$$= C_{n+k}^k\,\frac{t^{n+1}\,h^k}{(t+h)^{n+k+1}} + \pi_{k+1}^{(n)}$$

Nous en tirons la probabilité cherchée :

$$P_k^{(n)} = \pi_k^{(n)} - \pi_{k+1}^{(n)} = C_{n+k}^k\,\frac{t^{n+1}\,h^k}{(t+h)^{n+k+1}} \quad \begin{matrix}(n \geqslant 1)\\(k \geqslant 1)\end{matrix} \tag{35}$$

Comme pour $k = 0$ cette dernière expression coïncide avec celle de $P_o^{(n)}$ calculée directement :

$$P_o^{(n)} = 1 - P\,[Y_{n+1} > h/N(t) = n] = \left(\frac{t}{t+h}\right)^{n+1},$$

nous pouvons étendre sa validité à toutes les valeurs de k positives ou nulles.

La formule (35) n'est valable que pour $n \geqslant 1$; pour $n = 0$ nous avons, pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} P_k^{(0)}(t\,,\,h) &= \frac{1}{1 - F_1(t)} \int_t^{t+h} f_1(t_1)\; P_{k-1}^{(1)}(t_1\,,\,t+h-t_1)\,dt_1 \\ &= \frac{k}{[1 - F_1(t)]\,[t+h]^{k+1}} \int_t^{t+h} f_1(t_1)\,t_1^2\,(t+h-t_1)^{k-1}\,dt_1 \end{aligned} \tag{36}$$

$$P_o^{(0)}(t\,,\,h) = \frac{1 - F_1(t+h)}{1 - F_1(t)} \tag{37}$$

L'expression $\dfrac{f_1(t_1)}{1 - F_1(t)}$ représente la densité conditionnelle de survie de X_1 au-delà de l'instant t supposé atteint.

Le domaine de variation du couple $[N(t)\,,\,K(t\,,\,t+h)]$ étant rectangulaire, ce qui signifie que ces variables ne sont liées par aucune contrainte algébrique, nous devons vérifier que les nombres $P_k^{(n)}(t\,,\,h)$ forment bien une loi de probabilité c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k^{(n)}(t\,,\,h) = 1$ quels que soient $n\,,\,t\,,\,h$ donnés avec $n \geqslant 1$, t et $h > 0$. Démontrons-le.

A l'aide du changement de variable $v = \dfrac{h}{t}$, l'expression de de $P_k^{(n)}(t\,,\,h)$ devient :

$$P_k^{(n)}(v) = C_{n+k}^k \frac{v^k}{(1+v)^{n+k+1}} = \frac{(k+n)(k+n-1)\ldots(k+1)\,u^k}{n!\,(1+v)^{n+1}} \tag{38}$$

en posant $u = \dfrac{v}{1+v}$. Nous avons évidemment $0 < u < 1$ quel que soit v fini. Remarquons alors que

$$(k+n)(k+n-1)\ldots(k+1)\,u^k = \frac{d^n\,(u^{k+n})}{du^n}$$

de sorte que nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(n)} = \frac{1}{n!\,(1+v)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n\,(u^{k+n})}{du^n} = \frac{1}{n!\,(1+v)^{n+1}} \frac{d^n}{du^n} \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+n} \quad (39)$$

Il est en effet possible d'intervertir les opérations de sommation et de dérivation car la série considérée est une série géométrique convergente. Au lieu de calculer directement $\frac{d^n}{du^n}\sum_{k=0}^{\infty} u^{k+n}$, utilisons le fait que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u^{k+n}$ a même dérivée $n^{\text{ème}}$ que la série $\sum_{j=0}^{\infty} u^j$ dont elle ne diffère que par des termes de degré $n-1$ au plus. Nous avons donc :

$$\frac{d^n}{du^n} \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+n} = \frac{d^n}{du^n} \sum_{j=0}^{\infty} u^j = \frac{d^n}{du^n}\, \frac{1}{1-u} = \frac{n!}{(1-u)^{n+1}} .$$

En repassant à la variable v : $\frac{d^n}{du^n}\sum_{k=0}^{\infty} u^{k+n} = n!\,(1+v)^{n+1}$ et en reportant dans (39) nous trouvons : $\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(n)}(v) = 1$.

