J. BOUZITAT

Les conditions de Kuhn et Tucker en programmation mathématique

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 12 (1969), p. 37-134

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1969__12__37_0>

LES CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER EN PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

par

J. BOUZITAT

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

Le problème essentiel de la programmation mathématique peut être posé de la façon suivante :

Déterminer un ou plusieurs "vecteurs programmes" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$,

appartenant à un ensemble $C \subset \mathbf{R}^m$ *de programmes réalisables défini par* $(n + p)$ *contraintes* (n *inégalités et* p *égalités*)

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} , \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \dots, p\} , \end{cases}$$

et donnant à une "fonction économique" f *une valeur* $f(x)$ *maximum.*

Ce problème est manifestement une généralisation des problèmes de programmation linéaire considérés dans les deux premiers articles du présent cahier (des conditions de signe peuvent figurer parmi les inégalités $g_j(x) \geqslant 0$). Et cette généralisation a une grande importance en calcul économique [7 et 10](*).

Les fonctions g_j et h_k n'étant pas supposées linéaires, l'ensemble C des programmes réalisables n'est pas en général un domaine polyédrique convexe. La fonction économique f n'étant pas supposée linéaire, l'ensemble des points x qui lui donnent une valeur constante k n'est pas en général un hyperplan de $\mathbf{R}^m$, mais les ensembles de points obtenus pour les diverses valeurs de k forment une famille d'hypersurfaces deux à deux disjointes.

Résoudre le problème considéré revient à chercher, dans le domaine C , le ou les points situés dans l'hypersurface correspondant à la valeur k la plus grande possible, ce qui suggère une représentation géométrique analogue à celle qui est classique dans le cas des programmes linéaires (voir le second article du présent cahier, § 2. 3.). Mais il est facile de voir, par des exemples, qu'il n'y a plus, en général, de "programmes optimums extrêmes" jouant un rôle analogue à celui qu'ils jouaient en programmation linéaire. Il se peut, en particulier, que le blocage de certaines contraintes

----

(*) Les numéros placés entre crochets renvoient aux références bibliographiques qui se trouvent à la fin du cahier.

ne suffise pas pour déterminer les programmes optimums, qui peuvent être intérieurs au domaine C , ou intérieurs à une "face" ou à une "arête" du domaine C . La résolution du problème s'en trouve notablement compliquée.

Cependant, pour déterminer un programme optimum, il est nécessaire de savoir quelles sont les contraintes qu'il bloque, parmi les n inégalités $g_j(x) \geqslant 0$, car ces contraintes sont les seules qui interviennent effectivement dans sa détermination, avec les p égalités $h_k(x) = 0$. Il n'existe pas, en général, pour déterminer les contraintes bloquées à l'optimum, d'algorithme aussi simple que la méthode du simplexe applicable aux programmes linéaires [2 et 3]. Mais *les conditions de Kuhn et Tucker* [12], qui vont être présentées, apportent une très intéressante contribution à la question, et montrent comment on peut, dans certains cas, tenir compte des contraintes en ajoutant à la fonction économique une combinaison linéaire de leurs premiers membres. (Ces conditions généralisent et précisent les conditions de Lagrange, applicables au cas où toutes les contraintes sont des égalités.) La détermination des "*multiplicateurs*" correspondants présente d'ailleurs un grand intérêt dans les problèmes économiques.

La représentation géométrique à laquelle il a été fait allusion montre que le problème peut être simplifié par des hypothèses de convexité. C'est pourquoi on considérera d'abord le cas des "*programmes concaves*" (*), où les conditions de Kuhn et Tucker peuvent donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un programme soit optimum, avant d'aborder le cas des "*programmes linéarisables*", où les conditions de Kuhn et Tucker ne donnent, en général, que des conditions nécessaires.

A la suite de Kuhn et Tucker [12], on montrera enfin comment les mêmes méthodes peuvent s'appliquer à deux problèmes plus généraux faisant intervenir plusieurs fonctions économiques : un problème de *recherche de "programmes maximin"* [15] et un problème de *recherche de "programmes extrêmes"* (au sens de Pareto) [3 et 10].

Notre analyse s'appuiera essentiellement sur le *théorème de séparation des domaines convexes* [5], de Hahn-Banach, qui peut être remplacé par le *lemme de Fourier* (établi dans le premier article du présent cahier) dans le cas des programmes linéarisables. L'emploi du théorème de séparation ne s'impose donc que dans le cas des programmes concaves non linéarisables.

(*) Les problèmes de maximisation les plus simples sont les "*programmes concaves*", tandis que les problèmes de minimisation les plus simples sont les "*programmes convexes*". On peut d'ailleurs toujours transformer un problème du 1er type en un problème du 2nd type en remplaçant les fonctions f et g_j par leurs opposées.

2. RAPPEL DES PRINCIPALES PROPRIETES DES FONCTIONS CONCAVES

Soit f une fonction à valeurs réelles d'une variable vectorielle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$.

2.1. Cas des fonctions concaves quelconques.

La fonction f *étant supposée définie sur une partie convexe* S *de* $\mathbf{R}^m$, *on dit que* f *est une fonction concave sur* S (ou, de façon équivalente, que $-f$ est une fonction convexe sur S) *si, et seulement si, pour tout couple de points* $\bar{x}$, x de S *et pour tout scalaire* $\lambda \in [0, 1]$,

$$(1) \qquad \boxed{f((1-\lambda)\,\bar{x} + \lambda x) \geqslant (1-\lambda)\, f(\bar{x}) + \lambda f(x)}$$

[Tous les points $((1-\lambda)\,\bar{x} + \lambda x)$ appartiennent à S en même temps que $\bar{x}$ et x, pour $\lambda \in [0, 1]$, parce que S est un ensemble convexe.

La condition (1) montre que *toute interpolation linéaire d'une fonction concave (entre* $\bar{x}$ *et* x*) en donne une approximation par défaut*

Il est manifestement équivalent de dire que, *pour tout scalaire* $\lambda \in]0, 1]$,

$$(2) \qquad \boxed{\frac{f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda} \geqslant f(x) - f(\bar{x})}$$

Il est encore équivalent de dire que, *pour tout* $z \in \mathbf{R}^m$ *et tout couple de scalaires* λ_1, λ_2 *non nuls tels que* $(\bar{x} + \lambda_1 z) \in S$ *et* $(\bar{x} + \lambda_2 z) \in S$,

$$(3) \qquad \boxed{[\lambda_1 \leqslant \lambda_2] \Longrightarrow \left[\frac{f(\bar{x} + \lambda_1 z) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \geqslant \frac{f(\bar{x} + \lambda_2 z) - f(\bar{x})}{\lambda_2}\right]}$$

En effet, la relation (2) se déduit de la relation (3) pour $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1$, $z = x - \bar{x}$, et réciproquement la relation (3) se déduit de la relation (2) puisque :

- *si* $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$, on obtient (3) en remplaçant dans (2) λ par $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et x par $\bar{x} + \lambda_2 z$,
- *si* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$, on obtient (3) en remplaçant dans (2) λ par $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et x par $\bar{x} + \lambda_1 z$,
- *si* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, on obtient (3) en remplaçant dans (1) ou dans (2) λ par $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $\bar{x}$ par $(\bar{x} + \lambda_1 z)$ et x par $(\bar{x} + \lambda_2 z)$, donc $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})$ par $\bar{x}$.

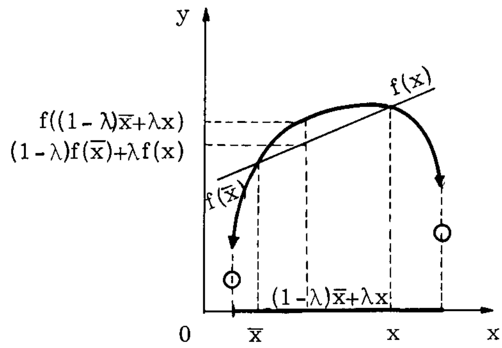
Si $\bar{x}$ est un point intérieur au domaine de définition S de la fonction concave f , on peut prendre $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, quel que soit $z \in \mathbf{R}^m$. On déduit alors de la relation (3), où l'on fait tendre λ_1 ou λ_2 vers 0 , que $\frac{f(\bar{x} + \lambda z) - f(\bar{x})}{\lambda}$ admet deux limites *finies* quand λ tend vers 0 par valeurs négatives et par valeurs positives, et que

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} \frac{f(\bar{x} + \lambda z) - f(\bar{x})}{\lambda} \geqslant \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \frac{f(\bar{x} + \lambda z) - f(\bar{x})}{\lambda} .$$

Il en résulte qu'*une fonction concave est continue en tout point intérieur à son domaine de définition et admet en un tel point, sur toute demi-droite, une dérivée directionnelle finie.* Mais une fonction concave peut être discontinue ou admettre des dérivées directionnelles infinies aux points frontières de son domaine de définition.

La condition (1) et les conditions équivalentes (2) et (3) expriment qu'*une fonction* f *est concave si, et seulement si, il en est de même de sa restriction à toute portion de droite incluse dans son domaine de définition.* [L'ensemble des points $((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x)$, pour $\lambda \in [0, 1]$, est le segment de droite d'extrémités $\bar{x}$ et x.]

Une telle restriction étant une fonction numérique d'une variable réelle, cette remarque rend intuitives les propriétés des fonctions concaves, par référence au cas particulier des fonctions concaves d'une variable réelle. On peut, dans ce dernier cas, en donner une représentation graphique dans un plan cartésien, où le graphe d'une fonction concave est une courbe continue tournant sa concavité vers les ordonnées négatives, pouvant présenter des points anguleux, et éventuellement complétée par deux points isolés situés au dessous de la courbe et correspondant aux extrémités de l'intervalle de définition de la fonction.



Il est encore équivalent de dire qu'*une fonction* f *est concave sur un convexe* S *si, et seulement si, l'ensemble des couples* (x, y) [$x \in S$, $y \in \mathbf{R}$] *tels que* $f(x) \geqslant y$ *est convexe.*

En effet cette condition exprime que, *pour tout scalaire* $\lambda \in [0, 1]$,

$$(4) \qquad \boxed{\left\{\begin{matrix} f(\bar{x}) \geqslant \bar{y} \\ f(x) \geqslant y \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda x) \geqslant (1-\lambda)\bar{y} + \lambda y]}$$

ce qui est manifestement impliqué par la condition (1), et implique aussi la condition (1) comme on le voit en faisant $\bar{y} = f(\bar{x})$ et $y = f(x)$.

Or une partie convexe C d'un espace vectoriel peut aussi être définie comme intersection d'une famille de "demi-espaces" limités par ses "hyperplans d'appui", c'est-à-dire par les hyperplans qui passent par un point frontière de C et laissent C d'un même côté au sens large [5], ces demi-espaces étant soit ouverts, soit fermés, soit mixtes et convexes.

On en déduit que, si la fonction f est continue sur son ensemble de définition convexe S (ouvert, fermé ou mixte), il est équivalent de dire que l'ensemble des couples (x, y) tels que $f(x) \geqslant y$ est convexe, ou de dire qu'à tout point $\bar{x}$ intérieur au domaine convexe S correspond au moins un hyperplan de l'espace des (x, y), passant par le point $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ et tel que tous les points (x, y) pour lesquels $f(x) \geqslant y$ soient situés d'un même côté de cet hyperplan. (La condition de continuité de f sur S est superflue si S est ouvert).

L'équation d'un tel hyperplan étant nécessairement de la forme

$$y = f(\bar{x}) + \bar{a}(x - \bar{x}) , \qquad \text{avec} \qquad \bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m) ,$$

on voit ainsi qu'*une fonction* f, *continue sur un convexe* S, *est concave sur* S *si, et seulement si, pour tout point* $\bar{x}$ *intérieur à* S, *il existe au moins un covecteur* $\bar{a}$ *de* $\mathbf{R}^m$ *tel que*

(5) $$\boxed{f(x) \leqslant f(\bar{x}) + \bar{a}(x - \bar{x}) \ , \quad \forall x \in S}$$

On déduit immédiatement de la condition (4) que, *si* f *est une fonction concave définie sur un convexe* S , *l'ensemble des points* x *tels que* $f(x) \geqslant c$ (*constante arbitraire*) *est un convexe* (qui peut être vide).

[Cette propriété caractérise les *fonctions quasi-concaves sur* S [14]. Il est équivalent de dire que f est une fonction quasi-concave sur S si, et seulement si, pour tout couple de points $\bar{x}$, x de S et pour tout scalaire $\lambda \in]0\ ,\ 1[$, l'une des trois relations (équivalentes) suivantes est vérifiée :

(1_q) $$\boxed{f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \geqslant \min\{f(\bar{x})\ ,\ f(x)\}}$$

(2_q) $$\boxed{[f(x) - f(\bar{x}) \geqslant 0] \Longrightarrow [f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x}) \geqslant 0]}$$

(3_q) $$\boxed{[f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x}) < 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) < 0]}$$

Il est intéressant de comparer ces relations à celles qui caractérisent les fonctions concaves.]

D'autre part, *si* f *est une fonction concave définie sur un convexe* S , *tout maximum local de* f *est un maximum absolu* (ce qui simplifie la recherche du maximum d'une fonction concave sur un convexe).

En effet, si le point $\bar{x} \in S$ maximise localement la fonction f , il existe un voisinage ouvert de $\bar{x}$, soit $\Omega(\bar{x})$, tel que

$$[x \in (\Omega(\bar{x}) \cap S)] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0] \ .$$

Or, quel que soit le point $x \in S$, il existe un scalaire positif λ assez petit pour que

$$\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in (\Omega(\bar{x}) \cap S) \ ,$$

d'où

$$f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x}) \leqslant 0$$

d'après la relation précédente.

De plus,

$$(3_s) \qquad \boxed{[f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x}) \leqslant 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0]}$$

d'après la relation (2).

[La propriété exprimée par la relation (3_s), pour tout couple de points $\bar{x}$, x de S et pour tout scalaire $\lambda \in]0, 1[$, caractérise les *fonctions strictement quasi-concaves sur* S [14].]

Ainsi

$$[x \in S] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0],$$

c'est-à-dire que le point x maximise globalement la fonction f sur S.

De plus, *l'ensemble des points* $\bar{x}$ *tels que* $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ *est un convexe* (qui peut être vide), puisque c'est aussi l'ensemble des points $\bar{x}$ tels que $f(\bar{x}) \geqslant \max_{x \in S} f(\bar{x})$.

[On déduit de même de la relation (3_q) que, *si* f *est une fonction quasi-concave définie sur un convexe* S, *tout maximum local* <u>*strict*</u> *de* f *est un maximum absolu* <u>*strict*</u>].

2.2. Cas des fonctions concaves différentiables.

Supposons maintenant la fonction f *différentiable en tout point* $\bar{x}$ *intérieur à son domaine de définition convexe* S.

Cela revient à supposer que, pour tout point $\bar{x}$ intérieur à S, il existe un covecteur $\nabla f(\bar{x})$ de $\mathbf{R}^m$ *tel que*

$$(6) \qquad \boxed{f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}), \quad \forall x \in S}$$

la fonction "petit zéro" du vecteur $(x - \bar{x})$ étant telle que, si $\|x - \bar{x}\|$ désigne une norme de $(x - \bar{x})$, par exemple la norme euclidienne $\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_i)^2\right)^{1/2}$, le scalaire $\dfrac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|}$ tend vers zéro avec $\|x - \bar{x}\|$ c'est-à-dire quand x tend vers $\bar{x}$:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0 .$$

On sait qu'alors la fonction f est continue au point $\bar{x}$, qu'elle y admet des dérivées partielles par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et que $\nabla f(\bar{x})$ *est le vecteur dérivé,* ou "*gradient*", *de la fonction* f *au point* $\bar{x}$:

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)_{x=\bar{x}}.$$

L'existence de toutes les dérivées partielles de la fonction f au point $\bar{x}$ n'est pas en général suffisante pour que f soit différentiable au point $\bar{x}$, même si la fonction f est continue en $\bar{x}$.

[*Exemple* : au point $(0, 0)$, la fonction f définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \end{cases}$$]

Mais *une fonction concave (ou convexe) est différentiable en tout point où elle admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables* [5].

Pour qu'une fonction soit différentiable en un point, il suffit qu'elle admette, par rapport à toutes les variables, des dérivées partielles continues au voisinage de ce point. On dit alors que cette fonction est *continûment différentiable* au point considéré.

Une fonction f, *différentiable en tout point intérieur à son domaine de définition convexe* S *et continue sur* S, *est concave sur* S *si, et seulement si, pour tout point* $\bar{x}$ *intérieur à* S,

$$\boxed{f(x) \leqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}), \quad \forall x \in S} \tag{7}$$

En effet, la relation (7) se déduit de la relation (2) où l'on fait tendre λ vers 0, puisque, d'après la condition de différentiabilité (6) au point $\bar{x}$ (et indépendamment de la condition de continuité de f sur S),

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) = \left[\frac{d}{d\lambda} f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}))\right]_{\lambda=0}.$$

Et, réciproquement, la relation (7) implique, pour tout couple de points $\bar{x}$, x de S tels que $\bar{x}$ soit intérieur à S, et pour tout scalaire $\lambda \in [0, 1[$,

$$\begin{cases} f(x) \leqslant f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) + (1 - \lambda) \; \nabla f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}))(x - \bar{x}) \\ f(\bar{x}) \leqslant f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})) - \lambda \; \nabla f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}))(x - \bar{x}) \end{cases}$$

(le point $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})$ étant alors intérieur au convexe S), d'où l'on déduit, par combinaison linéaire à coefficients positifs λ et $(1 - \lambda)$,

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) \; f(\bar{x}) \leqslant f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})).$$

Si la fonction f est continue sur S, cette inégalité reste vraie quand $\bar{x}$ n'est pas intérieur à S, de sorte que la relation (1) se déduit de la relation (7).

La condition (7) est d'ailleurs un cas particulier de la condition (5).

Elle montre que *toute fonction affine tangente à une fonction concave en donne une approximation par excès,* ce qui correspond au fait que la courbe représentative d'une fonction concave d'une variable réelle est entièrement située au dessous de ses tangentes.

On déduit immédiatement de la condition (7) que, *si* f *est une fonction concave définie sur un convexe* S *et différentiable en un point* $\bar{x} \in S$,

(7_p) $$\boxed{[\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0] \quad \text{si} \quad x \in S}$$

(7_q) $$\boxed{[\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) < 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) < 0] \quad \text{si} \quad x \in S}$$

[Les propriétés (7_p) et (7_q) caractérisent respectivement les *fonctions pseudo-concaves sur* S *en* $\bar{x}$ et les *fonctions quasi-concaves sur* S *en* $\bar{x}$ [14] (la relation (7_q) se déduit de la relation (2_q) où l'on fait tendre λ vers 0 , et une fonction f *différentiable sur un convexe* S est quasi-concave sur S si, et seulement si, elle vérifie (7_q) pour tout $\bar{x} \in S$) .

Il en résulte que *toute fonction* f *différentiable sur un convexe* S *et pseudo-concave sur* S (*en tout point de* S) *est quasi-concave sur* S (et même strictement quasi-concave sur S [14]). Mais, pour que (7_p) implique (7_q), en un point $\bar{x} \in S$, il faudrait remplacer, dans le second membre de (7_q), le signe $<$ par $\leqslant$.]

Une fonction f *, différentiable en tout point d'un domaine convexe ouvert* S *, est concave sur* S *si, et seulement si, pour tout couple de points* $\bar{x}$, x *de* S ,

(8) $$\boxed{(\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x}))(x - \bar{x}) \leqslant 0}$$

En effet, la relation (7) appliquée aux points x et $\bar{x}$ (intérieurs à S) donne

$$\begin{cases} -\nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) - f(\bar{x}) + f(x) \leqslant 0 \ , \\ -\nabla f(x)(\bar{x}-x) - f(x) + f(\bar{x}) \leqslant 0 \ , \end{cases}$$

d'où la relation (8) se déduit par addition.

Et, réciproquement, la relation (7) se déduit de la relation (8) puisque, d'après la formule des accroissements finis appliquée à la fonction $\lambda \longmapsto f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}))$ sur l'intervalle $[0\,,\,1]$ où elle est continue et dérivable (la dérivabilité aux bornes n'étant d'ailleurs pas nécessaire),

$$f(x) - f(\bar{x}) = \left[\frac{d}{d\lambda} f(\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}))\right]_{\lambda = \theta \in]0,1[} = \nabla f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x})$$

avec $0 < \theta < 1$, d'où, compte tenu de (8),

$$f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) = (\nabla f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x}))(x - \bar{x}) \leqslant 0.$$

La condition (8) resterait d'ailleurs nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit concave sur S, si S était un domaine convexe quelconque de $\mathbf{R}^m$, *pourvu que* f *soit supposée différentiable en tout point intérieur à* S *et continue sur* S.

La condition (8) peut encore être exprimée, de façon équivalente, sous la forme suivante :

Pour tout $z \in \mathbf{R}^m$ *et tout couple de scalaires* λ_1, λ_2 *tels que* $(\bar{x} + \lambda_1 z)$ *et* $(\bar{x} + \lambda_2 z)$ *soient intérieurs à* S ,

(9) $$\boxed{[\lambda_1 \leqslant \lambda_2] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x} + \lambda_1 z)\ z \geqslant \nabla f(\bar{x} + \lambda_2 z)\ z]}$$

Les conditions (8) et (9) correspondent au fait qu'une fonction dérivable d'une variable réelle est concave si, et seulement si, sa fonction dérivée est non-croissante.

2.3. Cas des fonctions concaves deux fois différentiables.

Supposons maintenant la fonction f *deux fois différentiable en tout point* $\bar{x}$ *intérieur à son domaine de définition convexe* S .

Cela revient à supposer que, pour tout point $\bar{x}$ intérieur à S , il existe un covecteur $\nabla f(\bar{x})$ de $\mathbf{R}^m$, et une matrice carrée $\nabla^2 f(\bar{x})$ de format $(m\,,\,m)$ qui peut toujours être prise symétrique, tels que

$$(10) \quad \boxed{f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})' \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) + o^2(x - \bar{x}), \forall x \in S}$$

$(x - \bar{x})'$ désignant le vecteur ligne transposé du vecteur colonne $(x - \bar{x})$, et la fonction o^2 du vecteur $(x - \bar{x})$ étant telle que, si $\|x - \bar{x}\|$ désigne une norme de $(x - \bar{x})$, le scalaire $\dfrac{o^2(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2}$ tend vers 0 avec $\|x - \bar{x}\|$ c'est-à-dire quand x tend vers $\bar{x}$:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{o^2(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0 .$$

On sait qu'alors la fonction f est continue au point $\bar{x}$, qu'elle y admet des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, que $\nabla f(\bar{x})$ *est le vecteur dérivé*, ou *"gradient", de la fonction* f *au point* $\bar{x}$, et que $\nabla^2 f(\bar{x})$ *est la matrice dérivée seconde*, ou *"hessien", de la fonction* f *au point* $\bar{x}$:

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots\dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)_{x = \bar{x}} ;$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}_{x = \bar{x}}$$

L'existence de toutes les dérivées partielles secondes de la fonction f au point $\bar{x}$ n'est pas en général suffisante pour que f soit deux fois différentiable au point $\bar{x}$, même si la fonction f est continue en $\bar{x}$.

Pour qu'une fonction soit deux fois différentiable en un point, il suffit qu'elle admette, par rapport à toutes les variables, des dérivées partielles secondes continues au voisinage de ce point. On dit alors que cette fonction est *deux fois continûment différentiable* au point considéré.

Une fonction f, *deux fois différentiable en tout point d'un domaine convexe ouvert* S , *est concave sur* S *si, et seulement si, pour tout point* $\bar{x}$ *de* S , *la forme quadratique homogène* $z'\nabla^2 f(\bar{x})z$ *de la variable* $z \in \mathbf{R}^m$ *est semi-définie négative,* ce qui revient à dire que

$$z'\nabla^2 f(\bar{x})z \leqslant 0 \ , \quad \forall z \in \mathbf{R}^m \tag{11}$$

En effet, d'après la condition de double différentiabilité (10),

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} f(\bar{x} + \lambda z) = \frac{d}{d\lambda} (\nabla f(\bar{x} + \lambda z)z) = z'\nabla^2 f(\bar{x} + \lambda z)\, z \ , \forall\ \bar{x} + \lambda z \in S \ .$$

Il en résulte que la condition (11) est équivalente au fait que, pour tout $\bar{x} \in S$, pour tout $z \in \mathbf{R}^m$ et tout scalaire λ tels que $(\bar{x} + \lambda z)$ soit intérieur à S , la fonction $\lambda \mapsto (\nabla f(\bar{x} + \lambda z)\, z)$ a une dérivée négative ou nulle, ou encore au fait que cette fonction dérivable est non-croissante dans l'intervalle où elle est définie.

La condition (11) est donc équivalente à la condition (9). Et elle resterait nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit concave sur S , si S était un domaine convexe quelconque de $\mathbf{R}^m$, *pourvu que* f *soit supposée deux fois différentiable en tout point intérieur à* S *et continue sur* S.

La condition (11) correspond au fait qu'une fonction deux fois dérivable d'une variable réelle est concave si, et seulement si, sa fonction dérivée seconde est négative ou nulle.

On voit en particulier, d'après la condition (11), *qu'une forme quadratique définit une fonction concave dans l'espace* $\mathbf{R}^m$ *si, et seulement si, elle est la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique homogène semi-définie négative.*

Il est facile de vérifier directement cette importante propriété (souvent utile en calcul économique). Toute forme linéaire définissant une fonction qui est à la fois concave et convexe, il suffit de considérer une forme quadratique homogène $x'Qx$ du vecteur $x \in \mathbf{R}^m$, où Q est une matrice carrée de format (m, m) qui peut toujours être prise symétrique.

Or la condition de concavité (1), appliquée à $x'Qx$, s'écrit

$$((1-\lambda)\bar{x}' + \lambda x')\, Q((1-\lambda)\bar{x} + \lambda x) \geqslant (1-\lambda)\, \bar{x}'Q\bar{x} + \lambda x'Qx \ , \ \forall\ \lambda \in [0,1] ,$$

ou

$$\lambda(1-\lambda)(\bar{x}'Q\bar{x} + x'Qx - \bar{x}'Qx - x'Q\bar{x}) \leqslant 0 \ , \quad \forall\ \lambda \in [0,1] ,$$

ou enfin

$$(x - \bar{x})' Q(x - \bar{x}) \leqslant 0 \ , \quad \forall (x - \bar{x}) \in \mathbf{R}^m \ ,$$

ce qui exprime bien que la forme quadratique homogène $x'Qx$ est semi-définie négative.

[Rappelons qu'*une matrice symétrique* Q *donne une forme quadratique* $x'Qx$ *semi-définie négative si, et seulement si, ses valeurs propres (qui sont toutes réelles) sont toutes négatives ou nulles* [10].]

3. CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER POUR LES PROGRAMMES CONCAVES

3.1. Lemmes fondamentaux de la programmation concave.

Les trois lemmes qui vont être établis peuvent être considérés, d'une certaine manière, comme généralisant le lemme de Fourier, relatif au cas linéaire (voir le premier article du présent cahier), dans le cas de systèmes de relations faisant intervenir des fonctions concaves. Il faut toutefois observer que, pour de tels systèmes, il n'est pas en général question de mettre en évidence leur impossibilité sous forme purement numérique, et que, de plus, les conditions nécessaires et les conditions suffisantes d'impossibilité doivent en général être dissociées.

3.1.1. Lemme 1.– *Conditions nécessaires d'impossibilité.*

Soit un système de $(t + n + p)$ relations portant sur une variable vectorielle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, qui peut a priori décrire une partie convexe non vide S de $\mathbf{R}^m$ (éventuellement $S = \mathbf{R}^m$) :

$$(A_c) \quad \left\{ \begin{array}{lll} f_r(x) > 0 & \text{pour} & r \in \{1, 2, \dots, t\} \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} & j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{les fonctions } f_r \text{ et } g_j \\ \text{étant concaves sur } S \\ \text{les fonctions } h_k \text{ étant} \\ \text{linéaires affines sur } S \end{array}$$

Si le système (A_c) *n'admet pas de solution* $x \in S$, *il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_t) \geqslant 0 \ , \ (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n) \geqslant 0 \ , \ (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_p) \ ,$$

qui, affectant respectivement les $(t + n + p)$ relations du système (A_c), permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction (concave) l telle que

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leqslant 0 \ , \quad \forall\, x \in S}$$

En effet, soit T l'ensemble (non vide) des points

$$(a, b, c) = (a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_p) \in \mathbf{R}^{t+n+p}$$

tels qu'il existe au moins un point $x \in S$ vérifiant les $(t + n + p)$ relations :

$$\begin{cases} f_r(x) > a_r & \text{pour } r \in \{1, 2, \dots, t\}, \\ g_j(x) \geqslant b_j & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ h_k(x) = c_k & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\}. \end{cases}$$

L'ensemble T est une partie convexe non vide de $\mathbf{R}^{t+n+p}$, parce que

$$\left\{ \begin{array}{l} (a^1, b^1, c^1) \in T \\ (a^2, b^2, c^2) \in T \end{array} \right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{r} (1 - \lambda)(a^1, b^1, c^1) + \lambda(a^2, b^2, c^2) \in T \\ \forall\, \lambda \in [0, 1] \end{array} \right],$$

comme on le voit immédiatement à partir des propriétés des fonctions concaves f_r et g_j et des fonctions linéaires affines h_k, compte-tenu de la convexité de S,

$$\begin{cases} [f_r(x^1) > a_r^1 \quad \text{et} \quad f_r(x^2) > a_r^2] \Longrightarrow \\ [f_r((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1 - \lambda)\, f_r(x^1) + \lambda f_r(x^2) > (1 - \lambda) a_r^1 + \lambda a_r^2], \\ [g_j(x^1) \geqslant b_j^1 \quad \text{et} \quad g_j(x^2) > b_j^2] \Longrightarrow \\ [g_j((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1 - \lambda)\, g_j(x^1) + \lambda g_j(x^2) \geqslant (1 - \lambda)\, b_j^1 + \lambda b_j^2, \\ [h_k(x^1) = c_k^1 \quad \text{et} \quad h_k(x^2) = c_k^2] \Longrightarrow \\ [h_k((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) = (1 - \lambda)\, h_k(x^1) + \lambda h_k(x^2) = (1 - \lambda) c_k^1 + \lambda c_k^2]. \end{cases}$$

De plus, si le système (A_c) n'admet pas de solution $x \in S$, l'ensemble convexe non vide $T \subset \mathbf{R}^{t+n+p}$ ne comprend pas l'origine.

D'après l'un des théorèmes de séparation des domaines convexe [5], il existe donc, dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{t+n+p}$, un hyperplan passant par l'origine et tel que le domaine T soit tout entier situé (au sens large) d'un même côté de cet hyperplan.

Cela revient à dire qu'il *existe* $t + n + p$ *coefficients* $\bar{\gamma}_r$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ *non tous nuls tels que*

$$\sum_r \bar{\gamma}_r a_r + \sum_j \bar{\lambda}_j b_j + \sum_k \bar{\mu}_k c_k \leqslant 0 , \quad \forall (a, b, c) \in T.$$

De plus, puisque tout point (a, b, c) tel que $a_r < f_r(x)$, $b_j \leqslant g_j(x)$, $c_k = h_k(x)$, x étant un point quelconque de S, appartient à T, on voit, en donnant aux a_r et aux b_j des valeurs négatives très grandes en valeur absolue, que

$$\bar{\gamma}_r \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad r \in \{1, 2, \ldots, t\}, \quad \bar{\lambda}_j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

et l'on voit, en donnant aux a_r des valeurs tendant inférieurement vers les $f_r(x)$, et aux b_j des valeurs égales aux $g_j(x)$, que

$$\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leqslant 0 , \quad \forall x \in S .$$

Le lemme 1 est ainsi complètement établi.

Remarque complémentaire. - Chacune des $(t + n + p)$ relations du système (A_c) définit une partie convexe (éventuellement vide) de $S \subset \mathbf{R}^m$, et, puisque le système (A_c) n'admet pas de solution $x \in S$, l'intersection de ces $(t + n + p)$ ensembles est vide.

Si $t + n + p > m + 1$, il résulte du *théorème de Helly* [5] qu'il existe $(m + 1)$ de ces parties convexes de $\mathbf{R}^m$ dont l'intersection est vide, c'est-à-dire que l'on peut extraire du système (A_c) un système de $(m + 1)$ relations n'admettant pas de solution $x \in S$.

Il existe donc toujours une combinaison linéaire $l(x)$ *possédant les propriétés indiquées dans le Lemme 1, et faisant intervenir au plus* $(m + 1)$ *des relations du système* (A_c) *avec des multiplicateurs non nuls.*

Relations d'exclusion. - *Si le système* (A_c) *n'admet pas de solution* $x \in S$, *mais que, pour une combinaison linéaire* $l(x)$ *possédant les propriétés indiquées dans le Lemme 1, le système*

$$(B_c) \quad \left\{ \begin{array}{lll} f_r(x) \geqslant 0 & \text{pour tout} & r \mid \bar{\gamma}_r > 0 \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour tout} & j \mid \bar{\lambda}_j > 0 \\ h_k(x) = 0 & \text{pour tout} & k \mid \bar{\mu}_k \neq 0 \end{array} \right.$$

admette une solution $\bar{x} \in S$, il résulte immédiatement du Lemme 1 que $l(\bar{x}) \leqslant 0$, et du fait que $\bar{x}$ est solution du système (B_c) que $l(\bar{x}) \geqslant 0$, chacun des termes de $l(\bar{x})$ étant positif ou nul.

Donc $l(\bar{x}) = 0$ *et chacun des termes de* $l(\bar{x})$ *est nul*. (On peut observer qu'en un tel point $\bar{x}$, la fonction concave l atteint son maximum pour $x \in S$.)

Ainsi $\begin{cases} f_r(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad r \mid \bar{\gamma}_r > 0 , \\ g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad j \mid \bar{\lambda}_j > 0 , \end{cases}$

ou, sous une forme équivalente,

$$\boxed{\begin{cases} \bar{\gamma}_r \, f_r(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad r \in \{1 , 2 , \dots , t\} \\ \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad j \in \{1 , 2 , \dots , n\} \end{cases}}$$

Ce sont les relations d'exclusion. Elles s'appliquent, en particulier, à toute solution $\bar{x} \in S$, *s'il en existe, du système* ($\bar{A}_c$) *que l'on obtient, à partir du système* (A_c), *en remplaçant toutes les inégalités au sens strict* $f_r(x) > 0$ *par des inégalités au sens large* $f_r(x) \geqslant 0$.

Toute solution $\bar{x} \in S$ du système ($\bar{A}_c$) doit donc annuler, en plus des fonctions h_k , chacune des fonctions f_r et g_j qui figurent, avec un multiplicateur strictement positif, dans une combinaison linéaire $l(x)$ possédant les propriétés indiquées dans le Lemme 1.

3.1.2. Lemme 2. - *Conditions suffisantes d'impossibilité.*

Soit un système de (t + n + p) relations portant sur une variable vectorielle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, qui peut a priori décrire une partie non vide S de $\mathbf{R}^m$ (éventuellement $S = \mathbf{R}^m$) :

$$(A) \qquad \boxed{\begin{cases} f_r(x) > 0 & \text{pour} \quad r \in \{1 , 2 , \dots , t\} \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} \quad j \in \{1 , 2 , \dots , n\} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} \quad k \in \{1 , 2 , \dots , p\} \end{cases}}$$

S'il existe des multiplicateurs scalaires

$(\bar{\gamma}_1 , \bar{\gamma}_2 , \dots , \bar{\gamma}_t) \geqslant 0$ *non tous nuls*, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots , \bar{\lambda}_n) \geqslant 0$, $(\bar{\mu}_1 , \bar{\mu}_2, \dots , \bar{\mu}_p)$, qui, affectant respectivement les $(t + n + p)$ relations du système (A), permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leqslant 0 , \quad \forall x \in S}$$

le système (A) *n'admet pas de solution* $x \in S$.

En effet, s'il existait un point $\bar{x} \in S$ qui soit solution du système (A), on aurait, pour tout système de multiplicateurs vérifiant les conditions posées dans le Lemme 2, et en particulier la condition selon laquelle les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ affectant les inégalités strictes $f_r(x) > 0$ ne sont pas tous nuls,

$$\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(\bar{x}) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(\bar{x}) > 0 ,$$

ce qui est contradictoire avec l'existence d'une combinaison linéaire $l(x) \leqslant 0$, $\forall x \in S$.

La démonstration (très élémentaire) du Lemme 2 n'exige donc aucune hypothèse restrictive sur le domaine $S \subset \mathbf{R}^m$, *ni sur les fonctions* f_r, g_j, h_k. Mais le Lemme 2 s'applique, bien entendu, en particulier au système (A_c) du Lemme 1 (défini sur un domaine S convexe).

Le Lemme 1 et le Lemme 2 peuvent ainsi conduire à des conditions nécessaires et suffisantes d'impossibilité d'un système tel que (A_c), dans les cas où sont remplies certaines "*conditions de qualification*" permettant d'affirmer que, si le système est impossible, il existe une combinaison linéaire $l(x)$ possédant les propriétés indiquées dans le Lemme 1 et faisant intervenir une inégalité stricte avec un multiplicateur non nul. Tel est l'objet du Lemme 3.

3.1.3. Lemme 3. - *Conditions nécessaires et suffisantes d'impossibilité.*

Soit un système de $(t + n + p)$ relations portant sur une variable vectorielle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, qui peut a priori décrire une partie convexe non vide S de $\mathbf{R}^m$, possédant un intérieur,

$$(A_c) \begin{cases} f_r(x) > 0 & \text{pour} \quad r \in \{1, 2, \dots, t\} \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}, \text{ les fonctions } f_r \text{ et } g_j \text{ étant concaves sur } S \\ , \text{ les fonctions } h_k \text{ étant linéaires affines sur } S \end{matrix}$$

tel que le système suivant de $(n + p)$ *relations*

$$(A_c^!)\quad \boxed{\begin{cases} g_j(x) > 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j \text{ ne soit pas linéaire affine sur } S\ (j \in J_c) \\ g_j(x) \geq 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j \text{ soit linéaire affine sur } S\ (j \in J_a) \\ h_k(x) = 0 & \text{pour tout } k\ , \text{ les } h_k \text{ étant linéaires affines sur } S\ (k \in K) \end{cases}}$$

admette une solution x^* *intérieure* à S (x^* est nécessairement intérieur à S si $S = \mathbf{R}^m$, ou si S est un ouvert de $\mathbf{R}^m$).

Alors le système (A_c) *n'admet pas de solution* $x \in S$ *si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires*

$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t) \geq 0$ *non tous nuls*
(on peut supposer $\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \ldots + \bar{\gamma}_t = 1$),

$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n) \geq 0$, $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$,

qui, affectant respectivement les $(t + n + p)$ relations du système (A_c), permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction (concave) l telle que

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leq 0\ ,\ \forall\, x \in S}$$

Compte tenu du Lemme 2, il reste seulement à montrer, pour établir le Lemme 3, que si le système (A_c) considéré n'admet pas de solution $x \in S$, il existe une combinaison linéaire $l(x)$ qui, possédant les propriétés indiquées dans le Lemme 1, fait de plus intervenir l'une au moins des inégalités strictes $f_r(x) > 0$ avec un multiplicateur $\bar{\gamma}_r$ non nul.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors tous les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ sont nuls dans les combinaisons linéaires $l(x)$ dont l'existence est garantie par le Lemme 1. Il existe donc des multiplicateurs non tous nuls

$$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n) \geq 0\ , \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)\ ,$$

tels que

$$l(x) = \sum_j \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\, h_k(x) \leq 0\ , \quad \forall\, x \in S\ .$$

Mais alors l'existence d'une solution $x^* \in S$ du système $(A_c^!)$, dont les $(n + p)$ relations interviennent seules dans la combinaison linéaire $l(x)$, implique, d'après les relations d'exclusion (voir § 3.1.1), la nullité de $l(x^*)$ et de chacun des termes de $l(x^*)$.

Ainsi $[g_j(x^*) > 0] \Longrightarrow [\bar{\lambda}_j = 0]$,
et, en particulier, $\lambda_j = 0$ *pour tout* $j \in J_c$.

La fonction l *est donc une combinaison linéaire des seules fonctions linéaires affines du système* $(A_c^!)$. C'est donc une fonction linéaire affine, nulle au point x^*, qui a été supposé intérieur à S, et négative ou nulle pour tout $x \in S$. Il en résulte que l *est une fonction nulle pour tout* $x \in S$.

Il existe donc des multiplicateurs non tous nuls $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$ $(j \in J_a)$ et $\bar{\mu}_k (k \in K)$ tels que

$$\boxed{l(x) = \sum_j \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\, h_k(x) = 0\,, \quad \forall x \in S}$$

Soit $J_a^1 \subset J_a$ l'ensemble des indices j tels que $\bar{\lambda}_j > 0$, et Card $J_a^1 = n_1$.

Soit $K^1 \subset K$ l'ensemble des indices k tels que $\bar{\mu}_k \neq 0$, et Card $K^1 = p_1$.

Alors, d'après l'analyse précédente, si $n_1 + p_1 \geqslant 2$,

$$\boxed{\begin{Bmatrix} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} & j \in J_a^1 \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in K^1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} g_j(x) = 0 & \text{pour} & j \in J_a^1 \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in K^1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{système de} \\ (n_1 + p_1 - 1) \text{ des} \\ \text{égalités précédentes} \end{Bmatrix}}$$

On en déduit une démonstration du lemme 3 par récurrence sur le nombre $q \geqslant n_1 + p_1$ *des relations linéaires du système* $(A_c^!)$ *déduit du système* (A_c).

En effet, puisque les multiplicateurs $\bar{\lambda}_j$ et $\bar{\mu}_k$ ne sont pas tous nuls, $n_1 + p_1 > 0$. Et, puisqu'aucune des fonctions linéaires affines g_j et h_k n'est nulle pour tout $x \in S$, $n_1 + p_1 > 1$. *On arrive donc à une contradiction si le système* (A') *comprend* 0 *ou* 1 *relation linéaire, et le lemme 3 est ainsi établi dans ce cas.*

Faisons alors l'*hypothèse de récurrence* selon laquelle le Lemme 3 reste vrai si le système $(A_c^!)$ comprend au plus q relations linéaires, et montrons que, sous cette hypothèse, il est encore vrai si (A_c) comprend $(q + 1)$ relations linéaires.

S'il en était autrement, l'analyse précédente s'appliquerait à un système (A) tel que $(A_c^!)$ comprenne $(q + 1)$ relations linéaires. *Il existerait alors une combinaison linéaire* $l(x)$ *nulle pour tout* $x \in S$:

$$l(x) = \sum_{j \in J_a^1} \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_{k \in K^1} \bar{\mu}_k\, h_k(x) = 0\,, \quad \forall x \in S\,.$$

Et l'on obtiendrait des systèmes $(A_c^*)(A_c'^*)$ équivalents aux systèmes $(A_c)(A_c')$ en supprimant l'une des $(n_1 + p_1)$ relations linéaires de (A_c') qui interviennent avec un multiplicateur non nul dans $l(x)$, et en transformant en égalités les n_1 ou $(n_1 - 1)$ inégalités conservées parmi ces $(n_1 + p_1)$ relations.

Puisque le système $(A_c'^*)$ comprend une relation linéaire de moins que le système (A_c'), soit q au lieu de $(q + 1)$, l'hypothèse de récurrence permet d'appliquer le Lemme 3 au système (A_c^*), qui en vérifie toutes les hypothèses en même temps que le système (A_c). *Il existe donc une combinaison linéaire* $l^*(x)$ *possédant pour le système* (A_c^*) *les propriétés indiquées dans le Lemme 3.*

Il se peut cependant que $l^*(x)$ ne possède pas toutes ces propriétés pour le système (A_c), si certains des multiplicateurs affectant les inégalités linéaires de (A_c) transformées en égalités dans (A_c^*) sont négatifs dans $l^*(x)$. Mais, puisque les multiplicateurs affectant ces inégalités sont tous strictement positifs dans la combinaison linéaire $l(x)$, nulle pour tout $x \in S$, *il suffit alors d'ajouter à* $l^*(x)$ *le produit de* $l(x)$ *par un facteur* ρ *réel positif assez grand pour obtenir une combinaison linéaire* $[l^*(x) + \rho l(x)]$ *possédant pour le système* (A_c) *les propriétés indiquées dans le Lemme 3.*

Le Lemme 3 est ainsi établi, par récurrence, dans le cas général.

Remarques. - La démonstration précédente montre que le Lemme 3 resterait vrai si les inégalités strictes du système (A_c') restaient strictes dans le système impossible (A_c), c'est-à-dire si (A_c) s'obtenait par adjonction des t inégalités strictes $f_r(x) > 0$ aux $(n + p)$ relations de (A_c').

Mais il est essentiel que les inégalités linéaires de (A_c') restent écrites au sens large dans (A_c), même si elles pouvaient être écrites au sens strict dans (A_c') sans que ce système cesse d'admettre une solution x^* intérieure à S.

Dans le cas particulier intéressant où les n *fonctions* g_j *sont toutes linéaires affines, le système* (A_c') *est linéaire et ne comprend aucune inégalité stricte.*

3.2. Problème d'optimisation sous contraintes.

On considèrera ici le problème suivant, dit *Problème* $[I_c]$

Déterminer un (ou plusieurs) "vecteur programme" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, Pb[$I_c$]

maximisant la valeur $f(x)$ *d'une* "fonction économique" <u>*concave*</u> f, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ les fonctions } g_j \text{ étant } \textit{concaves}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, p\}, \text{ les fonctions } h_k \text{ étant } \textit{linéaires affines}. \end{cases}$$

Les fonctions f, g_j, h_k *sont supposées définies sur* $\mathbf{R}^m$ (ce qui n'est d'ailleurs pas essentiel).

Ces contraintes compatibles définissent une partie convexe fermée non vide C de $\mathbf{R}^m$, puisque, d'après les hypothèses (voir § 2.1), les fonctions g_j et h_k sont continues sur $\mathbf{R}^m$, et, pour tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} [g_j(x^1) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g_j(x^2) \geqslant 0] \Longrightarrow \\ [g_j((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1-\lambda)\, g_j(x^1) + \lambda g_j(x^2) \geqslant 0], \\ [h_k(x^1) = 0 \quad \text{et} \quad h_k(x^2) = 0] \Longrightarrow \\ [h_k((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) = (1-\lambda)\, h_k(x^1) + \lambda h_k(x^2) = 0]. \end{cases}$$

Le Problème [I_c] revient donc à *maximiser la fonction concave* f *sur le convexe fermé non vide* $C \subset \mathbf{R}^m$.

Si la fonction concave f, qui est continue sur $\mathbf{R}^m$, est bornée sur le fermé C, elle y admet un supremum, qui est un maximum s'il est atteint en au moins un point $\bar{x}$ (il en est ainsi, en particulier, si le fermé C est borné). Le Problème [I_c] admet alors au moins une solution $\bar{x} \in C$. De plus, tout maximum local de f est un maximum absolu (voir § 2.1.).

[Il suffirait de supposer les fonctions f, g_j, h_k définies sur une partie convexe S de $\mathbf{R}^m$ ouverte et contenant C, pour que les résultats donnés dans la suite restent valables.]

3.2.1. *Théorèmes de base.*

Dire que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du Problème [I_c] revient à dire que *le système des* $(1 + n + p)$ *relations*

$$(I_c) \qquad \boxed{\begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) > 0, & \\ g_j(x) \geqslant 0, & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ h_k(x) = 0, & \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}}$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^m$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* $(\bar{I}_c)$ que l'on obtient à partir du système (I_c) en remplaçant l'inégalité au sens strict par une inégalité au sens large.

Les trois lemmes fondamentaux établis au § 3.1 conduisent alors, quand on les applique au système (I_c), aux trois théorèmes suivants.

Théorème 1.- *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* $[I_c]$, *il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$\bar{\gamma}\ ,\quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)\ ,\quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{l(x) = \bar{\gamma}f(x) + \sum_k \bar{\lambda}_j\ g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\ h_k(x) \leqslant \bar{\gamma}\ f(\bar{x})\ ,\qquad \forall\ x \in \mathbf{R}^m}$$

$$\textit{avec}\quad \left\{\begin{array}{lll} \bar{\gamma} \geqslant 0\ ; & & \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0\ , \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0\ , & \bar{\lambda}_j\ g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout}\ \ j\ ; \\ & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout}\ \ k\ . \end{array}\right\}$$

D'après le Lemme 1 et les relations d'exclusion, le théorème 1 exprime seulement que, si $\bar{x}$ est solution du Problème $[I_c]$, les conditions nécessaires pour que le système (I_c) soit impossible sont vérifiées et le point $\bar{x}$ vérifie les contraintes du Problème $[I_c]$.

[On a noté ici $(l(x) - \bar{\gamma}\, f(\bar{x}))$ la combinaison linéaire qui était notée $l(x)$ dans le Lemme 1.]

Il est intéressant d'observer que *la fonction* l *est une fonction concave sur* $\mathbf{R}^m$, et que *l'inégalité encadrée exprime, compte tenu des relations d'exclusion, que* $l(\bar{x})$ *atteint son maximum* $l(\bar{x}) = \bar{\gamma}f(\bar{x})$ *pour* $x = \bar{x}$.

Théorème 2.- *S'il existe un point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *et des multiplicateurs scalaires*

$$\bar{\gamma}\ ,\quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)\ ,\quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui vérifient les conditions posées dans le Théorème 1, le multiplicateur $\bar{\gamma}$ *relatif à la fonction économique* f *étant de plus strictement positif* (ce qui permet de prendre $\bar{\gamma} = 1$) , *le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* $[I_c]$ (et cela, sans aucune hypothèse restrictive sur les fonctions f, g_j, h_k).

D'après le Lemme 2, le théorème 2 exprime seulement que $\bar{x}$ est solution du Problème $[I_c]$ si les conditions suffisantes pour assurer l'impossibilité du système (I_c) sont vérifiées et si de plus le point $\bar{x}$ vérifie les contraintes du Problème $[I_c]$.

On déduit d'ailleurs immédiatement des conditions posées dans le Théorème 1 que $\bar{x} \in \mathbf{C}$ et que, *pour tout* x *appartenant à* C, *c'est-à-dire tel que* $\left\{\begin{matrix} g_j(x) \geqslant 0, & \forall j \\ h_k(x) = 0, & \forall k \end{matrix}\right\}$,

$$\bar{\gamma} f(x) \leqslant l(x) \leqslant l(\bar{x}) = \bar{\gamma} f(\bar{x}),$$

d'où, si $\bar{\gamma} > 0$, $\quad f(x) \leqslant f(\bar{x})$,

ce qui établit à nouveau, directement, le théorème 2.

Théorème 3.- *Si les contraintes du Problème* $[I_c]$ *sont telles que le système des* (n + p) *relations*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{llll} g_j(x) > 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j & \text{ne soit pas} & \text{linéaire affine} \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j & \text{soit} & \text{linéaire affine} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour tout } k \text{ (les } h_k & \text{étant linéaires} & \text{affines)} \end{array}\right.}$$

admette une solution $x^* \in \mathbf{R}^m$ (ce qui est une "*condition de qualification des contraintes*" du Problème $[I_c]$),

- *alors le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est une solution du Problème* $[I_c]$ *si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires* (éventuellement tous nuls)

$$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n), \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une "*fonction de Lagrange*" l telle que

$$\boxed{l(x) = f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leqslant f(\bar{x}), \quad \forall x \in \mathbf{R}^m}$$

avec $\left\{\begin{array}{lllll} \bar{\lambda}_j \geqslant 0, & g_j(\bar{x}) \geqslant 0, & \bar{\lambda}_i g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & j\,; \\ & & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & k\,. \end{array}\right\}$

N.B. - *Dans le cas particulier important où toutes les contraintes du Problème* $[I_c]$ *sont linéaires, elles vérifient la condition de qualification ci-dessus du seul fait qu'elles sont compatibles* (le point $\bar{x}$, par exemple, jouant alors le rôle du point x^*).

Cette condition est, d'autre part, vérifiée dès que le domaine $C \subset \mathbf{R}^m$ *défini par les contraintes du Problème* $[I_c]$ *possède un intérieur* (tout point intérieur à C pouvant alors jouer le rôle du point x^*).

D'après le Lemme 3, le théorème 3 exprime seulement que $\bar{x}$ est solution du Problème $[I_c]$ si, et seulement si, les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'impossibilité du système (I_c) sont vérifiées (dans les cas où il existe de telles conditions), le point $\bar{x}$ vérifiant de plus les contraintes du Problème $[I_c]$.

Il est intéressant d'observer que *la fonction* l *est une fonction concave sur* $\mathbf{R}^m$, et que *l'inégalité encadrée exprime, compte-tenu des relations d'exclusion, que* $l(x)$ *atteint son maximum* $l(\bar{x}) = f(\bar{x})$ *pour* $x = \bar{x}$.

3.2.2. *Première forme des conditions de Kuhn et Tucker.*

Le Théorème 3 du § 3.2.1. établit, sous certaines conditions, l'équivalence entre un *problème de maximisation sous contraintes* (Problème $[I_c]$) et un *problème de maximisation sans contraintes d'une fonction de Lagrange* (Problème $[II_c]$) qui peut être énoncé de la façon suivante :

Pb$[II_c]$

Déterminer un système de multiplicateurs scalaires

$$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n), \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p),$$

et un "vecteur programme" $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$, *tels que le vecteur* $\bar{x}$ *maximise sur* $\mathbf{R}^m$ *la valeur* $l(x)$ *d'une* "fonction de Lagrange" l *définie par*

$$\boxed{l(x) = f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j \, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k \, h_k(x)}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{llll} \bar{\lambda}_j \geq 0, \quad g_j(\bar{x}) \geq 0, & \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & j \\ & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & k \end{array} \right\}$$

$$[\text{d'où } l(\bar{x}) = f(\bar{x})].$$

L'équivalence entre le Problème $[I_c]$ *et le Problème* $[II_c]$, sous les conditions de concavité posées dans l'énoncé du Problème $[I_c]$ et sous la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 3, *exprime les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker, sous leur première forme, pour les programmes concaves* [12].

Remarque. Il faut observer *que les résultats ainsi obtenus supposent des conditions de concavité, mais non des conditions de différentiabilité,* pour les fonctions f et g_j (les fonctions linéaires affines h_k étant évidemment différentiables).

Si cependant la fonction de Lagrange l *, qui est concave, est différentiable au point* $\bar{x}$, les relations (6) et (7) du § 2.2. (vérifiées par les fonctions concaves différentiables en un point $\bar{x}$) montrent que

$$\boxed{[l(x) \leqslant l(\bar{x}),\ \forall x \in \mathbf{R}^n] \Longleftrightarrow [\nabla l(\bar{x}) = 0] \Longleftrightarrow \left[\frac{\partial l(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\}\right]}$$

[Il en résulte que l'on dispose alors de $(m + n + p)$ égalités, en plus des $2n$ conditions de signe, pour déterminer les $(m + n + p)$ inconnues scalaires du Problème $[II_c]$: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$. (Cela n'implique évidemment pas, a priori, que le problème en question ait une solution, ni qu'il ait une solution unique.)

Le point le plus délicat de cette résolution consiste à *choisir, parmi les deux facteurs figurant dans chacune des* n *relations d'exclusion* $\bar{\lambda}_j\, g_j(\bar{x}) = 0$, *celui qui doit être annulé* (les deux facteurs peuvent d'ailleurs être nuls ensemble dans les cas de dégénérescence). Cela revient à déterminer, parmi les n inégalités $g_j(\bar{x}) \geqslant 0$, quelles sont les contraintes bloquées par le programme optimum $\bar{x}$. C'est ce qui est fait de façon méthodique, dans le cas des programmes linéaires, par l'algorithme du simplexe. Et il ne peut, en général, être question de procéder de façon exhaustive aux 2^n essais a priori nécessaires (du moins dès que n est assez grand).]

Complément. Lorsque les Problèmes $[I_c]$ *et* $[II_c]$ *sont équivalents, il existe une classe de problèmes intermédiaires tous équivalents au Problème* $[I_c]$*. Ce sont les problèmes de maximisation, sous certaines des contraintes du Problème* $[I_c]$*, d'une fonction de Lagrange faisant intervenir les autres contraintes de ce problème.*

Si l'on désigne

- par $\{J_1, J_2\}$ une partition de l'ensemble $J = \{1, 2, \ldots, n\}$,
- par $\{K_1, K_2\}$ une partition de l'ensemble $K = \{1, 2, \ldots, n\}$,

un tel Problème intermédiaire $[III_c]$ peut être énoncée de la façon suivante :

Déterminer un système de multiplicateurs scalaires

$$\bar{\lambda}_j \quad \text{pour} \quad j \in J_1\ , \quad \bar{\mu}_k \quad \text{pour} \quad k \in K_1\ ,$$

Pb[$\mathrm{III_c}$] *et un* "vecteur programme" $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$, *tels que le vecteur* $\bar{x}$ *maximise sur* $\mathbf{R}^m$ *la valeur* $l_1(x)$ *d'une* "fonction de Lagrange" l_1 *définie par*

$$\boxed{l_1(x) = f(x) + \sum_{j \in J_1} \bar{\lambda}_j \; g_j(x) + \sum_{k \in K_1} \bar{\mu}_k \, h_k(x)}$$

avec $\left\{ \begin{array}{lll} \bar{\lambda}_j \geqslant 0 , \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_j \; g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour } j \in J_1 \\ & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour } k \in K_1 \end{array} \right\}$

$$[\text{d'où } l_1(\bar{x}) = f(\bar{x})] ,$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} & j \in J_2 , \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in K_2 . \end{array} \right.$$

Dire que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du Problème [$\mathrm{III_c}$] revient à dire qu'il existe une fonction de Lagrange l_1 telle que

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} & j \in J_2 \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in K_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow [l_1(x) \leqslant l_1(\bar{x}) = f(\bar{x})] ,$$

le point $\bar{x}$ vérifiant de plus toutes les contraintes du Problème [$\mathrm{I_c}$].

Or un raisonnement analogue à celui qui a été employé au § 3.2.1 pour démontrer directement le Théorème 2 montre que :

- *si* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [$\mathrm{II_c}$] , il suffit de supprimer dans la fonction de Lagrange $l(x)$ les termes relatifs aux indices $j \in J_2$ et $k \in K_2$ pour obtenir une fonction $l_1(x)$, qui est une fonction de Lagrange du Problème [$\mathrm{III_c}$], telle que, pour tout x vérifiant les contraintes de ce problème, on a

$$l_1(x) \leqslant l(x) \leqslant l(\bar{x}) = f(\bar{x}) = l_1(\bar{x}) ,$$

de sorte que $\bar{x}$ *est solution du Problème* [$\mathrm{III_c}$] ;

- *si* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [$\mathrm{III_c}$], on a, pour tout x vérifiant les contraintes du Problème [$\mathrm{I_c}$] ,

$$f(x) \leqslant l_1(x) \leqslant l_1(\bar{x}) = f(\bar{x}) ,$$

de sorte que $\bar{x}$ *est solution du Problème* [$\mathrm{I_c}$].

Ainsi

$$\boxed{[\bar{x} \text{ solution de Pb } II_c] \Longrightarrow [\bar{x} \text{ solution du Pb } III_c] \Longrightarrow [\bar{x} \text{ solution du Pb } I_c]}$$

ce qui établit l'équivalence des Problèmes $[I_c]$, $[II_c]$ et $[III_c]$ dans tous les cas où les deux premiers problèmes sont équivalents.

Il en résulte que, *dans l'application des conditions de Kuhn et Tucker, on peut n'introduire dans la fonction de Lagrange que certaines des contraintes du problème initial, en conservant explicitement les autres.* (On a souvent intérêt à conserver explicitement les conditions de signe.)

On voit ainsi comment la suppression d'une contrainte explicite peut être, d'une certaine manière, "compensée" par l'introduction d'un terme supplémentaire dans la fonction économique à maximiser.

3.2.3. *Seconde forme des conditions de Kuhn et Tucker.*

Il est possible de mettre les Problèmes $[II_c]$ et $[III_c]$ sous une forme particulièrement élégante, qui a été proposée par Kuhn et Tucker [12], et qui fait jouer des rôles analogues aux coordonnées du vecteur programme $\bar{x}$, d'une part, et aux multiplicateurs $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$, d'autre part.

Le Problème $[II_c]$ *est entièrement équivalent au Problème* $[IV_c]$ *suivant :*

Pb $[IV_c]$

Déterminer deux "vecteurs multiplicateurs"

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n) \geqslant 0 \ , \qquad \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_p) \ ,$$

et un "vecteur programme" $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$, *tels que* "la fonction de Kuhn et Tucker" t *des variables vectorielles* x et λ, μ, *définie par*

$$\boxed{t(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_j \lambda_j g_j(x) + \sum_k \mu_k h_k(x)}$$

présente un "col" *au point* $\bar{x}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ *sous les contraintes* $\lambda \geqslant 0$, *c'est-à-dire tels que*

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^m \ , \quad t(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant t(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant t(\bar{x}, \lambda, \mu) \ , \ \forall (\lambda, \mu) | \lambda \geqslant 0}$$

En effet, la double inégalité précédente équivaut aux deux égalités suivantes (où les troisièmes membres, placés entre crochets, sont seulement donnés pour rappeler un résultat classique) :

$$\begin{cases} t(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \max\limits_{x \in R^m} t(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \left[= \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda \geq 0} \max\limits_{x \in R^m} t(x, \lambda, \mu) \right], \\ t(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda \geq 0} t(\bar{x}, \lambda, \mu) \left[= \max\limits_{x \in R^m} \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda \geq 0} t(x, \lambda, \mu) \right]. \end{cases}$$

La première égalité exprime que *la fonction de Lagrange* l *définie par* $l(x) = t(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ *présente un maximum au point* $\bar{x}$ *, pour* $x \in \mathbf{R}^m$.

La seconde égalité exprime que *la fonction linéaire affine* ψ *définie par* $\psi(\lambda, \mu) = t(\bar{x}, \lambda, \mu)$ *présente un minimum au point* $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, *pour* (λ, μ) *tel que* $\lambda \geq 0$. Il est équivalent de dire que, dans cette fonction ψ , les coefficients $g_j(\bar{x})$ des multiplicateurs λ_j doivent être nuls si $\bar{\lambda}_j > 0$ (λ_j pouvant alors croître ou décroître à partir de $\bar{\lambda}_j$), positifs ou nuls si $\bar{\lambda}_j = 0$ (λ_j ne pouvant alors que croître à partir de $\bar{\lambda}_j$) , et les coefficients $h_k(\bar{x})$ des multiplicateurs μ_k doivent être nuls. On obtient ainsi les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \bar{\lambda}_j \geq 0 , & g_j(\bar{x}) \geq 0 , & \bar{\lambda}_j\, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j \\ & & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \end{array} \right\}$$

L'équivalence des Problèmes [II_c] et [IV_c] en résulte.

De même, et plus généralement, le Problème [III_c] *est entièrement équivalent au Problème* [V_c] *suivant :*

Pb [V_c]

Déterminer deux "vecteurs multiplicateurs"

$$\bar{\lambda}^{(1)} = (\bar{\lambda}_j \mid j \in J_1) \geq 0 , \qquad \bar{\mu}^{(1)} = (\bar{\mu}_k \mid k \in K_1) ,$$

et un "vecteur programme" $\bar{x} \in \mathbf{R}$ *; tels que la* "fonction de Kuhn et Tucker" t_1 *des variables vectorielles* $x^{(1)}$ *et* $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, *définie par*

$$\boxed{t_1(x, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) = f(x) + \sum_{j \in J_1} \lambda_j\, g_j(x) + \sum_{k \in K_1} \mu_k\, h_k(x)}$$

présente un "col" *au point* $\bar{x}$, $\overline{\lambda^{(1)}}$, $\overline{\mu^{(1)}}$ *sous les contraintes*

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_j(x) \geq 0 & \text{pour} & j \in J_2 , \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} & k \in K_2 , \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda^{(1)} \geq 0 \right\},$$

c'est-à-dire tels que

$$t_1(x, \overline{\lambda^{(1)}}, \overline{\mu^{(1)}}) \leqslant t_1(\bar{x}, \overline{\lambda^{(1)}}, \overline{\mu^{(1)}}) \leqslant t_1(\bar{x}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}),$$

$$\forall x \left| \begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 \text{ pour } j \in J_2 \\ h_k(x) = 0 \text{ pour } k \in K_2 \end{cases} \right\}, \quad \text{et} \quad \forall (\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\mu}^{(1)}) \mid \lambda^{(1)} \geqslant 0$$

L'équivalence entre le Problème $[I_c]$ *et le Problème* $[IV_c]$ *ou le Problème* $[V_c]$, sous les conditions de concavité posées dans l'énoncé du Problème $[I_c]$ et sous la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 3 du § 3.2.1, *exprime les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker, sous leur seconde forme, pour les programmes concaves.*

Application au cas de la programmation linéaire.

Bien que la théorie de la dualité des programmes linéaires puisse être faite de façon élémentaire à partir du lemme de Fourier (voir le premier article du présent cahier), il est intéressant d'observer qu'elle résulte aussi très simplement des conditions de Kuhn et Tucker, sous leur seconde forme, les programmes linéaires étant des programmes concaves particuliers.

Soient en effet les deux programmes linéaires en dualité, sous forme canonique, qui ont été considérés au § 3.1 du premier article :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \underset{(1,m)}{x}\ \underset{(m,n)}{A} \geqslant \underset{(1,n)}{b} \\ \underset{(1,m)}{x} \geqslant \underset{(1,m)}{0} \end{cases} \qquad \underset{(1,m)}{x}\ \underset{(m,1)}{c} \quad \text{minimum}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \underset{(m,n)}{A}\ \underset{(n,1)}{y} \leqslant \underset{(m,1)}{c} \\ \underset{(n,1)}{y} \geqslant \underset{(n,1)}{0} \end{cases} \qquad \underset{(1,n)}{b}\ \underset{(n,1)}{y} \quad \text{maximum}$$

D'après les conditions de Kuhn et Tucker, où l'on conserve explicitement les contraintes de signe, *chacun de ces deux programmes est équivalent au problème de "col" suivant :*

Déterminer deux vecteurs $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ et $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$

tels que la "fonction de Kuhn et Tucker" *des variables vectorielles* x *et* y, *défini par*

$$\boxed{t(x, y) = xc - x\,Ay + by = xc - (xA - b)y = x(c - Ay) + by}$$

présente un "col" *au point* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *sous les contraintes* $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, *c'est-à-dire tels que*

$$\boxed{\forall y \geqslant 0 , \quad t(\bar{x}, y) \leqslant t(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant t(x, \bar{y}) , \quad \forall x \geqslant 0}$$

[Le vecteur y joue le rôle de "vecteur multiplicateur" pour le programme (I), tandis que le vecteur x joue ce rôle pour le programme (II).]

Les relations d'exclusion s'écrivent

$$(\bar{x}A - b)\,\bar{y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{x}(c - A\bar{y}) = 0 ,$$

de sorte que

$$\boxed{t(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}c = b\bar{y}}$$

ce qui établit le théorème fondamental de dualité [16].

[On formerait de même, sans difficulté, le problème de "col" équivalent à chacun des deux programmes linéaires en dualité (I_g) et (II_g), sous forme générale, qui ont été considérés au § **3.3.** du premier article.

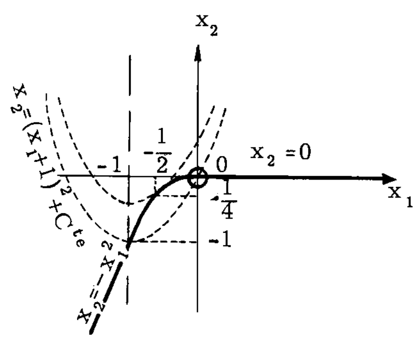
3.2.4. *Application à un exemple.*

$\boxed{1°}$ *Soit à déterminer un vecteur* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, *maximisant*

$$f(x) = -(x_1 + 1)^2 + x_2$$

sous les contraintes

$$\boxed{\begin{cases} g_1(x) = x_1 \max\{-x_1 , 0\} - x_2 \geqslant 0 \\ g_2(x) = \qquad\qquad\qquad\quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}}$$



Les fonctions f, g_1, g_2 sont définies sur $\mathbf{R}^2$. La fonction f est concave, la fonction g_2 est linéaire, et, puisque

$$g_1(x) = \begin{cases} -x_1^2 - x_2 & \text{pour } x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 & \text{pour } x_1 \geqslant 0 \end{cases},$$

la fonction g_1 est concave.

Les fonctions f, g_1, g_2 sont de plus différentiables en tout point.

Mais *la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 3 du* § 3.2.1. *n'est pas vérifiée*, puisque le domaine $C \subset \mathbf{R}^2$ défini par les contraintes se réduit à l'ensemble des points x tels que $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 = 0$ (c'est-à-dire, graphiquement, le demi-axe Ox_1), de sorte que le système $\begin{Bmatrix} g_1(x) > 0 \\ g_2(x) \geqslant 0 \end{Bmatrix}$ n'a pas de solution (alors que la fonction g_1 *n'est pas* linéaire affine).

Il est évident, algébriquement ou graphiquement, que *la fonction* f *atteint son maximum sur* C *au point* $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *qui est donc la solution du problème.*

Conformément au Théorème 1 du § 3.2.1., il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls, $\bar{\gamma}$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ tels que

$$l(x) = \bar{\gamma}\,[-(x_1+1)^2 + x_2] + \bar{\lambda}_1\,[x_1 \max\{-x_1, 0\} - x_2] + \bar{\lambda}_2 x_2 \leqslant l(\bar{x}), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^2,$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\gamma} \geqslant 0\,; & & \\ \bar{\lambda}_1 \geqslant 0\,, & \bar{x}_1 \max\{-\bar{x}_1, 0\} - \bar{x}_2 \geqslant 0\,, & \bar{\lambda}_1[\bar{x}_1 \max\{-\bar{x}_1, 0\} - \bar{x}_2] = 0\,; \\ \bar{\lambda}_2 \geqslant 0\,, & \bar{x}_2 \geqslant 0\,, & \bar{\lambda}_2\,\bar{x}_2 = 0\,. \end{cases}$$

On voit sans peine [par exemple en annulant les dérivées partielles de $l(x)$] que ces conditions sont vérifiées si, et seulement si,

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \geqslant 0\,, \\ \bar{x}_2 = 0\,, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{\gamma} = 0\,, \\ \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2\,. \end{cases}$$

Il n'existe donc pas de fonction de Lagrange (*avec* $\bar{\gamma} > 0$) *dont la maximisation donne la solution du problème.* Et les conditions précédentes sont nécessaires, mais non suffisantes, pour que $\bar{x}$ soit solution. (En fait, elles sont vérifiées par tout point du domaine C défini par les contraintes.)

$\boxed{2°}$ *On pourrait poser le même problème d'une manière plus simple, en définissant le domaine* C *par les contraintes linéaires*

$$\boxed{\begin{cases} g(x) = x_1 \geqslant 0 \\ h(x) = x_2 = 0 \end{cases}}$$

Ces contraintes, équivalentes aux précédentes, présentent l'avantage de vérifier la condition de qualification posée dans le Théorème 3, du seul fait qu'elles sont linéaires et compatibles. *Et l'application des conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker permet de remplacer le problème posé par le problème équivalent suivant :*

Déterminer des multiplicateurs scalaires $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ et un vecteur $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$ tels que x maximise sur $\mathbf{R}^2$ la valeur $l(x)$ d'une fonction de Lagrange l définie par

$$l(x) = -(x_1 + 1)^2 + x_2 + \bar{\lambda} x_1 + \bar{\mu} x_2 ,$$

avec

$$\begin{Bmatrix} \bar{\lambda} \geqslant 0 , & \bar{x}_1 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}\bar{x}_1 = 0 \\ & & \bar{x}_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

On voit sans peine que ces conditions sont vérifiées si, et seulement si,

$$\boxed{\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \bar{\lambda} = 2 , \\ \bar{\mu} = -1 . \end{cases}$$

Elles donnent donc bien la solution unique du problème posé.

$\boxed{3°}$ *Considérons maintenant le problème déduit de celui posé en* $\boxed{1°}$ *par suppression de la seconde contrainte* $x_2 \geqslant 0$.

Alors l'unique contrainte conservée vérifie la condition de qualification posée dans le Théorème 3, puisque le domaine qu'elle définit dans $\mathbf{R}^2$ possède un intérieur. *Et l'application des conditions de Kuhn et Tucker permet encore de remplacer le problème par le problème équivalent suivant :*

Déterminer un multiplicateur scalaire $\bar{\lambda}$ et un vecteur $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$ tels que $\bar{x}$ maximise sur $\mathbf{R}^2$ la valeur $l(x)$ d'une fonction de Lagrange l définie par

$$l(x) = -(x_1 + 1)^2 + x_2 + \bar{\lambda}\,[x_1 \max\{-x_1, 0\} - x_2],$$

avec

$$\bar{\lambda} \geqslant 0 , \quad \bar{x}_1 \max\{-\bar{x}_1, 0\} - \bar{x}_2 \geqslant 0 , \quad \bar{\lambda}\,[\bar{x}_1 \max\{-\bar{x}_1, 0\} - \bar{x}_2] = 0 .$$

On voit sans peine [par exemple en annulant les dérivées partielles de $l(x)$] que ces conditions sont vérifiées si, et seulement si,

$$\boxed{\begin{cases} \bar{x}_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \bar{x}_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}} \qquad \text{avec} \quad \bar{\lambda} = 1 \ .$$

Elles donnent ainsi la solution unique du problème. (Il est d'ailleurs facile de retrouver cette solution graphiquement.)

3.3. Problème de recherche de "programmes maximin".

On considèrera ici le problème suivant, dit *Problème* $[VI_c]$, qui généralise le Problème $[I_c]$ considéré au § 3.2. :

Pb $[VI_c]$

Déterminer un (ou plusieurs) "vecteur programme" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, *maximisant la plus petite des valeurs* $f_r(x)$ $(r \in \{1, 2, \dots, t\})$ *prises au point* x *par* t "fonctions économiques" *concaves* f_r, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ les fonctions } g_j \text{ étant } \textit{concaves,} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\}, \text{ les fonctions } h_k \text{ étant } \textit{linéaires affines}. \end{cases}$$

Les fonctions f_r, g_j, h_k *sont supposées définies sur* $\mathbf{R}^m$ (ce qui n'est d'ailleurs pas essentiel).

Ces contraintes compatibles définissent une partie convexe fermée non vide C de $\mathbf{R}^m$, et la fonction v définie par

$$v(x) = \min_r f_r(x)$$

est concave, puisque, pour tout couple de points $\bar{x}$, x de $\mathbf{R}^m$ et pour tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} v((1-\lambda)\,\bar{x} + \lambda x) = f_{r_m}((1-\lambda)\,\bar{x} + \lambda x) &\geqslant (1-\lambda)\, f_{r_m}(\bar{x}) + \lambda f_{r_m}(x) \\ &\geqslant (1-\lambda)\, v(\bar{x}) + \lambda v(x) \ . \end{aligned}$$

Le Problème VI revient donc à *maximiser la fonction concave* v *sur le convexe fermé non vide* $C \subset \mathbf{R}^m$. (On a vu au § 3.2. qu'un tel problème admet au moins une solution $\bar{x} \in C$ dans des cas assez généraux, et en particulier si le fermé C est borné.)

On voit ainsi l'analogie qui existe entre le Problème $[I_c]$ et le Problème $[VI_c]$, qui diffèrent seulement par le mode de définition de la fonction concave à maximiser.

On pourrait encore mettre le Problème $[VI_c]$ sous la forme du problème d'optimisation suivant, qui porte sur la variable vectorielle $\binom{x}{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \\ v \end{pmatrix}$:

Pb $[VI'_c]$ *Maximiser la fonction économique linéaire* v *, sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} f_r(x) - v \geqslant 0 & \text{pour } r \in \{1, 2, \dots, t\}, \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\}. \end{cases}$$

3.3.1. *Théorèmes de base.*

Dire que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du Problème $[VI_c]$ revient à dire que *le système des* (t + n + p) *relations*

$$(VI_c) \quad \boxed{\begin{cases} f_r(x) - v(\bar{x}) > 0\,, & \text{pour } r \in \{1, 2, \dots, t\} \\ g_j(x) \geqslant 0\,, & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ h_k(x) = 0\,, & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}} \quad \left[\text{avec } v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})\right]$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^m$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* $(\overline{VI}_c)$ que l'on obtient à partir du système (VI_c) en remplaçant les t inégalités au sens strict par des inégalités au sens large.

Les trois lemmes fondamentaux établis au § 3.1. conduisent alors, quand on les applique au système (VI_c), aux trois théorèmes suivants, qui généralisent ceux du § 3.2.1. et s'établissent de la même manière.

Théorème 1^{bis}. – *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* $[VI_c]$, *il existe un nombre* $v(\bar{x})$ *et des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$(\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \ldots, \bar\gamma_t), \quad (\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots, \bar\lambda_n), \quad (\bar\mu_1, \bar\mu_2, \ldots, \bar\mu_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar\gamma_r\ f_r(x) + \sum_j \bar\lambda_j\ g_j(x) + \sum_k \bar\mu_k\ h_k(x) \leqslant \left(\sum_r \bar\gamma_r\right) v(\bar x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^m}$$

avec $$\left\{\begin{array}{llll} \bar\gamma_r \geqslant 0, & f_r(\bar x) - v(\bar x) \geqslant 0, & \bar\gamma_r (f_r(\bar x) - v(\bar x)) = 0 & \text{pour tout } r; \\ \bar\lambda_j \geqslant 0, & g_j(\bar x) \geqslant 0, & \bar\lambda_j g_j(\bar x) = 0 & \text{pour tout } j; \\ & & h_k(\bar x) = 0 & \text{pour tout } k. \end{array}\right\}$$

Il est intéressant d'observer que *la fonction* l *est une fonction concave sur* $\mathbf{R}^m$, et que *l'inégalité encadrée exprime, compte tenu des relations d'exclusion, que* $l(x)$ *atteint son maximum* $l(\bar x) = \left(\sum_r \bar\gamma_r\right) v(\bar x)$ pour $x = \bar x$.

Théorème 2^{bis}.– *S'il existe un point* $\bar x \in \mathbf{R}^m$, *un nombre* $v(\bar x)$ *et des multiplicateurs scalaires*

$$(\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \ldots, \bar\gamma_t), \quad (\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots, \bar\lambda_n), \quad (\bar\mu_1, \bar\mu_2, \ldots, \bar\mu_p)$$

qui vérifient les conditions posées dans le Théorème 1^{bis}, *les multiplicateurs* $(\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \ldots, \bar\gamma_t)$ *étant de plus non tous nuls* (ce qui permet de prendre $\sum_r \bar\gamma_r = 1$), *le point* $\bar x$ *est solution du Problème* [VI_c] (et cela, sans aucune hypothèse restrictive sur les fonctions f_r, g_j, h_k).

Il faut observer que *les conditions ainsi posées impliquent* $v(\bar x) = \min_r f_r(\bar x)$.

Théorème 3^{bis}. – Si les contraintes du Problème [VI_c] vérifient la "*condition de qualification*" posée dans le Théorème 3 du § 3.2.1., c'est-à-dire *si le système des* $(n + p)$ *relations*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lllll} g_j(x) > 0 & \text{pour tout } j & \text{tel que } g_j & \text{ne soit pas} & \text{linéaire affine} \\ g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour tout } j & \text{tel que } g_j & \text{soit} & \text{linéaire affine} \\ h_k(x) = 0 & \text{pour tout } k & (\text{les } h_k & \text{étant linéaires} & \text{affines}) \end{array}\right.}$$

admet une solution $x^* \in \mathbf{R}^m$,

– *alors les conditions posées dans le Théorème* 2^{bis} *sont nécessaires et suffisantes pour que le point* $\bar x$ *soit solution du Problème* [VI_c].

[Et l'on peut reprendre ici le N. B. du Théorème 3.]