Pour $n = 0$, il suffit d'utiliser le calcul précédent pour s'assurer que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(0)}(t\,,\,h) = 1 .$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(0)} &= P_0^{(0)} + \frac{1}{1-F_1(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_t^{t+h} f_1(t_1)\, P_{k-1}^{(1)}(t_1\,,\,t+h-t_1)\, dt_1 \\
&= P_0^{(0)} + \frac{1}{1-F_1(t)} \int_t^{t+h} f_1(t_1) \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}^{(1)}(t_1\,,\,t+h-t_1)\, dt_1 \quad (40) \\
&= \frac{1-F_1(t+h)}{1-F_1(t)} + \frac{1}{1-F_1(t)}\,[F_1(t+h) - F_1(t)] = 1
\end{aligned}$$

Résumons ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 4 :

Sachant que $N(t) = n$ $(n \geqslant 1)$, la loi de probabilité conditionnelle du nombre aléatoire de points tombant dans l'intervalle

$]t\,,\,t+h]$ ne dépend que du rapport $v = \frac{h}{t}$ et est donnée par la suite des nombres $P_k^{(n)}(v)$:

$$P_k^{(n)}(v) = C_{n+k}^{k} \frac{v^k}{(1+v)^{n+k+1}} \qquad \begin{array}{l}(n \geqslant 1)\\ (k \geqslant 0)\\ (t\,,\,h \text{ positifs finis})\end{array}$$

C'est la loi binomiale négative de paramètres $n+1$ et $\frac{1}{1+v}$.

Nous pouvons interpréter ces résultats d'une manière différente :

Proposition 5 :

La fonction aléatoire $N(t)$ forme un processus de Markov permanent, non homogène, à un nombre dénombrable d'états $1, 2, \ldots$ et dont la matrice de passage de l'état n à l'état $n+k$ entre les instants t et $t+h$ est donnée par les nombres $P_k^{(n)}(t\,,\,h)$.

Cherchons quelques caractéristiques de la loi (38) et, pour cela, calculons le moment factoriel d'ordre r :

$$\begin{aligned} E\,[K(K-1)\ldots(K-r+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} \frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)v^k}{(1+v)^{k+n+1}} \\ &= \frac{u^r}{n!\,(1+v)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)\ldots k(k-1)\ldots(k-r+1)\,u^{k-r} \end{aligned} \tag{41}$$

Par un calcul analogue au précédent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E\,[K(K-1)\ldots(K-r+1)] &= \frac{u^r}{n!\,(1+v)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n+r}}{du^{n+r}}\, u^{n+k} \\ &= \frac{u^r}{n!\,(1+v)^{n+1}} \frac{d^{n+r}}{du^{n+r}} \sum_{k=r}^{\infty} u^{n+k} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d^{n+r}}{du^{n+r}} \sum_{k=r}^{\infty} u^{n+k} = \frac{d^{n+r}}{du^{n+r}} \sum_{j=0}^{\infty} u^{j} = \frac{(n+r)!}{(1-u)^{n+r+1}}$$

Finalement nous trouvons :

$$\begin{aligned} E\,[K(K-1)\ldots(K-r+1)] &= \frac{(n+r)!\,u^r}{n!\,(1+v)^{n+1}\,(1-u)^{n+r+1}} \\ &= (n+1)\ldots(n+r)\,v^r \end{aligned} \tag{42}$$

En faisant $r = 1$ nous obtenons l'espérance mathématique :

$$E(K) = (n+1)\,v = (n+1)\,\frac{h}{t} \tag{43}$$

et de $r = 2$ nous déduisons la variance :

$$V(K) = (n+1)\,v(1+v) = (n+1)\,\frac{h(t+h)}{t^2} \tag{44}$$

Cherchons la fonction caractéristique conditionnelle de $K(t\,,\,t+h)$. Soit :

$$\varphi_k^{(n)}(u\,,\,t\,,\,h) = E\left[e^{iuK(t,\,t+h)}/N(t) = n\right]$$

Pour $n \geqslant 1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(n)}(v)\,e^{iuk} = \frac{1}{n!\,(1+v)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)\,(k+n-1)\ldots(k+1)\left(\frac{v\,e^{iu}}{1-v}\right)^k$$

$$= \frac{1}{(1+v-v\,e^{iu})^{n+1}} \tag{45}$$

En repassant au paramètre h nous obtenons :

$$\varphi_K^{(n)}(u\,,\,t\,,\,h) = \frac{t^{n+1}}{(t+h-h\,e^{iu})^{n+1}} \tag{46}$$