3.3.2. *Conditions de Kuhn et Tucker.*

Le Théorème 3^{bis} du § 3.3.1. établit, sous certaines conditions, l'équivalence entre un *problème de recherche de "programmes maximin" sous contraintes* (Problème [VI_c]) et un *problème de maximisation sans contraintes d'une fonction analogue à une fonction de Lagrange* (Problème [VII_c]) qui peut être énoncé de la façon suivante :

Pb[VII_c]

Déterminer un système de multiplicateurs scalaires

$$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t), \quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n), \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p),$$

un "vecteur programme" $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *et un nombre* $v(\bar{x})$, *tels que le vecteur* $\bar{x}$ *maximise sur* $\mathbf{R}^m$ *la valeur* $l(x)$ *d'une fonction* l *définie par*

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x)}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{llll} \sum_r \bar{\gamma}_r = 1, & & & \\ \bar{\gamma}_r \geq 0, \; f_r(\bar{x}) - v(\bar{x}) \geq 0, & \bar{\gamma}_r (f_r(\bar{x}) - v(\bar{x})) & = 0 & \text{pour tout } r \\ \bar{\lambda}_j \geq 0, \; g_j(\bar{x}) \geq 0, & \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) & = 0 & \text{pour tout } j \\ & h_k(\bar{x}) & = 0 & \text{pour tout } k \end{array}\right\}$$

$$[\text{d'où } l(\bar{x}) = v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})].$$

L'équivalence entre le Problème [VI_c] *et le Problème* [VII_c], sous les conditions de concavité posées dans l'énoncé du Problème [VI_c] et sous la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 3^{bis}, *exprime ici les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker* [12].

On pourrait d'ailleurs retrouver ces conditions à partir du problème d'optimisation [VI'_c] équivalent au Problème [VI_c].

Remarque. – *Si, de plus, la fonction* l, *qui est concave, est différentiable au point* $\bar{x}$,

$$\boxed{[l(x) \leq l(\bar{x}), \; \forall x \in \mathbf{R}^m] \Longleftrightarrow [\nabla l(\bar{x}) = 0] \Longleftrightarrow \left[\frac{\partial l(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\}\right]}$$

Il en résulte que l'on dispose alors de $(m + 1 + t + n + p)$ égalités, en plus des $(2t + 2n)$ conditions de signe, pour déterminer les $(m + 1 + t + n + p)$ inconnues scalaires du Problème $[VII_c]$: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$, $v(\bar{x})$, $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t)$, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$. (Cela n'implique évidemment pas, a priori, que le problème en question ait une solution, ni qu'il ait une solution unique.)

Complément.- On peut observer que *le Problème* $[VII_c]$ *se déduit du Problème* $[II_c]$ *par substitution de la fonction concave* $\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x)$, *combinaison linéaire convexe des* $f_r(x)$, *à la fonction concave* $f(x)$, les coefficients $\bar{\gamma}_r$ étant soumis à des conditions qui font seulement intervenir les valeurs $f_r(\bar{x})$ et le nombre $v(\bar{x})$.

On déduit alors des résultats obtenus au § 3.2.2. que, *si les Problèmes* $[VI_c]$ *et* $[VII_c]$ *sont équivalents, il existe une classe de problèmes intermédiaires, tous équivalents au Problème* $[VI_c]$, *dans lesquels certaines des contraintes du Problème* $[VI_c]$ *interviennent dans la fonction* l *tandis que les autres contraintes sont conservées explicitement* (par exemple les conditions de signe).

On pourrait aussi, comme au § 3.2.3., mettre ces problèmes sous la forme de *problèmes de recherche d'un* "col" *d'une fonction de plusieurs variables vectorielles* x *et* γ, λ, μ, *définie par*

$$\boxed{t(x, \gamma, \lambda, \mu) = \sum_r \gamma_r f_r(x) + \sum_j \lambda_j g_j(x) + \sum_k \mu_k h_k(x)}$$

Il s'agit, dans un tel problème, de déterminer un point $\bar{x}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ tel que

$$t(x, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant t(\bar{x}, \bar{\gamma}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant t(\bar{x}, \gamma, \lambda, \mu),$$

sous les contraintes en x conservées explicitement (s'il en existe), et sous les contraintes $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_t = 1$, $\gamma \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$.

Il est facile de retrouver, à partir de cette condition de col, les conditions de signe et les relations d'exclusion posées dans le Problème $[VII_c]$.

(On pourrait d'ailleurs former des "problèmes de col" entièrement équivalents aux précédents, mais faisant intervenir explicitement la variable scalaire v à côté de la variable vectorielle x, en appliquant la méthode du § 3.2.3. au problème d'optimisation $[VI'_c]$ équivalent au Problème $[VI_c]$.)

3.4. Problème de recherche de "programmes extrêmes".

On considérera ici le problème suivant, dit Problème [$VIII_c$], qui généralise d'une autre manière le Problème [I_c] considéré au § 3.2. :

Pb [$VIII_c$]

Déterminer des "vecteurs programmes" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$,

rendant "extrême" *un vecteur de coordonnées* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_t(x)$, *où* $f_1, f_2, \dots, f_t$ *sont des* "fonctions économiques" *concaves, sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ les fonctions } g_j \text{ étant } \textit{concaves}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\}, \text{ les fonctions } h_k \text{ étant } \textit{linéaires affines}. \end{cases}$$

Les fonctions f_r, g_j, h_k *sont supposées définies sur* $\mathbf{R}^m$ (ce qui n'est d'ailleurs pas essentiel).

Ces contraintes compatibles définissent une partie convexe fermée non vide C de $\mathbf{R}^m$, et il s'agit de déterminer les points $\bar{x} \in C$ tels qu'il n'existe pas dans C de point x donnant à chacune des t fonctions f_r ($r \in \{1, 2, \dots, t\}$) une valeur $f_r(x) \geqslant f_r(\bar{x})$, avec inégalité stricte pour au moins une de ces fonctions.

Le Problème [$VIII_c$] *redonne donc le Problème* [I_c] *comme cas particulier quand* $t = 1$.

3.4.1. *Théorèmes de base.*

Dire que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du Problème [$VIII_c$] revient à dire qu'*aucun des* t *systèmes de* $(t + n + p)$ *relations*

$$(VIII_c) \quad \boxed{\begin{cases} f_r(x) - f_r(\bar{x}) \geqslant 0, & \text{pour } r \in \{1, 2, \dots, t\} \\ \textit{l'une de ces } t \textit{ inégalités étant stricte,} & \\ g_j(x) \geqslant 0, & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ h_k(x) = 0, & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}}$$

n'admet de solution $x \in \mathbf{R}^m$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* ($\overline{VIII_c}$) que l'on obtient à partir de chacun des systèmes ($VIII_c$) en remplaçant l'inégalité au sens strict par une inégalité au sens large.

Les trois lemmes fondamentaux établis au § 3.1. conduisent alors, quand on les applique aux systèmes ($VIII_c$), aux trois théorèmes suivants, qui généralisent ceux du § 3.2.1. et s'établissent de la même manière.

Théorème 1^{ter}.– *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* [$VIII_c$], *il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$(\bar{\gamma}_1 , \bar{\gamma}_2 , \ldots , \bar{\gamma}_t) , \quad (\bar{\lambda}_1 , \bar{\lambda}_2 , \ldots , \bar{\lambda}_n) , \quad (\bar{\mu}_1 , \bar{\mu}_2 , \ldots , \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x) \leqslant \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(\bar{x}) , \quad \forall x \in \mathbf{R}^m}$$

$$\textit{avec} \left\{ \begin{array}{llll} \bar{\gamma}_r \geqslant 0 & & & \text{pour tout } r ; \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0 , & g_j(\bar{x}) \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j ; \\ & & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k . \end{array} \right.$$

Il est intéressant d'observer que *la fonction* l *est une fonction concave sur* $\mathbf{R}^m$, et que *l'inégalité encadrée exprime, compte tenu des relations d'exclusion, que* $l(x)$ *atteint son maximum* $l(\bar{x}) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(\bar{x})$ *pour* $x = \bar{x}$.

Théorème 2^{ter}.– *S'il existe un point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *et des multiplicateurs scalaires*

$$(\bar{\gamma}_1 , \bar{\gamma}_2 , \ldots , \bar{\gamma}_t) , \quad (\bar{\lambda}_1 , \bar{\lambda}_2 , \ldots , \bar{\lambda}_n) , \quad (\bar{\mu}_1 , \bar{\mu}_2 , \ldots , \bar{\mu}_p)$$

qui vérifient les conditions posées dans le Théorème 1^{ter}, *les multiplicateurs* $(\bar{\gamma}_1 , \bar{\gamma}_2 , \ldots , \bar{\gamma}_t)$ *relatifs aux* t *fonctions économiques* f_r *étant de plus tous strictement positifs* (ce qui permet de prendre $\sum_r \bar{\gamma}_r = 1$), *le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [$VIII_c$] (et cela, sans aucune hypothèse restrictive sur les fonctions f_r, g_j, h_k).

Théorème 3^{ter}.– Si chacun des t systèmes de $(t - 1 + n + p)$ relations déduits des t systèmes ($VIII_c$) par suppression de l'inégalité stricte vérifie une "*condition de qualification*" analogue à celle posée dans le Théorème 3 du § 3.2.1., c'est-à-dire *si chacun des* t *systèmes, déduits de* ($VIII_c$) *par suppression de l'une des* t *inégalités*

$f_r(x) - f_r(\bar{x}) \geqslant 0$ *et transformation en inégalités strictes des inégalités au sens large faisant intervenir une fonction* f_r *ou* g_j *non linéaire affine, admet une solution* $x^r \in \mathbf{R}^m$ $(r \in \{1, 2, \ldots, t\})$,

- alors les conditions posées dans le Théorème 2^{ter} *sont nécessaires et suffisantes pour que le point* $\bar{x}$ *soit solution du Problème* [$\mathrm{VIII_c}$].

En effet ces conditions, qui sont toujours suffisantes d'après le Théorème 2^{ter}, deviennent ici nécessaires pour que $\bar{x}$ soit solution du Problème [$\mathrm{VIII_c}$] puisque, en vertu des conditions de qualification posées, l'impossibilité de chacun des t systèmes ($\mathrm{VIII_c}$) implique l'existence de t fonctions l_r $(r \in \{1, 2, \ldots, t\})$ possédant les propriétés de la fonction l du Théorème 1^{ter} et telles que dans $l_r(x)$ le multiplicateur $\bar{\gamma}_r$ soit strictement positif. La somme de ces t fonctions l_r est alors une fonction l possédant toutes les propriétés indiquées dans le Théorème 2^{ter}.

N. B. - *Dans le cas particulier important où toutes les contraintes du Problème* [$\mathrm{VIII_c}$] *sont linéaires, et où de plus les* t *fonctions économiques* f_r *sont linéaires affines, les conditions de qualification posées dans le Théorème* 3^{ter} *sont vérifiées* (le point $\bar{x}$, par exemple, jouant alors le rôle des points x^r).

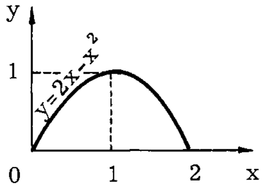
Remarque.- Les "conditions de qualification" posées dans le Théorème 3^{ter} ne sont pas seulement des conditions de qualification des contraintes du Problème [$\mathrm{VIII_c}$] puisqu'elles font intervenir aussi les t fonctions économiques f_r et le point $\bar{x}$. Elles impliquent cependant la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 3 du § 3.2.1., mais, lorsque cette condition est remplie, *il se peut que certains programmes extrêmes* $\bar{x}$ *soient* "qualifiés", *en ce sens qu'ils vérifient les conditions du Théorème* 2^{ter}, *tandis que d'autres ne le sont pas.*

On peut alors dire que *les conditions posées dans le Théorème* 2^{ter} *sont nécessaires et suffisantes pour que le point* $\bar{x}$ *soit solution* *qualifiée* (ou *"propre"*) *du Problème* [$\mathrm{VIII_c}$].

Exemple.- *Soit à déterminer les points* $x \in \mathbf{R}$, *rendant extrême le vecteur de coordonnées*

$$f_1(x) = x \ , \quad f_2(x) = y = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \ ,$$

sous les contraintes $x \geqslant 0$ et $2x - x^2 \geqslant 0$.



On voit immédiatement que les points solutions sont les points $\bar{x} \in [1\ ,\ 2]$, mais que le point $\bar{x} = 1$ n'est pas solution qualifiée puisque ce point, qui ne bloque aucune des deux contraintes, maximise $f_2(x)$ mais ne maximise aucune combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de $f_1(x)$ et $f_2(x)$. On vérifie d'ailleurs que les conditions de qualification du Théorème 3^{ter} ne sont pas remplies par le point $\bar{x} = 1$, puisque le système $\left\{\begin{matrix} 2x - x^2 > 1 \\ x \geqslant 0 \end{matrix}\right\}$ est impossible.

3.4.2. *Conditions de Kuhn et Tucker.*

Le Théorème 3^{ter} du § 3.4.1. établit, sous certaines conditions, l'équivalence entre un *problème de recherche de "programmes extrêmes" sous contraintes* (Problème $[VIII_c]$) et un *problème de maximisation sans contraintes d'une fonction analogue à une fonction de Lagrange* (Problème $[IX_c]$) qui peut être énoncé de la façon suivante :

Pb $[IX_c]$

Déterminer des systèmes de multiplicateurs scalaires

$(\bar{\gamma}_1\ ,\ \bar{\gamma}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{\gamma}_t)\ ,\quad (\bar{\lambda}_1\ ,\ \bar{\lambda}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{\lambda}_n)\ ,\quad (\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{\mu}_p)\ ,$

et des "vecteurs programmes" $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$, *tels que le vecteur* $\bar{x}$ *maximise sur* $\mathbf{R}^m$ *la valeur* $l(x)$ *d'une fonction* l *définie par*

$$\boxed{l(x) = \sum_r \bar{\gamma}_r\, f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\, h_k(x)}$$

avec $\left\{\begin{matrix} \bar{\gamma}_r > 0 & & & \text{pour tout } r \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0\ , & g_j(\bar{x}) \geqslant 0\ , & \bar{\lambda}_j\, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j \\ & & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \end{matrix}\right\}$

[d'où $l(\bar{x}) = \sum_r \bar{\gamma}_r\ f_r(\bar{x})$] .

L'équivalence entre le Problème $[VIII_c]$ *et le Problème* $[IX_c]$, sous les conditions de concavité posées dans l'énoncé du Problème $[VIII_c]$ et sous les conditions de qualification posées dans le Théorème 3^{ter}, *exprime ici les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker* [12] .

Remarque.- Si, de plus, la fonction l , *qui est concave, est différentiable au point* $\bar{x}$,

$$\left[l(x) \leqslant l(\bar{x}),\ \forall x \in \mathbf{R}^m\right] \Longleftrightarrow [\nabla l(\bar{x}) = 0] \Longleftrightarrow \left[\frac{\partial l(\bar{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}\right]$$

[Il en résulte que l'on dispose alors de $(m + n + p)$ égalités, en plus des $(t + 2n)$ conditions de signe, pour déterminer les $(t + m + n + p)$ inconnues scalaires du Problème $[IX_c]$: $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots \bar{\gamma}_t)$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$, $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$. Cela n'implique pas, a priori, que la solution du problème en question dépende de t paramètres, mais on peut cependant aborder la résolution du problème en laissant indéterminées les valeurs des t multiplicateurs positifs $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t)$, dont la somme peut être prise égale à 1.]

<u>*Complément*</u>.– On peut observer que *le Problème* $[IX_c]$ *se déduit du Problème* $[II_c]$ *par substitution de la fonction concave* $\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x)$, *combinaison linéaire à coefficients positifs des* $f_r(x)$, *à la fonction concave* $f(x)$, sans autre condition.

On déduit alors des résultats obtenus au § 3.2.2. que, *si les Problèmes* $[VIII_c]$ *et* $[IX_c]$ *sont équivalents, il existe une classe de problèmes intermédiaires, tous équivalents au Problème* $[VIII_c]$, *dans lesquels certaines des contraintes du Problème* $[VIII_c]$ *interviennent dans la fonction* l *tandis que les autres contraintes sont conservées explicitement* (par exemple les conditions de signe).

On pourrait aussi, comme au § 3.2.3., mettre ces problèmes sous la forme de *problèmes de recherche d'un* "col" *d'une fonction de plusieurs variables vectorielles* $(x$ et $\lambda, \mu)$, dans lesquels les t multiplicateurs positifs $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t)$ joueraient le rôle de paramètres arbitraires.

4. CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER POUR LES PROGRAMMES LINEARISABLES

On va maintenant reprendre les problèmes qui ont été considérés au § 3 dans le cas concave, en remplaçant les hypothèses de concavité par des hypothèses de différentiabilité qui permettront de définir des *problèmes linéarisés*, ou *problèmes tangents*, au voisinage des points solutions. Les conditions de Kuhn et Tucker pour ces problèmes linéarisés résultent des conditions obtenues dans le cas des problèmes concaves, ou plus directement du lemme de Fourier (établi dans le premier article du présent cahier).

On montrera que, sous certaines conditions de qualification [1, 2 et 4], les conditions de Kuhn et Tucker relatives aux problèmes linéarisés donnent des conditions nécessaires, mais non suffisantes, pour les problèmes linéarisables [12]. On donnera enfin certaines conditions impliquant que les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes.

4.1. Problème d'optimisation sous contraintes.

On considérera ici le problème suivant, dit Problème [I] :

Pb[I]

Déterminer un (ou plusieurs) "vecteur programme" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, *maximisant, au moins localement, la valeur* $f(x)$ *d'une* "fonction économique" f, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \ldots, p\}. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe au moins un point solution $\bar{x}$, *que les fonctions* f, g_j, h_k *sont définies sur une partie ouverte de* $\mathbf{R}^m$ *comprenant* $\bar{x}$, *soit* $\Omega(\bar{x}) \subset \mathbf{R}^m$, *et qu'elles sont différentiables au point* $\bar{x}$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \Omega(\bar{x})$,

$$\begin{cases} f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}), \\ \qquad \text{avec} \quad \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{o(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0, \\ g_j(x) = g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) + o_j(x - \bar{x}), \\ \qquad \text{avec} \quad \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{o_j(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0, \\ h_k(x) = h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) + o_k(x - \bar{x}), \\ \qquad \text{avec} \quad \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{o_k(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0, \end{cases}$$

$\nabla f(\bar{x})$, $\nabla g_j(\bar{x})$, $\nabla h_k(\bar{x})$ désignant les *vecteurs dérivés,* ou *"gradients"*, des fonctions f, g_j, h_k au point solution $\bar{x}$ (voir § 2.2.).

Les contraintes compatibles du problème définissent une partie non vide C de $\mathbf{R}^m$ comprenant $\bar{x}$, et l'on peut toujours supposer le voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$ assez petit pour que *le point* *solution* $\bar{x}$ *maximise la valeur* $f(x)$ *de la fonction* f *sur l'ensemble non vide* $(\Omega(\bar{x}) \cap C) \subset \mathbf{R}^m$.

[Les valeurs éventuellement prises par les fonctions f , g_j , h_k en des points extérieurs à un tel voisinage $\Omega(\bar{x})$ n'interviendront pas dans la suite.]

4.1.1. *Problème linéarisé au voisinage d'un point solution. Conditions de Kuhn et Tucker.*

Le problème tangent au Problème [I] au point solution $\bar{x}$, ou problème linéarisé au voisinage de ce point, est, par définition, le Problème $[I_l]$ suivant :

$$\text{Pb}[I_l] \quad \left[\begin{array}{l} \textit{Maximiser} \quad f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \, , \\ \textit{sous les contraintes} \\ \begin{cases} g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1 , 2 , \ldots , n\} , \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour } k \in \{1 , 2 , \ldots , p\} . \end{cases} \end{array}\right.$$

(Il s'agit évidemment d'un problème de programmation linéaire.)

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[I_l]$ *si, et seulement si, le système des* $(1 + n + p)$ *relations linéaires*

$$(I_l) \quad \boxed{\begin{cases} \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 & \\ g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1 , 2 , \ldots , n\} \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \, , & \text{pour } k \in \{1 , 2 , \ldots , p\} \end{cases}}$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^m$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* $[\bar{I}_l]$ que l'on obtient à partir du système $[I_l]$ en remplaçant l'inégalité au sens strict par une inégalité au sens large.

D'après le Théorème 3 du § 3.2.1. (où la condition de qualification est vérifiée par les contraintes du Problème $[I_l]$ du fait qu'elles sont linéaires et compatibles), ou, plus simplement, d'après le lemme de Fourier (voir le premier article du présent cahier) appliqué au système linéaire (I_l), on obtient les conditions (II_l) suivantes :

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[I_l]$ *si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires* (éventuellement tous nuls)

$$(\bar{\lambda}_1 , \bar{\lambda}_2 , \ldots , \bar{\lambda}_n) \; , \quad (\bar{\mu}_1 , \bar{\mu}_2 , \ldots , \bar{\mu}_p)$$

(II_l) | qui permettent de former, par combinaison linéaire, une *"fonction de Lagrange"* l telle que

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla \left[f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j \, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k \, h_k(x) \right]_{x=\bar{x}} = 0}$$

avec $\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\lambda}_j \geqslant 0 \; , \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0 \; , \quad \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j \\ h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \end{array} \right\}$

$$[\text{d'où } \; l(\bar{x}) = f(\bar{x})] \; .$$

[La mise en évidence de l'impossibilité du système (I_l) sous forme purement numérique par combinaison linéaire, selon le lemme de Fourier, donne immédiatement la relation encadrée, et l'inégalité

$$\sum_j \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) + \sum_k \bar{\mu}_k \, h_k(\bar{x}) \leqslant 0$$

qui, compte tenu des conditions de signe $\bar{\lambda}_j \geqslant 0$ et des contraintes $g_j(\bar{x}) \geqslant 0$ et $h_k(\bar{x}) = 0$, équivaut aux relations d'exclusion $\bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0$.]

Les conditions (II_l)*, nécessaires et suffisantes pour que le point* $\bar{x}$ *soit solution du problème linéarisé* $[I_l]$*, sont les conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème.* On voit que seules les contraintes bloquées (ou serrées) au point $\bar{x}$, dans le Problème [I] comme dans le Problème $[I_l]$, peuvent intervenir avec un multiplicateur non nul dans la fonction de Lagrange l , ce qui était prévisible puisque les contraintes non bloquées au point $\bar{x}$ sont vérifiées, sans autre condition, sur un voisinage de $\bar{x}$.

Complément.– D'après les résultats obtenus au § 3.2.2., *on peut encore n'introduire dans la fonction de Lagrange que certaines des contraintes du Problème* $[I_l]$ *en conservant explicitement les autres* (par exemple les conditions de signe).

Si l'on désigne

- par $\{J_1 , J_2\}$ une partition de l'ensemble $J = \{1 , 2, \dots , n\}$,
- par $\{K_1, K_2\}$ une partition de l'ensemble $K = \{1 , 2, \dots , p\}$,

les conditions (II_l) sont donc équivalentes aux conditions (III_l) suivantes :

| *Le point* $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[I_l]$ *si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires*

$$\bar{\lambda}_j \quad \text{pour} \quad j \in J_1 \; , \qquad \bar{\mu}_k \quad \text{pour} \quad k \in K_1 \; ,$$

(III$_l$) *tels que le point* $\bar{x}$ *maximise sur* $\mathbf{R}^m$ *la valeur* $q_1(x)$ *d'une fonction linéaire* q_1 *définie par*

$$\boxed{q_1(x) = \nabla l_1(\bar{x})(x - \bar{x}) = \nabla\left[f(x) + \sum_{j \in J_1} \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_{k \in K_1} \bar{\mu}_k h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})}$$

avec $\left\{\begin{array}{lll} \bar{\lambda}_j \geqslant 0\ , \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0\ , \quad \bar{\lambda}_j\, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour} & j \in J_1\ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour} & k \in K_1\ , \end{array}\right\}$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{lll} g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour} & j \in J_2\ , \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour} & k \in K_2\ . \end{array}\right.$$

D'après les résultats obtenus au § 3.2.3., il est possible de mettre les conditions (II$_l$) et (III$_l$) sous une forme qui fait jouer des rôles analogues aux coordonnées du point $\bar{x}$, d'une part, et aux multiplicateurs $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$, d'autre part.

Les conditions (II$_l$) sont entièrement équivalentes aux conditions (IV$_l$) suivantes :

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* [I$_l$] *si, et seulement si, il existe deux* "vecteurs multiplicateurs"

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n) \geqslant 0\ , \qquad \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)\ ,$$

tels que la fonction bilinéaire s *des variables vectorielles* x *et* λ, μ, *définie par*

(IV$_l$)

$$\boxed{\begin{aligned} s(x, \lambda, \mu) &= f(\bar{x}) + \sum_j \lambda_j\, g_j(\bar{x}) + \sum_k \mu_k\, h_k(\bar{x}) \\ &\quad + \nabla\left[f(x) + \sum_j \lambda_j\, g_j(x) + \sum_k \mu_k\, h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) \end{aligned}}$$

présente un "col" *au point* $\bar{x}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ *sous les contraintes* $\lambda \geqslant 0$, *c'est-à-dire tels que*

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^m\ , \quad s(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant s(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant s(\bar{x}, \lambda, \mu)\ , \qquad \forall \lambda, \mu \,|\, \lambda \geqslant 0}$$

[On sait que la double inégalité précédente équivaut aux deux égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} s(\bar{x}\,,\bar{\lambda}\,,\bar{\mu}) = \max\limits_{x\in R^m} s(x,\bar{\lambda}\,,\bar{\mu}) = \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda\geqslant 0}\ \max\limits_{x\in R^m} s(x\,,\lambda\,,\mu)\,, \\ s(\bar{x}\,,\bar{\lambda}\,,\bar{\mu}) = \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda\geqslant 0} s(\bar{x}\,,\lambda\,,\mu) = \max\limits_{x\in R^m}\ \min\limits_{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda\geqslant 0} s(x\,,\lambda\,,\mu)\,. \end{array}\right]$$

De même, et plus généralement, les conditions (III_l) sont entièrement équivalentes aux conditions (V_l) suivantes :

(V_l)

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* [I_l] *si, et seulement si, il existe deux* "vecteurs multiplicateurs"

$$\overline{\lambda^{(1)}} = (\bar{\lambda}_j \mid j \in J_1) \geqslant 0\,, \qquad \overline{\mu^{(1)}} = (\bar{\mu}_k \mid k \in K_1)\,,$$

tels que la fonction bilinéaire s_1 *des variables vectorielles* x *et* $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, *définie par*

$$\boxed{\begin{aligned} s_1(x\,,\lambda^{(1)}\,,\mu^{(1)}) = f(\bar{x}) &+ \sum_{j\in J_1}\lambda_j\, g_j(\bar{x}) + \sum_{k\in K_1}\mu_k\, h_k(\bar{x}) \\ &+ \nabla\Big[f(x) + \sum_{j\in J_1}\lambda_j\, g_j(x) + \sum_{k\in K_1}\mu_k\, h_k(x)\Big]_{x=\bar{x}} (x-\bar{x}) \end{aligned}}$$

présente un "col" *au point* $\bar{x}$, $\overline{\lambda^{(1)}}$, $\overline{\mu^{(1)}}$ *sous les contraintes*

$$\left\{\begin{array}{llll} g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x-\bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour} & j\in J_2\,, & \\ & & & \text{et}\quad \lambda^{(1)}\geqslant 0\,, \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 & \text{pour} & k\in K_2\,, & \end{array}\right\}$$

c'est-à-dire tels que, pour tout x *et pour tout* $(\lambda^{(1)}\,,\mu^{(1)})$ *vérifiant ces contraintes,*

$$\boxed{s_1(x\,,\overline{\lambda^{(1)}}\,,\overline{\mu^{(1)}}) \leqslant s_1(\bar{x}\,,\overline{\lambda^{(1)}}\,,\overline{\mu^{(1)}}) \leqslant s_1(\bar{x}\,,\lambda^{(1)}\,,\mu^{(1)})}$$

4.1.2. *Condition générale de qualification des contraintes.*

Les conditions (II_l) et les conditions équivalentes, données au § 4.1.1., expriment que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé [I_l], tangent en $\bar{x}$ au Problème [I]. Mais elles n'expriment pas, en général, que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [I], et elles ne sont même ni nécessaires ni suffisantes pour qu'il en soit ainsi (voir §3.2.4. et §4.1.5.).