La fonction caractéristique conditionnelle de $\dfrac{K}{h}$ est :

$$\varphi_{\frac{K}{h}}^{(n)}(u\,,\,t\,,\,h) = \frac{t^{n+1}}{(t+h-h\,e^{iu/h})^{n+1}} \tag{47}$$

Cherchons-en la limite quand h tend vers l'infini :

$$h - h\,e^{\frac{iu}{h}} = h\left[1 - \left(1 + \frac{iu}{h} - \frac{u^2}{2h^2} + \ldots\right)\right] = -\,iu + \frac{u^2}{2h} - \ldots$$

quand $h \longrightarrow \infty$, cette expression tend vers $-iu$, et nous pouvons écrire :

$$\lim_{h\to\infty} \varphi_k^{(n)}(u\,,\,t\,,\,h) = \left(\frac{t}{t-iu}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{iu}{t}\right)^{n+1}} \tag{48}$$

Autrement dit, la loi limite de $\frac{K}{h}$ quand h tend vers l'infini est la loi $\gamma_{n+1}(t)$ pour $n \geqslant 1$.

Pour $n = 0$, nous trouvons :

$$\varphi_K^{(0)}(u, t, h) = P_0^{(0)}(t, h) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(0)}(t, h)\, e^{iuk} \tag{49}$$

$$= \frac{1 - F_1(t+h)}{1 - F_1(t)} + \frac{e^{iu}}{1 - F_1(t)} \int_t^{t+h} \frac{f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{[t_1 e^{iu} + (t+h)(1 - e^{iu})]^2}$$

la sommation s'effectuant par un calcul analogue au précédent.

5 - LOIS A PRIORI

1 - Loi a priori de la somme des k + 1 premiers intervalles

Nous avons déjà posé $S_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} X_{n+i}$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots)$ $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Pour trouver la loi de $S_{k+1}^{(0)}$, il suffit d'écrire que le premier point tombe dans $]t_1, t_1 + dt_1]$ et que, ceci étant, $S_k^{(1)}$ est comprise entre $s - t_1$ et $s + ds - t_1$, ceci quel que soit t_1 variant de 0 à s . En explicitant les probabilités de ces événements nous avons :

$$P[s < S_{k+1}^{(0)} \leqslant s + ds] = \frac{k(k+1)\, ds}{s^{k+2}} \int_0^s f_1(t_1)\, t_1^2\, (s - t_1)^{k-1}\, dt_1 \tag{50}$$

L'espérance a priori de $S_{k+1}^{(0)}$ vaut :

$$E[S_{k+1}^{(0)}] = E[X_1] + E[S_k^{(1)}] \tag{51}$$

Pour calculer $E[S_k^{(1)}]$ remarquons qu'il suffit d'intégrer l'espérance conditionnelle de $S_k^{(1)}$ dans la loi de X_1 . Or nous avons vu que cette dernière espérance valait kt_1 . Par conséquent :

$$E[S_k^{(1)}] = k \int_0^{\infty} f_1(t_1)\, t_1\, dt_1 = k\, E(X_1) \tag{52}$$

car nous avons supposé l'existence de cette intégrale.

Nous pouvons conclure que, d'une part :

$$E[S_{k+1}^{(0)}] = (k+1)\, E(X_1) \tag{53}$$

et que d'autre part :

$$E[X_{k+1}] = E[S_{k+1}^{(0)}] - E[S_k^{(0)}] = E(X_1) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (54)$$

Autrement dit, tous les intervalles X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ont même espérance a priori, à savoir $E(X_1)$.

2 - Loi a priori du nombre de points sur un intervalle donné.

Posons :

$$A_k(t, h) = P[K(t, t+h) = k] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (55)$$

Calculons d'abord cette loi pour l'intervalle $[0, t[$ et posons $k = n$.

Pour $n = 0$ nous avons évidemment :

$$A_o(0, t) = 1 - F_1(t) \qquad (56)$$

en désignant par $F_1(t)$ la fonction de répartition de X_1. Pour $n \geqslant 1$, le même raisonnement que pour la loi a priori de $S_{k+1}^{(0)}$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} A_n(0, t) &= \int_0^t f_1(t_1)\, P_{n-1}^{(1)}(t_1, t - t_1)\, dt_1 \\ &= \int_0^t f_1(t_1)\,(t - t_1)^{n-1}\, t_1^2\, dt_1 . \end{aligned} \qquad (57)$$

Le fait, déjà démontré, que $\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(n)} = 1$ entraîne que : $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(0, t) = F_1(t)$ car il est légitime d'intervertir les opérations de sommation et d'intégration. Compte-tenu de la valeur de $A_0(0, t)$, nous constatons que $\sum_0^{\infty} A_n(0, t) = 1$, c'est-à-dire que les nombres $A_n(0, t)$ forment une loi de probabilité.

Ce calcul préliminaire va nous permettre d'établir la loi a priori du nombre de points tombant dans $]t, t+h]$. Il faut encore distinguer les deux éventualités $k = 0$ et $k \geqslant 1$. L'événement $K(t, t+h) = 0$ est la réunion des deux événements qui s'excluent mutuellement : $K(t, t+h) = 0$ sachant que $N(t) \geqslant 1$, $K(t, t+h) = 0$ sachant que $N(t) = 0$. Ce dernier événement étant équivalent à $X_1 > t + h$, nous pouvons écrire :

$$A_o(t\ ,\ h) = 1 - F_1(t+h) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0\ ,\ t) \times P_o^{(n)}(t\ ,\ h)$$
$$= 1 - F_1(t+h) + \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{(t_1+h)^2} \qquad (58)$$

De même l'événement $K(t\ ,\ t+h) = k$ est la réunion des deux événements $K(t\ ,\ t+h) = k$ sachant que $N(t) \geqslant 1$, $K(t\ ,\ t+h) = k$ sachant que $N(t) = 0$. Ce dernier év nement signifie que le premier point tombe en t_1 quel que soit $t_1 \in]t\ ,\ t+h]$ et que $K(t_1,\ t+h) = k-1$ sachant que $N(t_1) = 1$.

Nous avons donc :

$$A_k(t\ ,\ h) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0\ ,\ t) \times P_k^{(n)}(t\ ,\ h) +$$
$$+ [1 - F_1(t)] \int_t^{t+h} f_1(t_1)\ P_{k-1}^{(1)}(t_1\ ,\ t+h-t_1)\,dt_1$$
$$= (k+1)\,h^k \int_o^t f_1(t_1) \frac{t_1^2\, dt_1}{(t_1+h)^{k+2}} +$$
$$+ k\,[1 - F_1(t)] \int_t^{t+h} f_1(t_1)\ \frac{t_1^2 (t+h-t_1)^{k-1}\, dt_1}{(t+h)^{k+1}} \qquad (59)$$

3 - Fonction caractéristique à priori de $K(t\ ,\ t+h)$ et de $N(t)$.

Posons :

$$\psi_K(u\ ,\ t\ ,\ h) = E\,[e^{iuK(t,t+h)}] \qquad (60)$$

Pour le calcul nous pouvons intégrer la fonction caractéristique conditionnelle de $K(t\ ,\ h)$ dans la loi a priori de $N(t)$. Cela donne :

$$\psi_K(u\ ,\ t\ ,\ h) = \sum_{n=o}^{\infty} A_n(0\ ,\ t)\ \varphi_K^{(n)}(u\ ,\ t\ ,\ h)$$

$$= A_o(0\ ,\ t)\ \varphi_K^{(0)}(u\ ,\ t\ ,\ h) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(t+h-he^{iu})^{n+1}} \int_o^t f_1(t_1)\, t_1^2 (t-t_1)^{n-1}\ dt_1$$

en distinguant $n = 0$ et $n \geqslant 1$ et en tenant compte des formules (46) et (57). En transformant la dernière sommation nous obtenons :

$$\int_o^t \frac{f_1(t_1)\, t_1^2}{(t+h-he^{iu})^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{(t-t_1)}{(t+h+he^{iu})}\right]^{n-1} dt_1 = \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{(t_1+h-he^{iu})^2} .$$

En explicitant $A_o(0\ ,\ t)$ et $\varphi_K^{(0)}$ nous trouvons finalement :

$$\psi_K(u\ ,\ t\ ,\ h) = 1 - F_1(t+h) + \int_t^{t+h} \frac{e^{iu} f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{[t_1 e^{iu} + (t+h)(1-e^{iu})]^2} + $$

$$+ \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{(t_1 + h - he^{iu})^2} \tag{61}$$

Par dérivation nous en déduisons l'espérance a priori de $K(t\ ,\ t+h)$

$$E\,[K(t\ ,\ t+h)] = -i\, \psi_K'(0\ ,\ t\ ,\ h) \tag{62}$$

$$= 2h \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, dt_1}{t_1} + 2(t+h) \int_t^{t+h} \frac{f_1(t_1)\, dt_1}{t_1} - \int_t^{t+h} f_1(t_1) dt_1$$

Pour que cette espérance soit finie, nous devons supposer que la fonction $f_1(t)$ est telle que $\int_o^t \frac{f_1(t_1)\, dt_1}{t_1}$ existe .