Cependant, *si les contraintes du Problème* [I] *vérifient au point* $\bar{x}$ *certaines conditions de qualification, le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [I] *que s'il est solution du problème linéarisé* [I_l].

Les conditions $[II_l]$ et les conditions équivalentes, exprimant que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé $[I_l]$, donnent alors des conditions nécessaires (mais non suffisantes, en général) pour que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [I]. *Ce sont les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker pour les programmes linéarisables.* (On sait, d'après l'étude faite au § 3.2.2., que ces conditions deviennent suffisantes pour les programmes concaves linéarisables. Et l'on montrera au § 4.1.4. qu'il en est de même dans des cas un peu plus généraux.)

On va établir ici une condition de qualification des contraintes [1 , 2 et 4], plus générale que celle donnée par Kuhn et Tucker [12] (*).

Définitions préliminaires.

Cône $L(\bar{x})$ *des demi-droites localement contraintes au point* $\bar{x} \in C$.

Le cône $L(\bar{x})$ est, par définition, l'ensemble des demi-droites issues du point $\bar{x}$ qui vérifient, au voisinage de $\bar{x}$, les contraintes du problème linéarisé $[I_l]$:

$$\boxed{L(\bar{x}) = \left\{ x \quad \text{tels que} \quad \begin{bmatrix} \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 , & \forall j \mid g_j(\bar{x}) = 0 \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 , & \forall k \end{bmatrix} \right\}}$$

Il résulte de cette définition que $L(\bar{x})$ *est un cône fermé convexe.*

Il faut aussi remarquer que *le cône* $L(\bar{x})$ *ne dépend pas seulement du domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I], *mais aussi de la forme même de ces contraintes* (voir l'exemple du § 3.2.4.).

Cône $T(\bar{x})$ *des demi-tangentes en* x *au domaine* C *défini par les contraintes.*

Le cône $T(\bar{x})$ est, par définition, l'ensemble des demi-droites issues du point $\bar{x}$ dont les points x sont tels qu'il existe une suite de points x_s convergeant vers $\bar{x}$ et appartenant au domaine C défini par les contraintes de Problème [I], et une suite de scalaires non négatifs ν_s , pour lesquelles la suite des vecteurs $\nu_s(x_s - \bar{x})$ converge vers $(x - \bar{x})$ (qui définit alors une demi-tangente en $\bar{x}$ au domaine C) :

(*) Signalons que des conditions encore plus générales, mais d'un emploi plus délicat, ont été établies par Melle M. Guignard, dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Lille.

$$\boxed{T(\bar{x}) = \left\{ x \quad \text{tels que } (x - \bar{x}) = \lim_{s\to\infty} \nu_s (x_s - \bar{x}) \text{, avec } \begin{bmatrix} x_s \in C, & \nu_s \geq 0, \forall s \\ x_s \xrightarrow[s\to\infty]{} \bar{x} & \end{bmatrix} \right\}}$$

(On donne souvent à $T(\bar{x})$ le nom de "*contingent de* C *au point* $\bar{x}$".)

Le cône $T(\bar{x})$ comprend toujours le point $\bar{x}$, et l'on montre sans peine que $T(\bar{x})$ *est fermé* [1]. Si le domaine C contient des arcs de courbe issus du point $\bar{x}$ et admettant des demi-tangentes en ce point, elles définissent des "*demi-droites accessibles en* $\bar{x}$", qui appartiennent au cône $T(\bar{x})$. Mais il peut exister des demi-tangentes en $\bar{x}$ à C qui ne soient pas des demi-droites accessibles [2].

Cône $P(\bar{x})$ *des pseudo-tangentes en* $\bar{x}$ *au domaine* C *défini par les contraintes.*

Le cône $P(\bar{x})$ est, par définition, la *fermeture convexe du cône* $T(\bar{x})$, c'est-à-dire le plus petit cône fermé convexe contenant $T(\bar{x})$. (Les pseudo-tangentes en $\bar{x}$ au domaine C sont ainsi définies comme combinaisons linéaires convexes des demi-tangentes en $\bar{x}$ au domaine C.)

Il faut remarquer que *le cône* $P(\bar{x})$, *comme le cône* $T(\bar{x})$, *dépend seulement du domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I].

Lemme 4.- *Toute pseudo-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I] *est localement contrainte au point* $\bar{x}$, *ou, autrement dit,*

$$\boxed{P(\bar{x}) \subset L(\bar{x})}$$

Puisque $L(\bar{x})$ est un cône fermé convexe et que $P(\bar{x})$ est la fermeture convexe du cône $T(\bar{x})$, il suffit de montrer que $T(\bar{x}) \subset L(\bar{x})$, c'est-à-dire que toute demi-tangente en $\bar{x}$ au domaine C est localement contrainte au point $\bar{x}$.

Or, *si* $(x - \bar{x})$ *définit une demi-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C, il existe une suite de points x_s convergeant vers $\bar{x}$ et appartenant à C, et une suite de scalaires non négatifs ν_s, *tels que*

$$x - \bar{x} = \lim_{s\to\infty} \nu_s (x_s - \bar{x}) .$$

D'autre part, les fonctions g_j et h_k étant différentiables au point $\bar{x}$, on a

$$\begin{cases} g_j(x_s) = g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x_s - \bar{x}) + o_j(x_s - \bar{x}), & \text{avec } g_j(\bar{x}) \geqslant 0, \ \forall j, \\ h_k(x_s) = h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x_s - \bar{x}) + o_k(x_s - \bar{x}), & \text{avec } h_k(\bar{x}) = 0, \ \forall k, \end{cases}$$

les rapports $\dfrac{o_j(x_s - \bar{x})}{\|x_s - \bar{x}\|}$ et $\dfrac{o_k(x_s - \bar{x})}{\|x_s - \bar{x}\|}$ tendant vers 0 quand $x_s \longrightarrow \bar{x}$.

Il en résulte que $\boxed{\begin{cases} \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0, & \forall j \mid g_j(\bar{x}) = 0 \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0, & \forall k \end{cases}}$

c'est-à-dire que *la demi-droite définie par* $(x - \bar{x})$ *est localement contrainte au point* $\bar{x}$, car, s'il en était autrement, il existerait des indices s assez grands pour que

- ou bien $\exists j \mid g_j(\bar{x}) = 0$, $\nabla g_j(\bar{x}) \nu_s(x_s - \bar{x}) < 0$ et $\nu_s g_j(x_s) < 0$,
- ou bien $\exists k \mid h_k(\bar{x}) = 0$, $\nabla h_k(\bar{x}) \nu_s(x_s - \bar{x}) \neq 0$ et $\nu_s h_k(x_s) \neq 0$,

ce qui est contradictoire avec le fait que $x_s \in C$, $\forall s$.

Le lemme 4 est ainsi établi.

Théorème 4.- *Si toute demi-droite localement contrainte au point* $\bar{x}$ *est une pseudo-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I], *le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [I] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[I_l]$.

Autrement dit, *la condition* $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$ *est une condition suffisante de qualification des contraintes du Problème* [I] *au point* $\bar{x}$. (Si elle est vérifiée, les conditions de Kuhn et Tucker données au § 4.1.1. sont nécessaires, mais non suffisantes en général, pour que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [I].)

En effet, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [I], *c'est un maximum, au moins local, de* $f(x)$ *sous les contraintes qui définissent le domaine* C. Et, la fonction f étant différentiable au point $\bar{x}$, on a, pour toute suite de points x_s convergeant vers $\bar{x}$ et appartenant à un voisinage de $\bar{x}$ sur lequel f est définie,

$$f(x_s) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x_s - \bar{x}) + o(x_s - \bar{x}), \quad \text{avec} \quad \lim_{x_s \to \bar{x}} \frac{o(x_s - \bar{x})}{\|x_s - \bar{x}\|} = 0 .$$

Il en résulte que, *si* $(x - \bar{x})$ *définit une demi-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C , c'est-à-dire si

$$x - \bar{x} = \lim_{s \to \infty} \nu_s (x_s - \bar{x}) \ , \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_s \in C \ , & \nu_s \geqslant 0 \ , \quad \forall s \ , \\ x_s \xrightarrow[s \to \infty]{} \bar{x} \ , \end{cases}$$

on a

$$\boxed{\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0}$$

car, s'il en était autrement, il existerait des indices s assez grands pour que

$$\nabla f(\bar{x}) \ \nu_s (x_s - \bar{x}) > 0 \qquad \text{et} \qquad \nu_s (f(x_s) - f(\bar{x})) > 0 \ ,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le point $\bar{x}$ maximise, au moins localement, la valeur $f(x)$ de la fonction f dans le domaine C .

Ainsi, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [I],

$$[x \in T(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0] \ ,$$

c'est-à-dire que le cône $T(\bar{x})$ est inclus dans le domaine convexe fermé (espace ou demi-espace) défini par la condition $\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0$, et il en est de même du cône $P(\bar{x})$, fermeture convexe de $T(\bar{x})$, de sorte que

$$\boxed{[x \in P(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0]}$$

Donc, *si* $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$, $[x \in L(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0]$, c'est-à-dire que *le point* $\bar{x}$, *solution du Problème* [I], *est solution du problème linéarisé* $[I_l]$.

Le théorème 4 est ainsi établi.

Réciproque du Théorème 4. – *Dans le cas particulier où il existe un voisinage ouvert* $\Omega(\bar{x})$ *du point* $\bar{x}$ *où le domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I] *est inclus dans le cône* $P(\bar{x})$ *des pseudo-tangentes en* $\bar{x}$ à C , c'est-à-dire *si le domaine* C *est localement pseudo-convexe au point* $\bar{x}$

$$\left[\exists \, \Omega(\bar{x}) \mid (\Omega(\bar{x}) \cap C) \subset P(\bar{x}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ce qui implique que les fonctions } h_k \\ \text{(s'il en existe) soient localement li-} \\ \text{néaires affines en } \bar{x} \text{ sur } C \end{array} \right) \right] ,$$

le théorème 4 admet la réciproque suivante :

Si le point $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [I] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[I_l]$, *et cela quelle que soit la fonction* f *différentiable en* $\bar{x}$, *alors* $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$.

En effet, choisissons en particulier une fonction f linéaire affine, de sorte que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) ,$$

le vecteur $\nabla f(\bar{x})$ pouvant être a priori quelconque.

Alors, compte tenu de l'hypothèse selon laquelle $(\Omega(\bar{x}) \cap C) \subset P(\bar{x})$ et de la forme particulière de la fonction f ,

- *pour tout vecteur* $\nabla f(\bar{x})$ *tel que* $[x \in P(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0]$,

on a $[x \in (\Omega(\bar{x}) \cap C)] \Longrightarrow [f(x) \leqslant f(\bar{x})]$, de sorte que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [I].

Par hypothèse, le point $\bar{x}$ est alors solution du problème linéarisé $[I_l]$, c'est-à-dire que

$$[x \in L(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0] .$$

Il en résulte que tout demi-espace fermé admettant le point $\bar{x}$ comme point frontière et contenant le cône fermé convexe $P(\bar{x})$ contient aussi le cône fermé convexe $L(\bar{x})$. Or, d'après l'un des théorèmes de séparation des domaines convexes [5], tout point qui n'appartient pas au cône fermé convexe $P(\bar{x})$ est extérieur à l'un de ces demi-espaces fermés et n'appartient donc pas non plus au cône $L(\bar{x})$, de sorte que $L(\bar{x}) \subset P(\bar{x})$.

Puisque, d'après le Lemme 4, on a toujours $P(\bar{x}) \subset L(\bar{x})$, il est ainsi établi que, *sous les hypothèses énoncées*, $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$.

Le théorème 4 et sa réciproque montrent que, *en tout point* $\bar{x}$ *où le domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [I] *est localement pseudo-convexe, la condition* $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$ *est une condition nécessaire et suffisante de qualification de ces contraintes pour toute fonction économique différentiable en* $\bar{x}$.

4.1.3. *Conditions particulières de qualification des contraintes.*

On va donner ici une condition de qualification des contraintes moins générale que celle du § 4.1.2., mais plus facile à mettre en oeuvre dans les cas auxquels elle peut s'appliquer. Cette condition peut être présentée comme corollaire de la condition générale établie au § 4.1.2., mais elle résulte aussi très simplement du lemme de Fourier établi dans le premier article du présent cahier.

On déduira ensuite de cette condition d'autres conditions de qualification des contraintes, applicables à des cas plus particuliers (1°, 2°, 3°, 4°) et à un cas qui semble plus général à certains égards (5°).

Théorème 5.- *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* [I], *où les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de* $\bar{x}$, *il existe des multiplicateurs non tous nuls*

$$\bar{\gamma}\ ,\quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)\ ,\quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla\left[\bar{\gamma} f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j\ g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\ h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} = 0}$$

$$\text{avec}\quad \left\{\begin{array}{lllll} \bar{\gamma} \geqslant 0 & & & & \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0\ , & g_j(\bar{x}) \geqslant 0\ , & \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & j \\ & & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} & k \end{array}\right\}$$

$$[\text{d'où}\quad l(\bar{x}) = \bar{\gamma} f(\bar{x})\,]\ ,$$

$\bar{\gamma}$ *et les multiplicateurs* $\bar{\lambda}_j$ *qui affectent les fonctions* g_j *non localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ (c'est-à-dire les g_j qui ne sont pseudo-convexes, ou convexes, ou linéaires affines, sur aucun voisinage ouvert de $\bar{x}$) *pouvant être choisis non tous nuls.*

En effet, si le point $\bar{x}$ est solution du Problème [I], où les fonctions h_k sont supposées localement linéaires affines en $\bar{x}$, *le système des* $(1 + n_0 + p)$ *relations linéaires* (n_0 étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$).

$$(\mathrm{I}'_l)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{ll} \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 & \\ \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ , \\ & g_j \text{ n'étant pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ , \\ & g_j \text{ étant localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \text{ (les } h_k \text{ étant localement} \\ & \text{linéaires affines en } \bar{x}) \end{array}\right.}$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^m$.

Car, s'il en était autrement, les conditions de différentiabilité des fonctions f et g_j au point $\bar{x}$, jointes à la linéarité locale des fonctions h_k en $\bar{x}$ et au fait que, *pour les fonctions* g_j *localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ (voir § 2.2.),

$$[\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0] \Longrightarrow [g_j(x) - g_j(\bar{x}) \geqslant 0] \quad \textit{si} \quad \|x - \bar{x}\| \textit{ est assez petit,}$$

impliquent qu'il existerait un voisinage ouvert de $\bar{x}$ (par exemple une boule ouverte de centre $\bar{x}$ et de rayon assez petit) dans lequel les solutions x du système (I_l') vérifieraient les relations

$$(\mathrm{I}) \qquad \boxed{\begin{cases} f(x) - f(\bar{x}) > 0 & \\ g_j(x) \geqslant 0\,, & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ h_k(x) = 0\,, & \text{pour } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le point $\bar{x}$ maximise, au moins localement, la valeur $f(x)$ de la fonction f dans le domaine C défini par les contraintes du Problème [I].

La mise en évidence de l'impossibilité du système linéaire (I_l'), *sous forme purement numérique par combinaison linéaire, selon le lemme de Fourier, donne immédiatement le Théorème 5,* si l'on observe

- que ce système ne fait pas intervenir les fonctions g_j telles que $g_j(\bar{x}) > 0$ (de sorte que les multiplicateurs $\bar{\lambda}_j$ correspondants sont nuls),

- et que son impossibilité est due à la présence d'inégalités strictes (de sorte que les multiplicateurs $\bar{\gamma}$ et $\bar{\lambda}_j$ affectant ces inégalités strictes ne sont pas tous nuls).

[N.B. - Une forme moins précise du Théorème 5 a été établie pour la première fois par Fritz John en 1948.]

<u>Théorème 6</u>.- *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], où les fonctions h_k intervenant dans les p égalités $h_k(x) = 0$ (s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de $\bar{x}$, *et si le système des* $(n_0 + p)$ *relations linéaires* (n_0 étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$(I_l'')\quad\left\{\begin{array}{ll}\nabla g_j(\bar{x})(x-\bar{x}) > 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ ,\\ & g_j \text{ n'étant pas localement pseudo-convexe en } \bar{x}\\ \nabla g_j(\bar{x})(x-\bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ ,\\ & g_j \text{ étant localement pseudo-convexe en } \bar{x}\\ \nabla h_k(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k\\ & (\text{les } h_k \text{ étant localement linéaires affines en } \bar{x})\end{array}\right.$$

admet une solution $x^* \in \mathbf{R}^n$ (*ou* $x^* - \bar{x} = X^*$) ,

- *alors le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [I] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[I_l]$.

Autrement dit, *l'existence d'une solution du système linéaire* (I_l'') *est une condition suffisante de qualification des contraintes du Problème* (I) *au point* $\bar{x}$.

[Il semble que l'affaiblissement de la condition de qualification analogue donnée dans [4], par la substitution de "pseudo-convexe" à "convexe" dans le système (I_l''), puisse présenter quelque intérêt.]

En effet, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [I], le système linéaire (I_l') considéré à propos du Théorème 5 n'admet pas de solution. Mais, puisque par hypothèse le système (I_l'') admet une solution, l'impossibilité du système (I_l') est due à la présence de l'inégalité stricte $\nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) > 0$ dont l'adjonction à (I_l'') donne (I_l').

Il en résulte que la combinaison linéaire qui met en évidence l'impossibilité du système (I_l'), selon le lemme de Fourier, fait intervenir cette inégalité avec un multiplicateur $\bar{\gamma}$ non nul. Donc $\bar{\gamma} > 0$, et, en multipliant tous les multiplicateurs par une même constante positive, on peut toujours prendre $\bar{\gamma} = 1$.

Il existe donc des multiplicateurs scalaires (éventuellement tous nuls)

$$(\bar{\lambda}_1\ ,\ \bar{\lambda}_2\ ,\ldots,\ \bar{\lambda}_n)\ ,\qquad (\bar{\mu}_1\ ,\ \bar{\mu}_2\ ,\ldots,\ \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une "*fonction de Lagrange*" l telle que

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla \Big[f(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j\ g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\ h_k(x)\Big]_{x=\bar{x}} = 0}$$

$$\text{avec}\quad\left\{\begin{array}{lr}\bar{\lambda}_j \geqslant 0\ ,\quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0\ ,\quad \bar{\lambda}_j\ g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j\\ h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k\end{array}\right\}$$

$$[\text{d'où } l(\bar{x}) = f(\bar{x})]\ ,$$

ce qui exprime, d'après les conditions (II_l) du § 4.1.1., que *le point* $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[I_l]$.

Le théorème 6 est ainsi établi.

Complément.- On peut montrer que *l'existence d'une solution* $(x^* - \bar{x}) = X^*$ *du système linéaire* (I_l'') *implique la relation*

$$L(\bar{x}) = T(\bar{x}) = P(\bar{x}) ,$$

de sorte que la condition de qualification des contraintes qui fait l'objet du Théorème 6 est un corollaire de la condition générale donnée par le Théorème 4 du § 4.1.2.

En effet, si $x \in L(\bar{x})$, c'est-à-dire si $(x - \bar{x}) = X$ définit une demi-droite localement contrainte au point $\bar{x}$, et si $(x^* - \bar{x}) = X^*$ est solution du système (I_l''), alors, pour tout scalaire $\alpha \in]0, 1]$, $((1 - \alpha)X + \alpha X^*)$ définit une demi-tangente en $\bar{x}$ au domaine C.

Car, *si l'on pose* $x_\theta = \bar{x} + \theta((1 - \alpha)X + \alpha X^*)$ *pour tout scalaire* $\theta \geq 0$, *il existe un scalaire* $\theta_0 > 0$ *assez petit pour que, si* $0 \leq \theta < \theta_0$,

$$\left\{\begin{array}{ll} [g_j(\bar{x}) > 0] & \Longrightarrow [g_j(x_\theta) > 0] , \\ [g_j(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla g_j(\bar{x})((1 - \alpha)X + \alpha X^*) > 0] & \Longrightarrow [g_j(x_\theta) > 0] , \\ \left[\begin{array}{l} g_j(\bar{x}) = 0 , \quad \nabla g_j(\bar{x})((1 - \alpha)X + \alpha X^*) \geq 0 \\ \text{et } g_j \text{ localement pseudo-convexe en } \bar{x} \end{array}\right] & \Longrightarrow [g_j(x_\theta) \geq 0] , \\ \left[\begin{array}{l} h_k(\bar{x}) = 0 , \quad \nabla h_k(\bar{x})((1 - \alpha)X + \alpha X^*) = 0 \\ \text{et } h_k \text{ localement linéaire affine en } \bar{x} \end{array}\right] & \Longrightarrow [h_k(x_\theta) = 0] , \end{array}\right.$$

d'après les conditions de différentiabilité des fonctions g_j au point $\bar{x}$, jointes à la linéarité locale des fonctions h_k en $\bar{x}$ et au fait que, pour les fonctions g_j localement pseudo-convexes en $\bar{x}$,

$$[\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0] \Longrightarrow [g_j(x) - g_j(\bar{x}) \geq 0] \quad \text{si } \|x - \bar{x}\| \text{ est assez petit.}$$

Il en résulte que $x_\theta \in C$ *si* $0 \leq \theta < \theta_0$, *de sorte que*

$$(1 - \alpha)X + \alpha X^*$$

définit, pour tout scalaire $\alpha \in]0, 1]$, *une demi-droite accessible en* $\bar{x}$, donc une demi-tangente en $\bar{x}$ au domaine C. Le cône $T(\bar{x})$ étant fermé, cela implique que $(x - \bar{x}) = X$ définit aussi une demi-tangente en $\bar{x}$ au domaine C, c'est-à-dire que $x \in T(\bar{x})$.

Ainsi, *si le système linéaire* (I_l'') *admet une solution*,

$$[x \in L(\bar{x})] \Longrightarrow [x \in T(\bar{x})] ,$$

c'est-à-dire que $L(\bar{x}) \subset T(\bar{x}) \subset P(\bar{x})$.

Puisque, d'après le Lemme 4 du § 4.1.2., on a toujours $P(\bar{x}) \subset L(\bar{x})$, il est ainsi établi que, *si le système linéaire* (I_l'') *admet une solution*, $L(\bar{x}) = T(\bar{x}) = P(\bar{x})$.

Corollaires du Théorème 6.

$\boxed{1°}$ *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], *si les fonctions* g_j *intervenant dans les* n *inégalités* $g_j(x) \geq 0$ *sont localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ (ou, en particulier, localement linéaires affines en $\bar{x}$), *et si les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont localement linéaires affines en* $\bar{x}$,

- *alors les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, le système linéaire (I_l'') ne comprend alors aucune inégalité stricte, et admet donc la solution $x^* = \bar{x}$.

$\boxed{2°}$ *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], *si les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont localement linéaires affines en* $\bar{x}$, *et si le système des* $(n_o + p)$ *équations linéaires* (n_o étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geq 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$\boxed{\begin{cases} \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) = u_j & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0 \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \end{cases}}$$

admet une solution $x \in \mathbf{R}^m$ *(ou* $x - \bar{x} = X$) *quels que soient les seconds membres* u_j,

- *alors les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, il suffit de donner aux n_o paramètres u_j des valeurs strictement positives pour que toute solution x du système d'équations précédent soit une solution x^* du système linéaire (I_l'').

La condition de qualification ainsi obtenue est, en particulier, remplie si les $(n_o + p)$ vecteurs gradients $\nabla g_j(\bar{x})$ et $\nabla h_k(\bar{x})$ figurant dans le système précédent sont linéairement indépendants. Mais elle exige seulement que les n_o vecteurs $\nabla g_j(\bar{x})$ soient linéairement indépendants et engendrent une variété linéaire disjointe de celle engendrée par les p vecteurs $\nabla h_k(\bar{x})$.

$\boxed{3°}$ *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], *réduites aux seules inégalités* $g_j(x) \geq 0$, *si le domaine* $C \subset \mathbf{R}^m$ *défini par ces contraintes est pseudo-convexe au point* $\bar{x}$ (c'est-à-dire inclus dans le cône $P(\bar{x})$ des pseudo-tangentes en $\bar{x}$ à C) *et s'il possède un point intérieur* x^* (tel que $g_j(x^*) > 0$ pour tout j), *si enfin* $\nabla g_j(\bar{x}) \neq 0$ *pour tout* j *tel que* $g_j(\bar{x}) = 0$,

- *alors les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, puisque, d'après l'hypothèse, $C \subset P(\bar{x}) \subset L(\bar{x})$ et que le domaine C possède un point intérieur x^*, il en est de même du cône $L(\bar{x})$ des demi-droites localement contraintes au point $\bar{x}$, qui est défini par les relations

$$\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0 \ .$$

Puisque, d'autre part, les n_0 vecteurs gradients $\nabla g_j(\bar{x})$ figurant dans ces relations sont non nuls, chacune de ces n_0 relations définit un demi-espace, et tout point x^* intérieur à $L(\bar{x})$ est intérieur à chacun de ces demi-espaces. x^* est donc solution du système linéaire (I_l''), puisqu'il est solution du système plus strict

$$\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0 \ .$$

La condition de pseudo-convexité du domaine C au point $\bar{x}$ est, en particulier, remplie si le domaine C est convexe, ce qui est le cas si les fonctions g_j intervenant dans les n inégalités $g_j(x) \geqslant 0$ sont quasi-concaves, ou a fortiori concaves (voir § 2.1.).