La fonction caractéristique a priori de $N(t)$ s'obtient en faisant $t = 0$ et $h = t$ dans la relation (61) :

$$\psi_N(u\ ,\ t) = 1 - F_1(t) + e^{iu} \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, t_1^2\, dt_1}{[t_1 e^{iu} + t(1-e^{iu})]^2} \tag{63}$$

Cela donne aussi :

$$E\,[N(t)] = 2t \int_o^t \frac{f_1(t_1)\, dt_1}{t_1} - F_1(t)\ . \tag{64}$$

6 - DEUX PROPRIETES REMARQUABLES

1 - Loi conditionnelle de $K(t+S\ ,\ t+S+T)$.

Soient $]t\ ,\ t+S]$ et $]t+S\ ,\ t+S+T]$ deux intervalles consécutifs de longueurs S et T . Cherchons la loi conditionnelle de $K(t+S\ ,\ t+S+T)$ sachant que $N(t) = n$. Ecrivons pour cela la loi du couple $[J(t\ ,\ t+S)\ ,\ K(t+S\ ,\ t+S+T)]$.

$$P_{j,k}^{(n)} = P\,[J = j\ ,\ K = k/N(t) = n]$$

$$= C_{n+j}^{j}\ \frac{t^{n+1}\,S^{j}}{(t+S)^{n+j+1}} \times C_{n+j+k}^{k}\ \frac{(t+S)^{n+j+1}\,T^{k}}{(t+S+T)^{n+j+k+1}}$$

$$= \frac{(n+j+k)!}{n!\ j!\ k!} \times \frac{t^{n+1}\,S^{j}\,T^{k}}{(t+S+T)^{n+j+k+1}} . \quad (j \text{ et } k \geqslant 0\ ,\ n \geqslant 1) \tag{65}$$

En posant $u = \frac{S}{t}$ et $v = \frac{T}{t}$ l'expression précédente devient :

$$P_{j,k}^{(n)} = \frac{(n+j+k)!}{n!\ j!\ k!} \times \frac{u^{j}\ v^{k}}{(1+u+v)^{n+j+k+1}} . \tag{66}$$

Pour obtenir la loi cherchée il suffit alors de sommer ces probabilités pour $j \geqslant 0$:

$$P\,[K(t+S\ ,\ t+S+T) = k/N(t) = n] = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,k}^{(n)}$$

$$= \frac{v^{k}}{n!\ k!\,(1+u+v)^{n+k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} (j+n+k)\ldots(j+1)\ w^{j} \tag{67}$$

avec $w = \dfrac{u}{1+u+v}$.

Ainsi que nous l'avons déjà fait plusieurs fois nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+n+k)\ldots(j+1)\ w^{j} = \frac{d^{n+k}}{dw^{n+k}}\left(\frac{1}{1-w}\right) = (n+k)!\ \left(\frac{1+u+v}{1+v}\right)^{n+k+1} \tag{68}$$

En tenant compte de cette relation la probabilité cherchée s'écrit :

$$P\,[K(t+S\ ,\ t+S+T) = k/N(t) = n] = C_{n+k}^{k}\ \frac{v^{k}}{(1+v)^{n+k+1}} \tag{69}$$

Nous pouvons donc conclure :

Proposition 6 :

Conditionnellement à l'hypothèse $N(t) = n$, la loi de probabilité du nombre de points tombant dans l'intervalle $]t+S\ ,\ t+S+T]$ est identique à celle du nombre de points tombant dans $]t\ ,\ t+T]$ quel que soit S ; autrement dit cette loi est stationnaire.