$\boxed{4°}$ *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], *si les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont localement linéaires affines en* $\bar{x}$, *et s'il existe un point* $x^* \in \mathbf{R}^n$ *tel que, pour tout* j *tel que* $g_j(\bar{x}) = 0$, *et pour tout* k,

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{lll} \text{ou bien} & g_j(x^*) > 0 & \text{et} \quad g_j(x^*) \leqslant \nabla g_j(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \\ \text{ou bien} & g_j(x^*) \geqslant 0 & \text{et} \quad g_j(x^*) < \nabla g_j(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \end{array}\right] \\
\qquad \text{si } g_j \text{ n'est pas localement pseudo-convexe en } \bar{x}, \\[2ex]
\qquad g_j(x^*) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g_j(x^*) \leqslant \nabla g_j(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \\
\qquad \text{si } g_j \text{ est localement pseudo-convexe en } \bar{x}, \\[2ex]
\qquad \text{et} \quad \nabla h_k(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \text{ (les } h_k \text{ étant localement linéaires affines en } \bar{x}\text{),}
\end{array}\right.$$

- *alors les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, le point x^* est alors manifestement solution du système linéaire (I_l'').

La condition de qualification ainsi obtenue est, en particulier, remplie s'il existe un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$ sur lequel les fonctions g_j intervenant dans les n_o inégalités $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$ sont *concaves* et les fonctions h_k intervenant dans les p égalités $h_k(x) = 0$ sont *linéaires affines*, et s'il existe un point $x^* \in \Omega(\bar{x})$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ll} g_j(x^*) \geqslant 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\,, \\ \multicolumn{2}{l}{(\textit{avec inégalité stricte} \text{ si } g_j \text{ n'est ni strictement concave en } \bar{x},} \\ & \text{ni pseudo-convexe en } \bar{x} \text{ sur } \Omega(\bar{x})), \\ h_k(x^*) = 0 & \text{pour tout } k \text{ (les } h_k \text{ étant linéaires affines} \\ & \text{sur } \Omega(\bar{x})). \end{array}\right.$$

On retrouve ainsi, en particulier, la condition de qualification des contraintes donnée par le Théorème 3 du § 3.2.1. dans le cas des programmes concaves, mais on suppose de plus ici que les n fonctions g_j sont différentiables au point $\bar{x}$.

$\boxed{5°}$ *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [I], *si les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *sont continûment différentiables sur un voisinage ouvert de* $\bar{x}$ *et si les* p *vecteurs gradients* $\nabla h_k(\bar{x})$ *sont linéairement indépendants, si enfin le système des* $(n_o + p)$ *relations linéaires* (n_o étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$(I_l''')\qquad \boxed{\left\{\begin{array}{ll} \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 & \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0 \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \end{array}\right.}$$

admet une solution $x^* \in \mathbf{R}^m$ (*ou* $x^* - \bar{x} = X^*$) [ce qui est vérifié, en particulier, dans le cas où les $(n_o + p)$ vecteurs gradients $\nabla g_j(\bar{x})$ et $\nabla h_k(\bar{x})$ figurant dans le système (I_l''') sont linéairement indépendants (voir ci-dessus 2°)],

- *alors les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, le système des p égalités $h_k(x) = 0$ définit alors d'une manière unique, dans un voisinage ouvert du point $\bar{x}$, p des m variables scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \geqslant p)$ en fonction continûment différentiable des $(m - p)$ autres variables, c'est-à-dire un vecteur $x^{(2)}$ à p coordonnées en fonction d'un vecteur $x^{(1)}$ à $(m - p)$ coordonnées, le graphe de cette fonction comprenant le point $\bar{x} = (\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}})$.

Le Problème [I] peut ainsi se ramener, au voisinage du point $\bar{x}$, à un problème linéarisable $[I^{(1)}]$ portant sur une variable vectorielle $x^{(1)}$ à $(m - p)$ coordonnées et dans lequel les contraintes se réduisent à n inégalités (dont n_0 sont bloquées par $\overline{x^{(1)}}$).

De même, le problème linéarisé $[I_l]$ tangent en $\bar{x}$ au Problème [I] peut alors se ramener, à l'aide du système des p égalités linéaires $\nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0$ (qui est, par hypothèse, de rang p), à un problème linéarisé $[I_l^{(1)}]$ portant sur la même variable vectorielle $x^{(1)}$ que le Problème $[I^{(1)}]$ et dont on vérifie sans peine qu'il est tangent en $\overline{x^{(1)}}$ à ce problème.

Enfin l'existence d'une solution x^* du système (I_l''') implique que les contraintes du Problème $[I^{(1)}]$ (réduites à n inégalités) vérifient en $\overline{x^{(1)}}$ les conditions de qualification posées en $\bar{x}$ pour le Problème [I] dans l'énoncé du Théorème 6, de sorte qu'elles sont qualifiées au point $\overline{x^{(1)}}$.

Il résulte de ce qui précède que :

- le point $\bar{x}$ est solution du Problème [I] si et seulement si le point $\overline{x^{(1)}}$ est solution du Problème $[I^{(1)}]$,

- le point $\bar{x}$ est solution du Problème linéarisé $[I_l]$ si et seulement si le point $\overline{x^{(1)}}$ est solution du problème linéarisé $[I_l^{(1)}]$,

- le point $\overline{x^{(1)}}$ ne peut être solution du Problème $[I^{(1)}]$ que s'il est solution du problème linéarisé $[I_l^{(1)}]$.

Donc *le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [I] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[I_l]$, *c'est-à-dire que les contraintes du Problème* [I] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

[On peut d'ailleurs montrer directement [1] que les conditions ici imposées aux contraintes du Problème [I] impliquent $L(\bar{x}) = T(\bar{x}) = P(\bar{x})$.]

4.1.4. *Cas où les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes.*

On a établi aux § 4.1.2. et 4.1.3. certaines "conditions de qualification des contraintes", plus ou moins générales, qui impliquent que les conditions de Kuhn et Tucker, données au § 4.1.1. et exprimant que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du problème linéarisé $[I_l]$, sont nécessaires pour que ce point soit solution du Problème [I].

On va donner maintenant certaines conditions impliquant que les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes, c'est-à-dire que le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ est solution du Problème [I] s'il est solution du problème linéarisé $[I_l]$.

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [I] revient à dire qu'il existe un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tel que, $C \subset \mathbf{R}^m$ étant le domaine non vide défini par les contraintes de ce problème,

$$[x \in (\Omega(\bar{x}) \cap C)] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0] .$$

Le maximum local de $f(x)$ au point $\bar{x}$ est un maximum absolu si de plus $\Omega(\bar{x}) \cap C = C$.

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé $[I_l]$ revient à dire que

$$[x \in L(\bar{x})] \Longrightarrow [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0] .$$

Il en résulte que *les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes s'il existe un voisinage ouvert* $\Omega(\bar{x})$ *du point* $\bar{x}$ *tel que les deux conditions suivantes soient remplies :*

$$\begin{cases} (\Omega(\bar{x}) \cap C) \subset P(\bar{x}) & [\text{avec } P(\bar{x}) \subset L(\bar{x}) \text{ d'après le Lemme 4}] , \\ [\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0] & \text{si } x \in \Omega(\bar{x}) \cap C . \end{cases}$$

La première condition est remplie *si le domaine* C *est localement pseudo-convexe au point* $\bar{x}$. Elle est remplie quel que soit $\Omega(\bar{x})$ si C est pseudo-convexe au point $\bar{x}$, c'est-à-dire si $C \subset P(\bar{x})$, et en particulier si le domaine C est convexe (ce qui est le cas si, les p fonctions h_k étant linéaires affines (s'il en existe), les n fonctions g_j sont quasi-concaves, ou a fortiori concaves).

La seconde condition est remplie *si la fonction* f *est localement pseudo-concave sur* C *au point* $\bar{x}$. Elle est remplie quel que soit $\Omega(\bar{x})$ si f est pseudo-concave sur C au point $\bar{x}$, et en particulier si la fonction f est concave sur C.

On a ainsi établi le théorème suivant :

Théorème 7.– *Les conditions de Kuhn et Tucker, données au* §4.1.1., *impliquent que le point* $\bar{x}$ *maximise, au moins localement, la valeur* $f(x)$ *de la fonction* f *pour* $x \in C$ (domaine défini par les contraintes du Problème [I]) *si le domaine* C *est localement pseudo-convexe au point* $\bar{x}$ *et si la fonction* f *est localement pseudo-concave sur* C *au point* $\bar{x}$.

Le maximum local de $f(x)$ *au point* $\bar{x}$ *est un maximum absolu si ces deux conditions sont remplies sans la restriction* "localement".

[On voit d'ailleurs (par continuité) que, *si* $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ *et si* f *est continue*, l'hypothèse de pseudo-concavité de la fonction f peut être remplacée, dans le Théorème 7, par une *hypothèse de quasi-concavité* (voir §§ 2.1. et 2.2.) qui l'implique, et selon laquelle

$$[\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) < 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) < 0 \quad (\text{ou même} \leqslant 0)]$$

si x appartient à un convexe contenant C, au moins dans un voisinage de $\bar{x}$, et comprenant un point x tel que $\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) < 0$.]

Le Théorème 7 et le 4ème corollaire du Théorème 6 permettent de retrouver les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker pour les programmes concaves, qui ont été données au § 3.2.2., mais on suppose de plus ici que la fonction f et les n fonctions g_j sont différentiables au point $\bar{x}$.

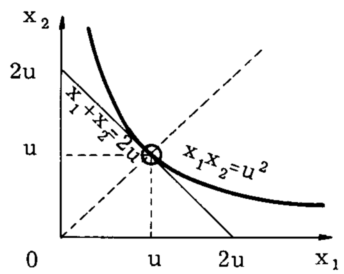
4.1.5. *Application à quelques exemples.*

Exemple I.– *Soit à déterminer un vecteur* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$,

maximisant $f(x) = x_1 x_2$

sous les contraintes

$$\boxed{\begin{cases} g_1(x) = x_1 \geqslant 0 \\ g_2(x) = x_2 \geqslant 0 \\ g_3(x) = 2u - x_1 - x_2 \geqslant 0 \end{cases}}$$



u *étant un paramètre réel positif donné.*

Les fonctions f, g_1, g_2, g_3 sont définies sur $\mathbf{R}^2$. Les fonctions g_1, g_2, g_3 sont linéaires affines. La fonction f n'est pas concave, mais elle est différentiable en tout point.

Puisque les contraintes sont linéaires, elles sont qualifiées en tout point (d'après le 1er corollaire du Théorème 6), *de sorte que les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessairement vérifiées par tout point solution* $\bar{x}$.

Il existe donc des multiplicateurs scalaires $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$ tels que

$$\nabla[x_1 x_2 + \bar{\lambda}_1 x_1 + \bar{\lambda}_2 x_2 + \bar{\lambda}_3(2u - x_1 - x_2)]_{x=\bar{x}} = 0 ,$$

avec $$\left\{\begin{array}{lll} \bar{\lambda}_1 \geqslant 0 , & \bar{x}_1 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1 = 0 ; \\ \bar{\lambda}_2 \geqslant 0 , & \bar{x}_2 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_2 \bar{x}_2 = 0 ; \\ \bar{\lambda}_3 \geqslant 0 , & 2u - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_3(2u - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 . \end{array}\right\}$$

L'annulation du vecteur gradient au point $\bar{x}$ donne

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_2 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3 = 0 , \\ \bar{x}_1 + \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 = 0 . \end{array}\right.$$

Et l'on voit sans peine que *ces conditions nécessaires sont vérifiées par les deux seuls points :*

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = u , & \text{avec} & \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0 \text{ et } \bar{\lambda}_3 = u ; \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0 , & \text{avec} & \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = 0 . \end{array}\right.$$

Mais il est clair, graphiquement, que *la seule solution du problème est le point*

$$\boxed{\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = u}$$

ce qui montre que *les conditions de Kuhn et Tucker ne sont pas ici suffisantes pour que* $\bar{x}$ *soit solution.*

Cependant, puisque le domaine C défini par les contraintes du problème est convexe, le Théorème 7 montre qu'un point $\bar{x}$ vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker maximise la valeur $f(x)$ de la fonction f pour $x \in C$ si f est pseudo-concave sur C en $\bar{x}$. Et l'on voit qu'il en est bien ainsi au point $\bar{x} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$, où $\nabla f(\bar{x}) = (u , u)$, puisque, si $x \in C$,

$$[\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) = u(x_1 + x_2 - 2u) \leqslant 0] \Longrightarrow [f(x) - f(\bar{x}) = x_1 x_2 - u^2 \leqslant 0].$$

Mais il n'en est manifestement pas de même au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, où $\nabla f(\bar{x}) = (0 , 0)$, bien que la fonction f soit quasi-concave sur C , comme on le vérifie immédiatement d'après la relation (1_q) du § 2.1. (Ces résultats sont d'ailleurs évidents graphiquement.)

Il faut enfin observer que, contrairement à ce qui se produit dans le cas des programmes concaves, *l'annulation du gradient de la fonction de Lagrange* l *définie par*

$$l(x) = x_1 x_2 + u(2u - x_1 - x_2)$$

ne donne pas un maximum de cette fonction. Dans l'ensemble des points x tels que $x_1 = x_2$, la valeur $l(x) = x_1^2 + 2u(u - x_1) = (u - x_1)^2 + u^2$ atteint même son minimum au point $\bar{x} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$.

Exemple II.- *Soit à déterminer un vecteur* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, *maximisant*

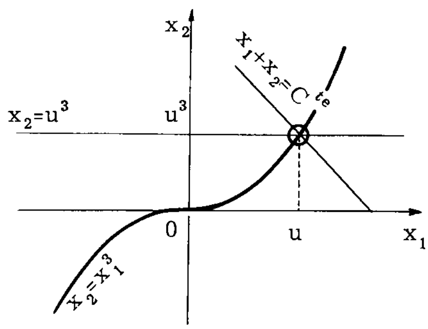
$$f(x) = x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$\boxed{\begin{cases} g_1(x) = -x_1^3 + x_2 \geqslant 0 \\ g_2(x) = u^3 - x_2 \geqslant 0 \end{cases}}$$

u *étant un paramètre réel donné.*

Les fonctions f, g_1, g_2 sont définies sur $\mathbf{R}^2$. Les fonctions f et g_2 sont linéaires affines. La fonction g_1 est concave sur le demi-plan $x_1 \geqslant 0$, mais non sur le demi-plan $x_1 \leqslant 0$, où elle est convexe, et elle est différentiable en tout point.



Il est facile de déterminer graphiquement le domaine C défini par les contraintes $x_1^3 \leqslant x_2 \leqslant u^3$, et *le point* $\bar{x} = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \end{pmatrix}$ *où la fonction* f *atteint son maximum sur* C. Quelle que soit la valeur du paramètre réel u, ce point $\bar{x}$ est la solution unique du problème.

La condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 6 du § 4.1.3. est vérifiée pour $u \neq 0$ *, mais non pour* $u = 0$, puisque le système linéaire

$$\begin{cases} \nabla g_1(\bar{x})(x - \bar{x}) = -3u^2 X_1 + X_2 > 0 \\ \nabla g_2(\bar{x})(x - \bar{x}) = \qquad\qquad - X_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

admet une solution $x^* - \bar{x} = X^*$ pour $u \neq 0$, mais non pour $u = 0$.

[Il en est d'ailleurs de même pour la condition de qualification plus générale posée dans le Théorème 4 du § 4.1.2., puisque $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$ si $u \neq 0$, mais que $L(x) = \{x \mid x_2 = 0\}$ et

$$P(\bar{x}) = T(\bar{x}) = \{x \mid x_1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 0\}$$

si $u = 0$ (comme on le vérifie sans peine).]

Conformément aux Théorèmes 5 et 6 du § 4.1.3., il existe, quel que soit u , des multiplicateurs scalaires non tous nuls, $\bar{\gamma}$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ tels que

$$\nabla\,[\bar{\gamma}(x_1 + x_2) + \bar{\lambda}_1\,(-x_1^3 + x_2) + \bar{\lambda}_2\,(u^3 - x_2)]_{x=\bar{x}} = 0 \ ,$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \bar{\gamma} \geqslant 0 \ , & \text{non nul si } u \neq 0 \ ; \\ \bar{\lambda}_1 \geqslant 0 \ , & -\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 \geqslant 0 \ , \quad \bar{\lambda}_1(-\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2) = 0 \ ; \\ \bar{\lambda}_2 \geqslant 0 \ , & u^3 - \bar{x}_2 \geqslant 0 \ , \quad \bar{\lambda}_2(\,u^3 - \bar{x}_2) = 0 \ . \end{cases}$$

L'annulation du vecteur gradient au point $\bar{x}$ donne

$$\begin{cases} \bar{\gamma} - 3\,\bar{\lambda}_1 \bar{x}_1^2 \qquad = 0 \ , \\ \bar{\gamma} + \quad \bar{\lambda}_1 \quad - \bar{\lambda}_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Il en résulte que ni $\bar{\lambda}_1$ ni $\bar{\lambda}_2$ ne peuvent être nuls (car cela impliquerait $\bar{\gamma} = \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$) et que

$$\boxed{\begin{cases} \bar{x}_1 = u \\ \bar{x}_2 = u^3 \end{cases}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \bar{\gamma} = 3u^2\,\bar{\lambda}_1 \ , \\ \bar{\lambda}_2 = (1 + 3u^2)\,\bar{\lambda}_1 \ . \end{cases}$$

Elles donnent donc dans tous les cas la solution unique du problème posé. Mais, dans le cas où $u = 0$ *, le multiplicateur* $\bar{\gamma}$ *est nul*, de sorte que la fonction à maximiser disparaît de la combinaison linéaire dont le gradient a été annulé, et *il ne s'agit plus des conditions de Kuhn et Tucker* (qui conduiraient alors à une impossibilité).

Le domaine C défini par les contraintes du problème n'est pas convexe. Il est localement convexe au point $\bar{x}$ si $u > 0$, mais non si $u \leqslant 0$. Puisque la fonction f à maximiser est linéaire, le Théorème 7 montre que les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes, au moins pour donner un maximum local de $f(x)$, si $u > 0$. On sait, d'après les résultats obtenus, qu'elles donnent en fait ici le maximum absolu de $f(x)$ pour tout $u \neq 0$.

Exemple III.- *Soit à déterminer un vecteur* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, *maximisant*

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 - x_2$$

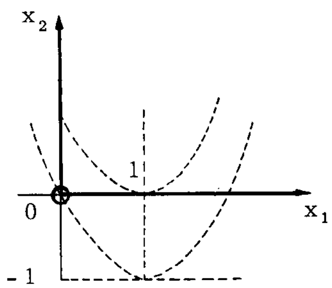
sous les contraintes

$$\left\{\boxed{\begin{array}{llll} g_1(x) & = x_1 & & \geqslant 0 \\ g_2(x) & = & x_2 & \geqslant 0 \\ h\,(x) & = x_1\,x_2 & & = 0 \end{array}}\right.$$

Les fonctions f, g_1, g_2, h sont définies sur $\mathbf{R}^2$. Les fonctions g_1 et g_2 sont linéaires, mais la fonction h n'est pas linéaire affine. La fonction f n'est pas concave (elle est convexe). Les fonctions f et h sont différentiables en tout point.

On voit immédiatement que le domaine C défini par les contraintes se réduit aux deux demi-droites

$$Ox_1 \begin{pmatrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Ox_2 \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{pmatrix}.$$



La condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 4 du § 4.1.2 est ici vérifiée en tout point de C (bien qu'il n'en soit pas de même pour la condition moins générale posée dans le Théorème 6 du § 4.1.3.). En effet :

- pour $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$, avec $\begin{Bmatrix} x_1^1 > 0 \\ x_2^1 = 0 \end{Bmatrix}$,

$$L(x^1) = T(x^1) = P(x^1) = \{x \mid x_2 = 0\} ;$$

- pour $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$, avec $\begin{Bmatrix} x_1^2 = 0 \\ x_2^2 > 0 \end{Bmatrix}$,

$$L(x^2) = T(x^2) = P(x^2) = \{x \mid x_1 = 0\} ;$$

- pour $x^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L(x^o) = \{x \mid x_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geqslant 0\}$,

$$T(x^o) = C, \quad P(x^o) = L(x^o).$$

[Puisque $C \subset P(x^o)$, le domaine C est pseudo-convexe au point x^o.]

Les conditions de Kuhn et Tucker sont donc nécessairement vérifiées par tout point solution $\bar{x}$.

[Il existe donc des multiplicateurs scalaires $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\mu}$ tels que

$$\nabla[(x_1 - 1)^2 - x_2 + \bar{\lambda}_1 x_1 + \bar{\lambda}_2 x_2 + \bar{\mu}\, x_1 x_2]_{x=\bar{x}} = 0 ,$$

avec $\left\{\begin{array}{lll} \bar{\lambda}_1 \geqslant 0 , & \bar{x}_1 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1 = 0 ; \\ \bar{\lambda}_2 \geqslant 0 , & \bar{x}_2 \geqslant 0 , & \bar{\lambda}_2 \bar{x}_2 = 0 ; \\ & & \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0 . \end{array}\right\}$]

L'annulation du vecteur gradient au point $\bar{x}$ donne

$$\left\{\begin{array}{l} 2(\bar{x}_1 - 1) + \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}\bar{x}_2 = 0 , \\ \qquad - 1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}\bar{x}_1 = 0 . \end{array}\right.$$

Et l'on voit sans peine que *ces conditions nécessaires sont vérifiées par les deux seuls points :*

$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 0 , \\ \bar{x}_2 = 0 , \end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 = 2 , \\ \bar{\lambda}_2 = 1 , \end{array}\right.$ et $\bar{\mu}$ quelconque ;

$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 1 , \\ \bar{x}_2 = 0 , \end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 = 0 , \\ \bar{\lambda}_2 = 1 - \bar{\mu} , \end{array}\right.$ et $\bar{\mu} \leqslant 1$.

Mais il est clair, graphiquement, que la seule solution du problème est l'origine $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *qui maximise* *<u>localement</u>* *la valeur* $f(x)$ *de la fonction* f *pour* $x \in C$, alors que le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ minimise localement $f(x)$ sur C , $f(x)$ n'étant d'ailleurs pas bornée sur C .

<u>Remarque complémentaire</u>.- Il faut observer que,

$$\text{pour } x^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(x^o) \neq T(x^o).$$

Il en résulte que *les contraintes considérées dans l'exemple III ne seraient pas nécessairement qualifiées au point* $x°$ *pour un problème de recherche de "programmes maximin"* (voir § 4.2.2. Théorème 4^{bis}).

4.1.6. *Interprétation économique des multiplicateurs.*

En liaison avec le Problème [I], et pour obtenir une interprétation des multiplicateurs, considérons le problème paramétrique suivant, dit Problème [I_p] :

Pb [I_p]

Déterminer un "vecteur programme" $x \in \mathbf{R}^m$, *maximisant la valeur* f(x) *d'une* "fonction économique" f, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant b_j & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ h_k(x) = c_k & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \ldots, p\}, \end{cases}$$

où les $(n + p)$ *paramètres* b_j *et* c_k *sont les coordonnées d'un vecteur* $(b, c) \in \mathbf{R}^{n+p}$ *qui peut varier dans un voisinage ouvert* Γ *de l'origine.*

On suppose que, pour $(b, c) = 0$, il existe un point solution $\bar{x}$, que les fonctions f, g_j, h_k sont définies et différentiables sur un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$, que les conditions de Kuhn et Tucker du § 4.1.1. admettent comme solution "*non dégénérée*" le point $\bar{x}$ et les valeurs *uniques* $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ des $(n + p)$ multiplicateurs correspondant aux contraintes.

On suppose de plus que, pour tout $(b, c) \in \Gamma$, les conditions de Kuhn et Tucker définissent d'une manière unique, *comme fonctions de* (b, c) *continues et différentiables à l'origine,* un point $x \in \Omega(\bar{x})$ qui est solution du problème posé, et les valeurs λ_j, μ_k des multiplicateurs correspondants.

La valeur f(x) *de la fonction* f *en ce point solution est ainsi définie en fonction, continue et différentiable à l'origine, du point* $(b, c) \in \Gamma$:

$$\boxed{\max_{\Gamma} f(x) = \varphi(b, c)}$$

et l'on se propose de déterminer la différentielle à l'origine de cette fonction φ.

D'après les hypothèses, pour tout vecteur $(b, c) \in \Gamma$, le seul point solution x qui appartienne à $\Omega(\bar{x})$ et les $(n + p)$ multiplicateurs λ_j, μ_k vérifient les conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$(\mathrm{II}_p) \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[l(x) = f(x) + \sum_j \lambda_j g_j(x) + \sum_k \mu_k h_k(x) \right] = 0 \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \; (= I), \\ \lambda_j \geqslant 0, \quad g_j(x) - b_j \geqslant 0, \quad \lambda_j(g_j(x) - b_j) = 0 \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \; (= J), \\ \qquad\qquad h_k(x) - c_k = 0 \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \dots, p\} \; (= K). \end{cases}}$$

Pour $(b, c) = 0$, ces conditions admettent comme solution

$$x(0) = \bar{x}, \qquad \lambda_j(0) = \bar{\lambda}_j, \qquad \mu_k(0) = \bar{\mu}_k,$$

et cette solution est, par hypothèse, "non dégénérée" en ce sens que, *dans chacun des* n *produits* $\bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0$, *un seul des deux facteurs est nul, tandis que l'autre est strictement positif.*

Pour $(b, c) \in \Gamma$, il résulte des hypothèses que x, λ_j, μ_k, ainsi que $(g_j(x) - b_j)$, sont définis comme fonctions de (b, c) continues à l'origine, de sorte que le voisinage Γ de l'origine peut être choisi assez petit pour que

$$[\bar{\lambda}_j = 0] \Longrightarrow [g_j(\bar{x}) > 0] \Longrightarrow [g_j(x) - b_j > 0] \Longrightarrow [\lambda_j = 0] \qquad (j \in J^\circ),$$

$$[g_j(\bar{x}) = 0] \Longrightarrow [\bar{\lambda}_j > 0] \Longrightarrow [\lambda_j > 0] \Longrightarrow [g_j(x) - b_j = 0] \qquad (j \in J^1).$$

Alors *les multiplicateurs* λ_j *nuls quand* $(b, c) = 0$ *restent nuls pour tout* $(b, c) \in \Gamma$, *et les contraintes* $g_j(x) \geqslant b_j$ *bloquées par le point solution* $\bar{x}$ *quand* $(b, c) = 0$ *restent bloquées par le point solution* x *pour tout* $(b, c) \in \Gamma$.