2 - Processus limite

Cherchons à quelles conditions le processus envisagé converge vers un processus limite. Supposons que la suite $\frac{t_n}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers $\frac{1}{c}$, $c > 0$. Cherchons la loi conditionnelle limite de X_{n+1} . Nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(t_n , x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,dx}{t_n\left(1+\frac{x}{t_n}\right)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,dx}{t_n\left(1+\frac{x}{n}\frac{n}{t_n}\right)^{n+2}} \tag{70}$$

$$= e^{-cx}\, c\, dx \ .$$

Donc, dans l'hypothèse faite, les intervalles X_i sont asymptotiquement indépendants et équidistribués suivant la loi $\gamma_1(c)$; autrement dit le processus limite est le processus uniforme de Poisson de densité c .

7 - CONCLUSION

L'hypothèse faite au paragraphe 2 et les propriétés établies aux paragraphes 3 et 4 montrent que le processus envisagé calque son évolution à partir d'un instant t sur celle antérieure à t , cette dernière étant résumée par la valeur de $N(t)$; les valeurs de t et de $N(t)$ constituant l'information disponible à l'instant considéré. Pour cette raison, nous pouvons dire qu'il s'agit d'un processus de mimétisme. Remarquons que le paramètre temps s'introduit très naturellement et joue un rôle essentiel qui nous a permis de construire un modèle évolutif relativement simple. Dans le cas où le premier intervalle suit la loi $\gamma_1(c)$, il serait intéressant de comparer ce processus avec, d'une part, le processus uniforme de Poisson de densité c , et d'autre part, le processus dans lequel la loi conditionnelle du $(n+1)^{\text{ème}}$ intervalle connaissant t est la loi $\gamma_1(c_n)$ avec $c_n = \frac{n}{t_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et la loi du premier intervalle $\gamma_1(c)$. Dans ce dernier processus, l'information connue à l'instant t se réduit à t_n et à $N(t)$, t_n désignant l'instant de réalisation du dernier événement avant t ; la densité c_n est alors l'estimation la plus récente de c tandis que dans le premier processus $\frac{1}{a_{n+1}(t)}$ représente une estimation continue de $\frac{1}{c}$. En modifiant la forme analytique de la fonction conditionnelle d'intensité a(t , x) et en y introduisant d'autres paramètres donnant une information sur le passé la proposition 1 permet de construire, théoriquement, autant de processus mais malheureusement les lois de probabilité de ces derniers sont souvent peu maniables. Parmi eux cependant les processus autorégulateurs méritent une attention particulière : à chaque instant (ou à partir de certains instants seulement), le processus évolue de manière à compenser ses écarts antérieurs relativement à une évolution déterministe souhaitée ; des modèles markoviens peuvent évidemment convenir mais leurs matrices de passage ne s'imposent pas toujours a priori.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARLEY N. - "On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation", 1943, ch. I à IV.

[2] BARTLETT M. S. - "Les processus stochastiques ponctuels" 1953, *Annales de l'Institut H. Poincaré.*

[3] BLANC-LAPIERRE A. et FORTET R. - "Sur les répartitions de Poisson", 1955, *CR Acad. Sciences Paris*; Tome 240, pp. 1045-46.

[4] FORTET R. - "Théorie des fonctions aléatoires", 1953.

[5] GIRAULT M. - "Initiation aux processus aléatoires", 1959, Ch. I, II, III, VII.

[6] GIRAULT M. - "Remarques sur le processus de Poisson", 1959, *Rev. Franç. de R.O.*, n° 12, p. 145.

[7] GIRAULT M. - "Stockages régulateurs d'un écoulement continu", 1962, *Cahiers du "B.U.R.O."* de l'I. S. U. P. , n° 4, p. 41.

[8] GOVIER L. J. and LEWIS T. - "Serially correlated arrivals in some queueing and inventory systems", 1960, 2ème congrès international de R. O. (Aix-en-Provence).

[9] KAUFMANN A. et CRUON R. - "Les phénomènes d'attente". 1961, ch. I.

[10] LE GALL P. - "Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques", 1962, ch. I et II.

[11] LUNDBERG O. - "On random processes and their application to sickness and accident statistics", 1940.

[12] MORSE P. H. M. - "Files d'attente stocks et entretien", 1960, ch. I et II (traduction française).

[13] POLLACZEK F. - "Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés", 1957, ch. III.

[14] POLYA G. - "Sur quelques points de la théorie des probabilités". 1930, *Annales de l'Institut H. Poincaré*, tome I, p. 117.

[15] WOLD H. - "Sur les processus stationnaires ponctuels", 1949, 13e colloque du C. N. R. S. (le calcul des probabilités et ses applications).