Il en résulte que, pour $(b, c) \in \Gamma$, le point solution $x \in \Omega(\bar{x})$, les n_1 multiplicateurs λ_j non nuls $(j \in J^1)$ et les p multiplicateurs $\mu_k (k \in K)$ sont déterminés par le système des $(m + n_1 + p)$ équations à $(m + n_1 + p)$ inconnues :

$$(\mathrm{II}_p')\quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[l(x) = f(x) + \sum\limits_{j\in J^1} \lambda_j\, g_j(x) + \sum\limits_{k\in K} \mu_k\, h_k(x) \right] = 0\ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad i \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots ,\ m\} \\ g_j(x) - b_j = 0\ ,\ \text{pour} \quad j \in J^1 \\ h_k(x) - c_k = 0\ ,\ \text{pour} \quad k \in K \end{cases}}$$

Quand le point $(b\ ,\ c) \in \Gamma$ *varie d'une manière quelconque à partir de l'origine*, le point solution x varie à partir de $\bar{x}$, les multiplicateurs λ_j, μ_k varient à partir de $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ (avec $\lambda_j = \bar{\lambda}_j = 0$ pour $j \in J°$), et le système (II_p') implique les relations différentielles :

$$\begin{cases} df(x) + \sum\limits_{j\in J^1} \bar{\lambda}_j\, dg_j(x) + \sum\limits_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dh_k(x) = 0\ , \\ \qquad\qquad dg_j(x) - db_j = 0\ , \qquad \text{pour} \quad j \in J^1\ , \\ \qquad\qquad dh_k(x) - dc_j = 0\ , \qquad \text{pour} \quad k \in K\ , \end{cases}$$

d'où

$$df(x) = -\sum_{j\in J^1} \bar{\lambda}_j\, db_j - \sum_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dc_j\ .$$

En définitive, puisque $\bar{\lambda}_i = 0$ pour $j \in J°$ et que x désigne ici un point solution du Problème $[\mathrm{I}_p]$, on obtient ainsi la *différentielle de* $\varphi(b,\ c)$ *à l'origine de l'espace des* $(b,\ c)$:

$$\boxed{d\ [\max_x\ f(x) = \varphi(b\ ,\ c)] = -\sum_{j\in J} \bar{\lambda}_j\, db_j - \sum_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dc_k}$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} \left[\dfrac{\partial\varphi(b\ ,\ c)}{\partial b_j}\right]_{(b,\ c)=0} = -\bar{\lambda}_j\ , \qquad \text{pour} \quad j \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots ,\ n\} \\ \left[\dfrac{\partial\varphi(b\ ,\ c)}{\partial c_k}\right]_{(b,\ c)=0} = -\bar{\mu}_k\ , \qquad \text{pour} \quad k \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots ,\ p\} \end{cases}}$$

Ainsi, *le système des multiplicateurs* $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ *correspondant aux contraintes du Problème* $[\mathrm{I}_p]$ *est opposé au système des dérivées partielles du maximum de la fonction économique par rapport aux seconds membres de ces contraintes.*

En assimilant une diminution du maximum de la fonction économique à une augmentation de coût, on dit encore que *les multiplicateurs* $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ *sont les coûts marginaux des seconds membres des contraintes correspondantes.*

(Il est naturel qu'un tel coût marginal soit nul pour une contrainte non bloquée à l'optimum, et positif pour une contrainte $g_j(x) \geqslant b_j$ bloquée à l'optimum qui se trouve resserrée par une augmentation du second membre b_j.)

Note complémentaire 1.- Pour que les conditions posées dans l'énoncé du Problème $[I_p]$ *soient vérifiées, il suffit* (d'après le théorème des fonctions implicites)

- que, pour $(b, c) = 0$, il existe un point solution $\bar{x}$,

- que les fonctions f, g_j, h_k soient définies et deux fois continûment différentiables sur un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$,

- que les conditions de Kuhn et Tucker admettent comme solution "*non dégénérée*" le point $\bar{x}$ et les valeurs *uniques* $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ des multiplicateurs correspondants,

- *qu'au point* $(\bar{x}_i, \bar{\lambda}_j, \bar{\mu}_k)$ *la matrice jacobienne* $\bar{M}$ *du système* (II'_p) *soit régulière,*

- et qu'enfin, pour $(b, c) \in \Gamma$ (voisinage assez petit de l'origine), le point x, voisin de $\bar{x}$ et défini sans ambiguïté par le système (II'_p), soit solution du Problème $[I_p]$.

Si l'on adopte les notations suivantes (voir §§ 2. 2. et 2. 3.) :

$\nabla f(\bar{x})$ pour le vecteur dérivé d'une fonction f au point $\bar{x}$ (vecteur ligne),

${}^t\nabla f(\bar{x})$ pour le vecteur transposé du précédent (vecteur colonne),

$\nabla^2 f(\bar{x})$ pour la matrice dérivée seconde de f au point $\bar{x}$ (matrice symétrique),

la matrice jacobienne $\bar{M}$ *du système* (II'_p), *aux inconnues* x_i, λ_j, μ_k, *est la matrice symétrique, à* $(m + n_1 + p)$ *lignes ou colonnes :*

$$\bar{M} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} \nabla^2\bar{l}(\bar{x}) & \ldots {}^t\nabla g_j(\bar{x}) \ldots & \ldots {}^t\nabla h_k(\bar{x}) \ldots \\ \hline \vdots \; \nabla g_j(\bar{x}) \; \vdots & O & O \\ \hline \vdots \; \nabla h_k(\bar{x}) \; \vdots & O & O \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} (m \text{ lignes}) \\ \binom{n_1 \text{ lignes}}{j \in J^1} \\ \binom{p \text{ lignes}}{k \in K} \end{array}$$

avec $$\bar{l}(x) = f(x) + \sum_{j \in J^1} \bar{\lambda}_j\; g_j(x) + \sum_{k \in K} \bar{\mu}_k\; h_k(x).$$

(Dans la matrice jacobienne $\bar{M}$, comme dans la fonction de Lagrange l , interviennent seulement, avec la fonction économique f , les contraintes bloquées à l'optimum et les multiplicateurs correspondants.)

Note complémentaire 2. – *Dans le cas où le problème paramétrique* $[I_p]$ *est un problème de programmation concave, et non plus nécessairement linéarisable,* c'est-à-dire si les fonctions f et g_j sont concaves (sans être nécessairement différentiables) et si les fonctions h_k sont linéaires affines, *la fonction* φ *définie par*

$$\varphi(b\,,\,c) = \max_x f(x)$$

est une fonction concave de la variable vectorielle $(b\,,\,c) \in \mathbf{R}^{n+p}$, *sur toute partie convexe de son ensemble de définition.*

En effet,

– *si le point* x^1 *est solution du problème pour* $(b\,,c) = (b^1, c^1)$,

$$\varphi(b^1\,,\,c^1) = f(x^1)\,, \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} g_j(x^1) \geqslant b_j^1 & \text{pour tout } j\,, \\ h_k(x^1) = c_k^1 & \text{pour tout } k\,; \end{cases}$$

– *si le point* x^2 *est solution du problème pour* $(b\,,\,c) = (b^2\,,\,c^2)$,

$$\varphi(b^2\,,\,c^2) = f(x^2)\,, \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} g_j(x^2) \geqslant b_j^2 & \text{pour tout } j\,, \\ h_k(x^2) = c_k^2 & \text{pour tout } k\,. \end{cases}$$

Il en résulte alors, en vertu de la concavité des fonctions g_j et de la linéarité des fonctions h_k, que, *pour tout scalaire* $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} g_j((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1-\lambda)\, g_j(x^1) + \lambda g_j(x^2) \geqslant (1-\lambda) b_j^1 + \lambda b_j^2 \text{ pour tout } j\,, \\ h_k((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) = (1-\lambda)\, h_k(x^1) + \lambda h_k(x^2) = (1-\lambda) c_k^1 + \lambda c_k^2 \text{ pour tout } k, \end{cases}$$

de sorte que *le point* $((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2)$ *vérifie les contraintes du problème posé pour* $(b\,,\,c) = (1-\lambda)(b^1\,,\,c^1) + \lambda(b^2\,,\,c^2)$.

Par conséquent, d'après la définition de la fonction φ et en vertu de la concavité de la fonction f ,

$$\varphi((1-\lambda)(b^1\,,\,c^1) + \lambda(b^2\,,\,c^2)) \geqslant f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1-\lambda)\, f(x^1) + \lambda f(x^2),$$

d'où

$$\boxed{\varphi((1-\lambda)(b^1, c^1) + \lambda(b^2, c^2)) \geqslant (1-\lambda)\varphi(b^1, c^1) + \lambda\varphi(b^2, c^2), \ \forall \lambda \in [0, 1]}$$

La concavité de la fonction φ sur toute partie convexe de son ensemble de définition est ainsi établie.

4.2. Problème de recherche de ''programmes maximin''.

On considérera ici le problème suivant, dit Problème [VI], qui généralise le Problème [I] considéré au § 4.1. :

Pb[VI]

Déterminer un (ou plusieurs) ''vecteur programme $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$,

maximisant, au moins localement, la plus petite des valeurs $f_r(x)$ $(r \in \{1, 2, \dots, t\})$ *prises au point* x *par plusieurs* ''fonctions économiques'' f_r, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe au moins un point solution $\bar{x}$, *que les fonctions* f_r, g_j, h_k *sont définies sur une partie ouverte de* $\mathbf{R}^m$ *comprenant* $\bar{x}$, *soit* $\Omega(\bar{x}) \subset \mathbf{R}^m$, *et qu'elles sont différentiables au point* $\bar{x}$.

Les contraintes compatibles du problème définissent une partie non vide C de $\mathbf{R}^m$ comprenant $\bar{x}$, et l'on peut toujours supposer le voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$ assez petit pour que *le point solution* $\bar{x}$ *maximise la plus petite des* t *valeurs* $f_r(x)$ *des fonctions* f_r *sur l'ensemble non vide* $(\Omega(\bar{x}) \cap C) \subset \mathbf{R}^m$.

On pourrait encore mettre le Problème [VI] sous la forme du problème d'optimisation suivant, qui porte sur la variable vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \\ v \end{pmatrix},$$

$$\text{Pb[VI']}\quad\left[\begin{array}{l}\textit{Maximiser, au moins localement, la fonction économique } \underline{\textit{linéaire}}\ v,\\ \textit{sous les contraintes, supposées compatibles,}\\ \qquad\left\{\begin{array}{lll} f_r(x) - v \geqslant 0 & \text{pour} & r \in \{1, 2, \dots, t\}\ ,\\ g_j(x) \qquad \geqslant 0 & \text{pour} & j \in \{1, 2, \dots, n\}\ ,\\ h_k(x) \qquad = 0 & \text{pour} & k \in \{1, 2, \dots, p\}\ .\end{array}\right.\end{array}\right.$$

4.2.1. *Problème linéarisé au voisinage d'un point solution. Conditions de Kuhn et Tucker.*

Le problème tangent au Problème [VI] au point solution $\bar{x}$, ou problème linéarisé au voisinage de ce point, est, par définition, le Problème [VI_l] suivant :

Maximiser $\min\limits_r \; \{f_r(\bar{x}) + \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x})\}$,
sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{l} g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, n\},\\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \text{ pour } k \in \{1, 2, \dots, p\}.\end{array}\right.$$

(Il est facile de mettre ce problème sous la forme d'un programme linéaire [VI'_l], tangent au Problème [VI'] au point solution $\bar{x}$.)

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* [VI_l] *si, et seulement si, le système des* $(t + n + p)$ *relations linéaires*

$$(VI_l)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{llll} f_r(\bar{x}) - v(\bar{x}) + \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0\ , & \text{pour} & r \in \{1, 2, \dots, t\}\\ g_j(\bar{x}) \qquad\qquad + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0\ , & \text{pour} & j \in \{1, 2, \dots, n\}\\ h_k(\bar{x}) \qquad\qquad + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0\ , & \text{pour} & k \in \{1, 2, \dots, p\}\end{array}\right.}$$

$$\left[\text{avec } v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})\right]$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^n$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* $(\overline{VI}_l)$ que l'on obtient à partir du système (VI_l) en remplaçant les t inégalités au sens strict par des inégalités au sens large.

D'après le Théorème 3^{bis} du § 3.3.1. (où la condition de qualification est vérifiée par les contraintes du Problème [VI_l] du fait qu'elles sont linéaires et compatibles), ou, plus simplement, d'après le lemme de Fourier appliqué au système linéaire (VI_l), on obtient les conditions (VII_l) suivantes :

Le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé [VI_l] si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires

$$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t), \quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n), \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

(VII_l)

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla\left[\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} = 0}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_r \bar{\gamma}_r = 1, & \\ \bar{\gamma}_r \geqslant 0, \quad f_r(\bar{x}) - v(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{\gamma}_r(f_r(\bar{x}) - v(\bar{x})) = 0 & \text{pour tout } r \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0, \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } j \\ h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout } k \\ [\text{d'où } l(\bar{x}) = v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})]. & \end{array}\right.$$

Les conditions (VII_l), nécessaires et suffisantes pour que le point $\bar{x}$ soit solution du problème linéarisé [VI_l], sont les conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème. On voit que seules les fonctions f_r telles que $f_r(\bar{x}) = v(\bar{x})$, et les contraintes bloquées (ou serrées) au point $\bar{x}$, dans le Problème [VI] comme dans le Problème [VI_l], peuvent intervenir avec un multiplicateur non nul dans la fonction l.

Complément.– On peut observer que *les conditions* (VII_l) *se déduisent des conditions* (II_l) *par substitution de la fonction* $\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x)$, *combinaison linéaire convexe des* $f_r(x)$, *à la fonction* $f(x)$, les coefficients $\bar{\gamma}_r$ étant soumis à des conditions qui font seulement intervenir les valeurs $f_r(\bar{x})$ et le nombre $v(\bar{x})$.

On déduit alors des résultats donnés au § 3.3.2. et au § 4.1.1. qu'*il est possible de n'introduire dans la fonction l que certaines des contraintes du Problème* [VI_l] *en conservant explicitement les autres* (par exemple les conditions de signe).

On pourrait aussi, comme au § 3.3.2. et au § 4.1.1., mettre ces conditions sous la forme de *conditions de col pour une fonction* *de plusieurs variables vectorielles* (x et γ, λ, μ), dans lesquelles il faudrait tenir compte de la contrainte $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_t = 1$, avec les conditions de signe $\gamma \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$, et éventuellement des contraintes en x conservées explicitement.

(On pourrait d'ailleurs former d'autres conditions de col entièrement équivalentes, mais faisant intervenir explicitement la variable scalaire v à côté de la variable vectorielle x, en appliquant les résultats du § 4.1.1. (in fine) au programme linéaire $[VI_l']$ équivalent au Problème $[VI_l]$.)

4.2.2. *Conditions de qualification des contraintes.*

Les conditions (VII_l) données au § 4.2.1., et les conditions équivalentes qui pourraient en être déduites, expriment que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé $[VI_l]$, tangent en $\bar{x}$ au Problème [VI]. Mais elles n'expriment pas, en général, que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [VI], et elles ne sont même ni nécessaires, ni suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Cependant, *si les contraintes du Problème* [VI] *vérifient au point* $\bar{x}$ *certaines conditions de qualification, le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VI] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[VI_l]$.

Les conditions (VII_l) donnent alors des conditions nécessaires (mais non suffisantes, en général) pour que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [VI]. *Ce sont les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker.* (On sait, d'après l'étude faite au § 3.3.2., que ces conditions deviennent suffisantes pour les problèmes concaves linéarisables. Et l'on verra au § 4.2.3. qu'il en est de même dans des cas un peu plus généraux.)

On va montrer que *la condition générale de qualification des contraintes établie au § 4.1.2. pour le Problème* [I] *doit être ici précisée, tandis que les conditions particulères du* § 4.1.3. *restent valables pour le Problème* [VI].

Théorème 4bis.- *Si toute demi-droite localement contrainte au point* $\bar{x}$ *est une demi-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C *défini par les contraintes du Problème* [VI], *le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VI] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[VI_l]$.

Autrement dit, *la condition* $L(\bar{x}) = T(\bar{x})$ *est une condition suffisante de qualification des contraintes du Problème* [VI] *au point* $\bar{x}$. [Cette condition implique $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$, mais la réciproque n'est pas vraie.]

En effet, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [VI], *c'est un maximum, au moins local, de* $\min\limits_r f_r(x)$ *sous les contraintes qui définissent le domaine* C, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$ dans lequel

$$[x \in (\Omega(\bar{x}) \cap C)] \Longrightarrow [\exists r \mid f_r(x) \leqslant v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})].$$

Les t fonctions f_r étant différentiables au point $\bar{x}$, on a, pour toute suite de points x_s convergeant vers $\bar{x}$ et appartenant à un voisinage de $\bar{x}$ sur lequel f_r est définie,

$$f_r(x_s) = f_r(\bar{x}) + \nabla f_r(\bar{x})(x_s - \bar{x}) + o_r(x_s - \bar{x}), \quad \text{avec} \quad \lim_{x_s \to \bar{x}} \frac{o_r(x_s - \bar{x})}{\|x_s - \bar{x}\|} = 0 .$$

Il en résulte que, *si* $(x - \bar{x})$ *définit une demi-tangente en* $\bar{x}$ *au domaine* C, c'est-à-dire si

$$x - \bar{x} = \lim_{s \to \infty} \nu_s(x_s - \bar{x}), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_s \in C, & \nu_s \geqslant 0, \quad \forall s, \\ x_s \xrightarrow[s \to \infty]{} \bar{x}, \end{cases}$$

il existe un indice r tel que $f_r(\bar{x}) = v(\bar{x})$ et $\nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0$, car, s'il en était autrement, il existerait des indices s assez grands pour que

$$\forall r, \quad \left\{\begin{array}{l} \text{ou bien} \quad f_r(\bar{x}) > v(\bar{x}) \\ \text{ou bien} \quad f_r(\bar{x}) = v(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \nabla f_r(\bar{x})\, \nu_s\, (x_s - \bar{x}) > 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{et} \qquad \nu_s(f_r(x_s) - v(\bar{x})) > 0 ,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le point $\bar{x}$ maximise, au moins localement, $\min_r f_r(x)$ dans le domaine C.

Ainsi, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [VI],

$$\boxed{[x \in T(\bar{x})] \Longrightarrow [\exists r \mid f_r(\bar{x}) = v(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0]}$$

(mais on ne peut pas remplacer $T(\bar{x})$ par $P(\bar{x})$ dans cette relation, car le domaine défini par la condition du second membre n'est pas nécessairement convexe).

Donc, *si* $L(\bar{x}) = T(\bar{x})$, on peut remplacer $T(\bar{x})$ par $L(\bar{x})$ dans la relation précédente, qui exprime alors que *le point* $\bar{x}$, *solution du Problème* [VI], *est solution du problème linéarisé* [VI_l].

Le théorème 4^{bis} est ainsi établi.

Remarque.- La comparaison de ce Théorème 4^{bis} avec le Théorème 4 du § 4.1.2. montre que *des contraintes peuvent être qualifiées en un point pour un problème d'optimisation, sans être qualifiées en ce point pour un problème de recherche de "programmes maximin"* (voir l'exemple III du § 4.1.5.).

Théorème 5^{bis}.– *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* [VI], *où les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de* $\bar{x}$, *il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_t), \quad (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n), \quad (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla \left[\sum_r \bar{\gamma}_r f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} = 0}$$

avec
$$\left\{\begin{array}{l}
\bar{\gamma}_r \geqslant 0, \quad f_r(\bar{x}) - v(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{\gamma}_r(f_r(\bar{x}) - v(\bar{x})) = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } r \\
\bar{\lambda}_j \geqslant 0, \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0, \quad \bar{\lambda}_j g_j(\bar{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } j \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h_k(\bar{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } k \\
\qquad\qquad \left[\text{d'où } \; l(\bar{x}) = \left(\sum_r \bar{\gamma}_r\right) v(\bar{x})\right],
\end{array}\right)$$

les $\bar{\gamma}_r$ *et les multiplicateurs* $\bar{\lambda}_j$ *qui affectent les fonctions* g_j *non localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ (c'est-à-dire les g_j qui ne sont pseudo-convexes, ou convexes, ou linéaires affines, sur aucun voisinage ouvert de $\bar{x}$) *pouvant être choisis non tous nuls.*

En effet, si le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VI], où les fonctions h_k sont supposées localement linéaires affines en $\bar{x}$, *le système des* $(t_0 + n_0 + p)$ *relations linéaires*

[t_0 étant le nombre des fonctions f_r telles que $f_r(\bar{x}) = v(\bar{x})$,
n_0 étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$]

$$(\mathrm{VI}_l') \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l}
\nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 \quad \text{pour tout } r \text{ tel que } f_r(\bar{x}) = v(\bar{x}) \\
\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0, \\
\qquad\qquad g_j \text{ n'étant pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\
\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0, \\
\qquad\qquad g_j \text{ étant localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\
\nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout } k \text{ (les } h_k \text{ étant localement} \\
\qquad\qquad \text{linéaires affines en } \bar{x})
\end{array}\right.}$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{R}^m$.

Car, s'il en était autrement, il existerait un voisinage ouvert de $\bar{x}$ dans lequel les solutions x du système (VI_l') vérifieraient les relations

$$(VI)\quad \begin{cases} f_r(x) - v(\bar{x}) > 0\ , & \text{pour } r \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ t\} \\ g_j(x) \geqslant 0\ , & \text{pour } j \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ n\} \\ h_k(x) = 0\ , & \text{pour } k \in \{1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ p\} \end{cases}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VI].

Ce résultat s'établit, et le Théorème 5^{bis} s'en déduit par application du lemme de Fourier, exactement comme il a été fait au § 4.1.3. pour le Théorème 5.

<u>Théorème 6^{bis}</u>.- *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [VI], où les fonctions h_k intervenant dans les p égalités $h_k(x) = 0$ (s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de $\bar{x}$, *et si le système des* $(n_o + p)$ *relations linéaires* (n_o étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$(VI_l'')\quad \begin{cases} \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0 \text{ pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ , \\ \qquad g_j \text{ n'étant pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \text{ pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0\ , \\ \qquad g_j \text{ étant localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \text{ pour tout } k \\ \qquad (\text{les } h_k \text{ étant localement linéaires affines en } \bar{x}) \end{cases}$$

admet une solution $x^* \in \mathbf{R}^m$ (ou $x^* - \bar{x} = X^*$) ,

- *alors le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VI] *que s'il est solution du problème linéarisé* [VI_l] .

Autrement dit, *l'existence d'une solution du système linéaire* (VI_l'') *est une condition suffisante de qualification des contraintes du Problème* [VI] *au point* $\bar{x}$.

Ce théorème s'établit exactement comme le Théorème 6 du § 4.1.3. Il montre d'ailleurs que la condition de qualification donnée par le Théorème 6, pour le Problème [I], reste valable pour le problème plus général [VI].

On a vu aussi au § 4.1.3. que *cette condition est un corollaire de la condition plus générale* $L(\bar{x}) = T(\bar{x}) = P(\bar{x})$ *donnée par le Théorème 4*^{bis}.

— Bien entendu, *les cinq conditions particulières de qualification des contraintes données par les Corollaires du Théorème* 6 (voir § 4.1.3.), *pour le Problème* [I], *restent valables pour le Problème* [VI].

4.2.3. <u>*Cas où les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes*</u>.

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VI] revient à dire qu'il existe un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tel que, $C \subset \mathbf{R}^m$ étant le domaine non vide défini par les contraintes de ce problème,

$$[x \in (\Omega(\bar{x}) \cap C)] \Longrightarrow [\exists r \mid f_r(x) \leqslant v(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})].$$

Le maximum local de $\min_r f_r(x)$ au point $\bar{x}$ est un maximum absolu si de plus $\Omega(\bar{x}) \cap C = C$.

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé $[VI_l]$ revient à dire que

$$[x \in L(\bar{x})] \Longrightarrow [\exists r \mid f_r(\bar{x}) = v(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \leqslant 0].$$

Le théorème suivant en résulte, et s'établit comme le Théorème 7 du § 4.1.4.

<u>Théorème 7bis</u>.– *Les conditions de Kuhn et Tucker, données au* § 4.2.1., *impliquent que le point* $\bar{x}$ *maximise, au moins localement, la plus petite des* t *valeurs* $f_r(x)$ *des fonctions* f_r *pour* $x \in C$ (domaine défini par les contraintes du Problème [VI]) *si le domaine* C *est localement pseudo-convexe au point* $\bar{x}$ *et si les fonctions* f_r *pour lesquelles* $f_r(\bar{x}) = v(\bar{x})$ *sont localement pseudo-concaves sur* C *au point* $\bar{x}$.

Le maximum local de $\min_r f_r(x)$ *au point* $\bar{x}$ *est un maximum absolu si ces deux conditions sont remplies sans la restriction* "localement".

[Comme dans le Théorème 7, *si* $\nabla f_r(\bar{x}) \neq 0$ *et si* f_r *est continue*, l'hypothèse de pseudo-concavité d'une fonction f_r peut être remplacée, dans le Théorème 7bis, par une *hypothèse de quasi-concavité* qui l'implique.]

Le Théorème 7bis et le 4ème corollaire du Théorème 6bis permettent de retrouver les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker pour les problèmes concaves, qui ont été données au § 3.3.2., mais on suppose de plus ici que les t fonctions f_r et les n fonctions g_j sont différentiables au point $\bar{x}$.

4.2.4. *Interprétation économique des multiplicateurs.*

En liaison avec le Problème [VI], et pour obtenir une interprétation des multiplicateurs, considérons le problème paramétrique suivant, dit Problème [VI_p] :

Pb [VI_p]

Déterminer un "vecteur programme" $x \in \mathbb{R}^m$ *maximisant le plus petit des* t *nombres* $(f_r(x) - a_r)$, *les* $f_r(x)$ *étant les valeurs prises au point* x *par* t "fonctions économiques" f_r $(r \in \{1, 2, \dots, t\})$, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant b_j & \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ h_k(x) = c_k & \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}, \end{cases}$$

où les $(t + n + p)$ *paramètres* a_r , b_j *et* c_k *sont les coordonnées d'un vecteur* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{t+n+p}$ *qui peut varier dans un voisinage ouvert* Γ *de l'origine.*

On suppose que, pour $(a, b, c) = 0$, il existe un point solution $\bar{x}$, que les fonctions f_r , g_j , h_k sont définies et différentiables sur un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$, que les conditions de Kuhn et Tucker du § 4.2.1. admettent comme solution "*non dégénérée*" le point $\bar{x}$ et les valeurs *uniques* $\bar{\gamma}_r$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ des $(t + n + p)$ multiplicateurs correspondant aux fonctions économiques et aux contraintes.

On suppose de plus que, pour tout $(a, b, c) \in \Gamma$, les conditions de Kuhn et Tucker définissent d'une manière unique, *comme fonctions de* (a, b, c) *continues et différentiables à l'origine,* un point $x \in \Omega(\bar{x})$ qui est solution du problème posé, et les valeurs γ_r , λ_j, μ_k des multiplicateurs correspondants.

Le nombre $v(x) = \min_r \{f_r(x) - a_r\}$ *en ce point solution* x *est ainsi défini en fonction, continue et différentiable à l'origine, du point* $(a, b, c) \in \Gamma$:

$$\boxed{\max_x v(x) = \max_x \min_r \{f_r(x) - a_r\} = \varphi(a, b, c)}$$

et l'on se propose de déterminer la différentielle à l'origine de cette fonction φ .

D'après les hypothèses, pour tout vecteur $(a, b, c) \in \Gamma$, le seul point solution x qui appartienne à $\Omega(\bar{x})$, la valeur $v(x)$ et les $(t + n + p)$ multiplicateurs γ_r, λ_j, μ_k vérifient les conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$
(\mathrm{VII}_p)\quad
\boxed{\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[l(x) = \sum_r \gamma_r\, f_r(x) + \sum_j \lambda_j\, g_j(x) + \sum_k \mu_k\, h_k(x)\right] = 0\ , & & \\
 & \text{pour} & i \in \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots .\ m\}\ (= I) \\
\sum_r \gamma_r = 1\ , & & \\
\gamma_r \geqslant 0\ ,\quad f_r(x) - a_r - v(x) \geqslant 0\ , & & \gamma_r(f_r(x) - a_r - v(x)) = 0\ , \\
 & \text{pour} & r \in \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots ,\ t\}\ (= R) \\
\lambda_j \geqslant 0\ ,\quad g_j(x) - b_j \geqslant 0\ , & & \lambda_j(g_j(x) - b_j) = 0\ , \\
 & \text{pour} & j \in \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots ,\ n\}\ (= J) \\
 & & h_k(x) - c_k = 0\ , \\
 & \text{pour} & k \in \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots ,\ p\}\ (= K)
\end{array}
\right.}
$$

Pour $(a, b, c) = 0$, ces conditions admettent comme solution

$$x(0) = \bar{x}\ ,\quad v(\bar{x})\ ,\quad \gamma_r(0) = \bar{\gamma}_r\ ,\quad \lambda_j(0) = \bar{\lambda}_j\ ,\quad \mu_k(0) = \bar{\mu}_k\ ,$$

et cette solution est, par hypothèse, "non dégénérée" en ce sens que, *dans chacun des* $(t + n)$ *produits* $\bar{\gamma}_r\,(f_r(\bar{x}) - v(\bar{x}))$ *et* $\bar{\lambda}_j\, g_j(\bar{x})$, *un seul des deux facteurs est nul, tandis que l'autre est strictement positif.*

Pour $(a\ ,\ b\ ,\ c) \in \Gamma$, il résulte des hypothèses que x, $v(x)$, γ_r, λ_j, μ_k, ainsi que $(f_r(x) - a_r - v(x))$ et $(g_j(x) - b_j)$, sont définis comme fonctions de $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ continues à l'origine. Le voisinage Γ de l'origine peut donc être choisi assez petit pour que, en vertu des relations d'exclusion, on ait, pour tout $(a\ ,\ b\ ,\ c) \in \Gamma$,

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
[\bar{\gamma}_r = 0] \Longrightarrow [\gamma_r = 0] & (r \in R^\circ) & \\
\qquad\text{et}\quad [f_r(\bar{x}) = v(\bar{x})] & \Longrightarrow [f_r(x) - a_r = v(x)] & (r \in R^1), \\
[\bar{\lambda}_j = 0] \Longrightarrow [\lambda_j = 0] & (j \in J^\circ) & \\
\qquad\text{et}\quad [g_j(\bar{x}) = 0] & \Longrightarrow [g_j(x) = b_j] & (j \in J^1).
\end{array}
\right.
$$

Il en résulte que, pour $(a\ ,\ b\ ,\ c) \in \Gamma$, le point solution $x \in \Omega(\bar{x})$, la valeur $v(x)$, les t_1 multiplicateurs γ_r non nuls $(r \in R^1)$, les n_1 multiplicateurs λ_j non nuls $(j \in J^1)$ et les p multiplicateurs $\mu_k\ (k \in K)$ sont déterminés par le système des $(m + 1 + t_1 + n_1 + p)$ équations à $(m + 1 + t_1 + n_1 + p)$ inconnues :

$$
(\mathrm{VII}'_p)\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[l(x) = \sum_{r\in R^1} \gamma_r\, f_r(x) + \sum_{j\in J^1} \lambda_j\, g_j(x) + \sum_{k\in K} \mu_k\, h_k(x)\right] = 0\ , & \\
 & \text{pour}\quad i \in \{1\ ,\ 2\ ,\dots,\ m\} \\
1 - \sum_{r\in R^1} \gamma_r = 0 & \\
f_r(x) - v(x) - a_r = 0\ , & \text{pour}\quad r \in R^1 \\
g_j(x) \qquad\quad - b_j = 0\ , & \text{pour}\quad j \in J^1 \\
h_k(x) \qquad\quad - c_k = 0\ , & \text{pour}\quad k \in K
\end{array}\right.
$$

Quand le point $(a\ ,\ b\ ,\ c) \in \Gamma$ *varie d'une manière quelconque à partir de l'origine,* le point solution x varie à partir de $\bar{x}$, la valeur $v(x)$ varie à partir de $v(\bar{x})$, les multiplicateurs γ_r, λ_j, μ_k varient à partir de $\bar{\gamma}_r$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ (avec $\gamma_r = \bar{\gamma}_r = 0$ pour $r \in \mathbf{R}^\circ$ et $\lambda_j = \bar{\lambda}_j = 0$ pour $j \in J^\circ$), et le système (VII'_p) implique les relations différentielles :

$$
\left\{\begin{array}{l}
\sum_{r\in R^1} \bar{\gamma}_r\, df_r(x) + \sum_{j\in J^1} \bar{\lambda}_j\, dg_j(x) + \sum_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dh_k(x) = 0\ , \\
\left(1 - \sum_{r\in R^1} \bar{\gamma}_r\right) dv(x) = 0\ , \\
df_r(x) - dv(x) - da_r = 0\ ,\ \text{pour } r \in R^1\ , \\
dg_j(x) \qquad\quad - db_j = 0\ ,\ \text{pour } j \in J^1\ , \\
dh_k(x) \qquad\quad - dc_k = 0\ ,\ \text{pour } k \in K\ ,
\end{array}\right.
$$

d'où

$$
dv(x) = -\sum_{r\in R^1} \bar{\gamma}_r\, da_r - \sum_{j\in J^1} \bar{\lambda}_j\, db_j - \sum_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dc_k\ .
$$

En définitive, puisque $\bar{\gamma}_r = 0$ pour $r \in R^\circ$ et $\bar{\lambda}_j = 0$ pour $j \in J^\circ$ et que x désigne ici un point solution du Problème $[\mathrm{VI}_p]$, on obtient ainsi la *différentielle de* $\varphi(a\ ,\ b\ ,\ c)$ *à l'origine de l'espace des* $(a\ ,\ b\ ,\ c)$:

$$
\boxed{d\,[\max_x\ v(x) = \varphi(a\ ,\ b\ ,\ c)] = -\sum_{r\in R} \bar{\gamma}_r\, da_r - \sum_{j\in J} \bar{\lambda}_j\, db_j - \sum_{k\in K} \bar{\mu}_k\, dc_k}
$$

Ainsi, *le système des multiplicateurs* $\bar{\gamma}_r$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ *correspondant aux fonctions économiques et aux contraintes du Problème* $[\mathrm{VI}_p]$ *est opposé au système des dérivées partielles du maximum de* $\min_r \{f_r(x) - a_r\}$, *par rapport aux paramètres* a_r, b_j, c_k.

(Ce résultat généralise celui qui a été obtenu au § 4.1.6. Il s'en déduit d'ailleurs sans difficulté si l'on met le problème paramétrique $[VI_p]$ sous la forme d'un problème d'optimisation $[VI'_p]$ analogue au Problème $[VI']$.)

<u>*Note complémentaire 1*</u>.– *Pour que les conditions posées dans l'énoncé du Problème* $[VI_p]$ *soient vérifiées, il suffit* (d'après le théorème des fonctions implicites)

- que, pour $(a , b , c) = 0$, il existe un point solution $\bar{x}$,

- que les fonctions f_r , g_j , h_k soient définies et deux fois continûment différentiables sur un voisinage ouvert $\Omega(\bar{x})$ du point $\bar{x}$,

- que les conditions de Kuhn et Tucker admettent comme solution "*non dégénérée*" le point $\bar{x}$ et les valeurs *uniques* $\bar{\gamma}_r$, $\bar{\lambda}_j$, $\bar{\mu}_k$ des multiplicateurs correspondants,

- *qu'au point* $(\bar{x}_i , v(\bar{x}) , \bar{\gamma}_r , \bar{\lambda}_j , \bar{\mu}_k)$ *la matrice jacobienne* $\bar{N}$ *du système* (VII'_p) *soit régulière*,

- et qu'enfin, pour $(a , b , c) \in \Gamma$ (voisinage assez petit de l'origine), le point x , voisin de $\bar{x}$ et défini sans ambiguïté par le système (VII'_p), soit solution du Problème $[VI_p]$.

La matrice jacobienne $\bar{N}$ du système (VII'_p), aux inconnues x_i, $v(x)$, γ_r, λ_j, μ_k, est une matrice symétrique, à $(m + 1 + t_1 + n_1 + p)$ lignes ou colonnes, qu'il est facile de former en complétant la matrice jacobienne $\bar{M}$ du système (II'_p) qui a été formée au § 4.1.6.

(Dans cette matrice $\bar{N}$, interviennent seulement les fonctions économiques f_r telles que $f_r(\bar{x}) = \min_r f_r(\bar{x})$ et les contraintes bloquées à l'optimum, ainsi que les multiplicateurs correspondants.)

<u>*Note complémentaire 2*</u>.– *Dans le cas où le problème paramétrique* $[VI_p]$ *est un problème concave, et non plus nécessairement linéarisable*, c'est-à-dire si les fonctions f_r et g_j sont concaves (sans être nécessairement différentiables) et si les fonctions h_k sont linéaires affines, *la fonction* φ *définie par*

$$\varphi(a , b , c) = \max_x \min_r \{f_r(x) - a_r\}$$

est une fonction concave de la variable vectorielle $(a , b , c) \in \mathbf{R}^{t+n+p}$, *sur toute partie convexe de son ensemble de définition.*

En effet,

– *si le point* x^1 *est solution du problème pour* $(a, b, c) = (a^1, b^1, c^1)$,

$$\varphi(a^1, b^1, c^1) = \min_r \{f_r(x^1) - a_r^1\}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_j(x^1) \geqslant b_j^1 & \text{pour tout } j, \\ h_k(x^1) = c_k^1 & \text{pour tout } k; \end{cases}$$

– *si le point* x^2 *est solution du problème pour* $(a, b, c) = (a^2, b^2, c^2)$,

$$\varphi(a^2, b^2, c^2) = \min_r \{f_r(x^2) - a_r^2\}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_j(x^2) \geqslant b_j^2 & \text{pour tout } j, \\ h_k(x^2) = c_k^2 & \text{pour tout } k. \end{cases}$$

Il en résulte alors, en vertu de la concavité des fonctions g_j et de la linéarité des fonctions h_k, que, *pour tout scalaire* $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} g_j((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \geqslant (1-\lambda)\, g_j(x^1) + \lambda g_j(x^2) \geqslant (1-\lambda)b_j^1 + \lambda b_j^2 & \text{pour tout } j, \\ h_k((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) = (1-\lambda)\, h_k(x^1) + \lambda h_k(x^2) = (1-\lambda)c_k^1 + \lambda c_k^2 & \text{pour tout } k, \end{cases}$$

de sorte que *le point* $((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2)$ *vérifie les contraintes du problème posé pour* $(a, b, c) = (1-\lambda)(a^1, b^1, c^1) + \lambda(a^2, b^2, c^2)$.

Par conséquent, d'après la définition de la fonction φ et en vertu de la concavité des fonctions f_r,

$$\begin{aligned} \varphi((1-\lambda)(a^1, b^1, c^1) &+ \lambda(a^2, b^2, c^2)) \\ &\geqslant \min_r \{f_r((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) - ((1-\lambda)a_r^1 + \lambda a_r^2)\} \\ &= f_{r_0}((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) - ((1-\lambda)a_{r_0}^1 + \lambda a_{r_0}^2) \\ &\geqslant (1-\lambda)(f_{r_0}(x^1) - a_{r_0}^1) + \lambda(f_{r_0}(x^2) - a_{r_0}^2) \\ &\geqslant (1-\lambda) \min_r \{f_r(x^1) - a_r^1\} + \lambda \min_r \{f_r(x^2) - a_r^2\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\varphi((1-\lambda)(a^1, b^1, c^1) + \lambda(a^2, b^2, c^2)) \geqslant (1-\lambda)\, \varphi(a^1, b^1, c^1) + \lambda\varphi(a^2, b^2, c^2), \forall \lambda \in [0, 1]}$$

La concavité de la fonction φ sur toute partie convexe de son ensemble de définition est ainsi établie.

(Ce résultat généralise celui qui a été obtenu dans la Note 2 du § 4.1.6. Il s'en déduit d'ailleurs sans difficulté si l'on met le problème paramétrique [VI_p] sous la forme d'un problème d'optimisation [VI_p'] analogue au Problème [VI'].)

4.3. Problème de recherche de "programmes extrêmes".

On considérera ici le problème suivant, dit Problème [VIII], qui généralise d'une autre manière le Problème [I] considéré au § 4.1. :

Pb [VIII]

Déterminer des "vecteurs programmes" $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$

rendant "extrême", *au moins localement, un vecteur de coordonnées* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_t(x)$, *où* f_1, f_2, ..., f_t *sont des* "fonctions économiques", *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\begin{cases} g_j(x) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ h_k(x) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, p\}. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe au moins un point solution $\bar{x}$, *que les fonctions* f_r, g_j, h_k *sont définies sur une partie ouverte de* $\mathbf{R}^m$ *comprenant* $\bar{x}$, *soit* $\Omega(\bar{x}) \subset \mathbf{R}^m$, *et qu'elles sont différentiables au point* $\bar{x}$.

Les contraintes compatibles du problème définissent une partie non vide C de $\mathbf{R}^m$ et il s'agit de déterminer les points $\bar{x} \in C$ tels qu'il n'existe pas dans C, ou au moins dans $\Omega(\bar{x}) \cap C$, de point x donnant à chacune des t fonctions $f_r (r \in \{1, 2, \ldots, t\})$ une valeur $f_r(x) \geqslant f_r(\bar{x})$, avec inégalité stricte pour au moins une de ces fonctions.

4.3.1. *Problème linéarisé au voisinage d'un point solution. Conditions de Kuhn et Tucker.*

Le problème tangent au Problème [VIII] en un point solution $\bar{x}$, ou problème linéarisé au voisinage de ce point, est, par définition, le Problème [VIII$_l$] suivant :

Pb [VIII$_l$]

Rendre extrême le vecteur de coordonnées $f_r(\bar{x}) + \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x})$, $(r \in \{1, 2, \ldots, t\})$, *sous les contraintes*

$$\begin{cases} g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 & \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, p\}, \end{cases}$$

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* [VIII$_l$] *si, et seulement si, aucun des* t *systèmes de* $(t + n + p)$ *relations linéaires*

(VIII$_l$)

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0, & \text{pour } r \in \{1, 2, \ldots, t\} \\ \text{l'une de ces } t \text{ inégalités étant stricte,} & \\ g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0, & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ h_k(\bar{x}) + \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0, & \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, p\} \end{cases}}$$

n'admet de solution $x \in \mathbf{R}^n$, *tandis que le point* $\bar{x}$ *est solution du système* $(\overline{\mathrm{VIII}}_l)$ que l'on obtient à partir de chacun des systèmes (VIII_l) en remplaçant l'inégalité au sens strict par une inégalité au sens large.

D'après le Théorème 3^{ter} du § 3.4.1. (où les conditions de qualification sont vérifiées par les contraintes et les fonctions économiques du Problème $[\mathrm{VIII}_l]$ du fait qu'elles sont linéaires affines), ou, plus simplement, d'après le lemme de Fourier appliqué à chacun des t systèmes linéaires (VIII_l), on obtient les conditions (IX_l) suivantes :

(IX_l)

Le point $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[\mathrm{VIII}_l]$ *si, et seulement si, il existe des multiplicateurs scalaires*

$$(\bar{\gamma}_1 , \bar{\gamma}_2 , \ldots , \bar{\gamma}_t) , \quad (\bar{\lambda}_1 , \bar{\lambda}_2 , \ldots , \bar{\lambda}_n) , \quad (\bar{\mu}_1 , \bar{\mu}_2 , \ldots , \bar{\mu}_p)$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla \left[\sum_r \bar{\gamma}_r \; f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j \; g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k \; h_k(x) \right]_{x=\bar{x}} = 0}$$

$$\textit{avec} \begin{cases} \bar{\gamma}_r > 0 \quad \text{pour tout } r \; \left(\text{ce qui permet de prendre } \sum_r \bar{\gamma}_r = 1\right) \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0 , \quad g_j(\bar{x}) \geqslant 0 , \quad \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout } j \\ \qquad h_k(\bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout } k \end{cases}$$

$$\left[\text{d'où } \; l(\bar{x}) = \sum_r \bar{\gamma}_r f_r(\bar{x}) \right] .$$

[La mise en évidence de l'impossibilité de chacun des t systèmes (VIII_l), sous forme purement numérique par combinaison linéaire, selon le lemme de Fourier, donne immédiatement t fonctions l_r $(r \in \{1 , 2 , \ldots , t\})$ possédant les propriétés de la fonction l des conditions (IX_l), à ceci près que dans $l_r(x)$ le multiplicateur $\bar{\gamma}_r$ est strictement positif tandis que $\bar{\gamma}_1 , \ldots , \bar{\gamma}_{r-1}$, $\bar{\gamma}_{r+1} , \ldots , \bar{\gamma}_t$ sont seulement positifs ou nuls. La somme de ces t fonctions l_r est alors une fonction l possédant toutes les propriétés indiquées dans les conditions (IX_l).]

Les conditions (IX_l), *nécessaires et suffisantes pour que le point* $\bar{x}$ *soit solution du problème linéarisé* $[\mathrm{VIII}_l]$, *sont les conditions de Kuhn et Tucker pour ce problème.* On voit que chacune des t fonctions économiques f_r intervient avec un multiplicateur strictement positif dans la fonction l où, d'autre part, les contraintes bloquées (ou serrées) au point $\bar{x}$ sont seules à pouvoir intervenir avec un multiplicateur non nul.

Complément.- On peut observer que *les conditions* (IX_l) *se déduisent des conditions* (II_l) *par substitution de la fonction* $\sum_r \overline{\gamma}_r f_r(x)$, *combinaison linéaire à coefficients positifs des* $f_r(x)$, *à la fonction* $f(x)$, *sans autre condition*.

On déduit alors des résultats donnés au § 4.1.1. qu'*il est possible de n'introduire dans la fonction l que certaines des contraintes du Problème* [$VIII_l$] *en conservant explicitement les autres* (par exemple les conditions de signe).

On pourrait aussi, comme au § 4.1.1., mettre ces conditions sous la forme de *conditions de col pour une fonction de plusieurs variables vectorielles* (x et λ, μ), dans lesquelles les t multiplicateurs positifs ($\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_t$) joueraient le rôle de paramètres arbitraires.

4.3.2. *Conditions de qualification*.

Les conditions (IX_l) données au § 4.3.1., et les conditions équivalentes qui pourraient en être déduites, expriment que le point $\bar{x}$ est solution du Problème linéarisé [$VIII_l$], tangent en $\bar{x}$ au Problème [VIII]. Mais elles n'expriment pas, en général, que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [VIII], et elles ne sont même ni nécessaires ni suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Cependant, *si les contraintes et les fonctions économiques du Problème* [VIII] *vérifient au point* $\bar{x}$ *certaines conditions de qualification, le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VIII] *que s'il est solution du problème linéarisé* [$VIII_l$].

Les conditions (IX_l) donnent alors des conditions nécessaires (mais non suffisantes, en général) pour que le point $\bar{x}$ soit solution du Problème [VIII]. *Ce sont les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker*. (On sait, d'après l'étude faite au § 3.4.2., que ces conditions deviennent suffisantes pour les problèmes concaves linéarisables. Et l'on verra au § 4.3.3. qu'il en est de même dans des cas un peu plus généraux.)

On va montrer que, tout en procédant des conditions de qualification des contraintes établies aux §§ 4.1.2. et 4.1.3. pour le Problème [I], *les conditions de qualification doivent ici faire intervenir non seulement les contraintes mais encore les* t *fonctions économiques du Problème* [VIII].

Théorème 4ter.- *Si chacun des* t *systèmes de* ($t - 1 + n + p$) *relations déduits, par suppression de l'inégalité stricte, des* t *systèmes de* ($t + n + p$) *relations*

$$
(\mathrm{VIII})\quad \boxed{\begin{cases} f_r(x) - f_r(\bar{x}) \geqslant 0\ , & \text{pour } r \in \{1\ ,2\ ,\dots,t\} \\ \textit{l'une de ces } t \textit{ inégalités étant stricte,} & \\ g_j(x) \geqslant 0\ , & \text{pour } j \in \{1\ ,2\ ,\dots,n\} \\ h_k(x) = 0\ , & \text{pour } k \in \{1\ ,2\ ,\dots,p\} \end{cases}}
$$

vérifie une "condition de qualification" *analogue à la condition* $L(\bar{x}) = P(\bar{x})$ *posée dans le Théorème* 4 *du* § 4.1.2. (ou aux conditions qui s'en déduisent), *le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VIII] *que s'il est solution du Problème linéarisé* [VIII_l].

Autrement dit, *les conditions précédentes sont des conditions suffisantes de qualification des contraintes et des fonctions économiques du Problème* [VIII] *au point* $\bar{x}$.

En effet, le point $\bar{x}$, satisfaisant aux contraintes du Problème [VIII], est solution de ce problème si, et seulement si, il existe un voisinage ouvert de $\bar{x}$, soit $\Omega(\bar{x})$, dans lequel aucun des t systèmes (VIII) n'admet de solution. Et, en vertu des conditions de qualification posées, le fait qu'un des t systèmes (VIII) n'admette pas de solution dans $\Omega(\bar{x})$ implique l'impossibilité du système linéarisé (VIII_l) correspondant, car le point $\bar{x}$ est alors solution d'un problème d'optimisation linéarisable à $(t - 1 + n + p)$ contraintes qualifiées (voir § 4.1.) où il s'agit de maximiser l'une des fonctions f_r .

Il en résulte que, si le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VIII], il est solution du problème linéarisé [VIII_l], ce qui établit le théorème 4^{ter}.

Théorème 5^{ter}.– *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *est solution du Problème* [VIII], *où les fonctions* h_k *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de* $\bar{x}$, *il existe des multiplicateurs scalaires non tous nuls*

$$
(\bar{\gamma}_1\ ,\ \bar{\gamma}_2\ ,\dots,\ \bar{\gamma}_t)\ ,\qquad (\bar{\lambda}_1\ ,\bar{\lambda}_2\ ,\dots,\ \bar{\lambda}_n)\ ,\qquad (\bar{\mu}_1\ ,\bar{\mu}_2\ ,\dots,\ \bar{\mu}_p)
$$

qui permettent de former, par combinaison linéaire, une fonction l telle que

$$
\boxed{\nabla l(\bar{x}) = \nabla\left[\sum_r \bar{\gamma}_r\, f_r(x) + \sum_j \bar{\lambda}_j\, g_j(x) + \sum_k \bar{\mu}_k\, h_k(x)\right]_{x=\bar{x}} = 0}
$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \bar{\gamma}_r \geqslant 0 \,, & \text{pour tout} \quad r & \\ \bar{\lambda}_j \geqslant 0 \,, & g_j(\bar{x}) \geqslant 0 \,, \quad \bar{\lambda}_j \, g_j(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad j \\ & h_k(\bar{x}) = 0 & \text{pour tout} \quad k \end{array} \right\}$$

$$\left[\text{d'où} \quad l(\bar{x}) = \sum_r \bar{\gamma}_r \, f_r(\bar{x}) \right] ,$$

et dans laquelle – ou bien les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ *et* $\bar{\lambda}_j$ *qui affectent les fonctions* f_r *et* g_j *non localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ *peuvent être choisis non tous nuls,*

– ou bien tous les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ *peuvent être choisis non nuls.*

En effet, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [VIII]; où les fonctions h_k sont supposées localement linéaires affines en $\bar{x}$, *aucun des systèmes de* $(t + n_0 + p)$ *relations linéaires* (n_0 étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$(\text{VIII}'_l) \left\{ \begin{array}{l} \nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad r \in \{1, 2, \dots, t\} , \\ \quad \textit{avec inégalité stricte} \\ \qquad \text{- pour un } r \text{ au moins, arbitrairement choisi,} \\ \qquad \text{- et pour tout } r \text{ tel que } f_r \text{ ne soit pas localement} \\ \qquad\;\; \text{pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad j \quad \text{tel que} \quad g_j(\bar{x}) = 0 , \\ \quad \textit{avec inégalité stricte} \\ \qquad \text{si } g_j \text{ n'est pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\ \nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \\ \qquad \text{(les } h_k \text{ étant localement linéaires affines en } \bar{x}) \end{array} \right.$$

n'admet de solution $x \in \mathbf{R}^m$.

Car, s'il en était autrement, il existerait un voisinage ouvert de $\bar{x}$ dans lequel les solutions x d'un système (VIII'_l) vérifieraient l'un des systèmes (VIII), ce qui est contradictoire avec le fait que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VIII].

Ce résultat s'établit, et le Théorème 5^{ter} s'en déduit par application du lemme de Fourier, comme il a été fait au § 4.1.3. pour le Théorème 5. A chacun des systèmes linéaires impossibles (VIII'_l) correspond ainsi une combinaison linéaire nulle où les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ et $\bar{\lambda}_r$ affectant les inégalités strictes ne sont pas tous nuls. La somme de ces combinaisons linéaires est alors une fonction l possédant toutes les propriétés indiquées dans le théorème 5^{ter}.

Théorème 6^{ter}.- *Si le point* $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [VIII], où les fonctions h_k intervenant dans les p égalités $h_k(x) = 0$ (s'il en existe) sont supposées linéaires affines sur un voisinage ouvert de $\bar{x}$, *et si chacun des* t *systèmes* $(VIII_l'')$ *de* $(t - 1 + n_o + p)$ *relations linéaires déduits, par suppression de l'une des* t *premières inégalités, du système des* $(t + n_o + p)$ *relations* (n_o étant le nombre des contraintes $g_j(x) \geqslant 0$ bloquées par $\bar{x}$)

$$\left\{\begin{array}{l}
\nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad r \in \{1, 2, \dots, t\}, \\
\quad \textit{avec inégalité stricte} \\
\qquad\qquad \text{si } f_r \text{ n'est pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\
\nabla g_j(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_j(\bar{x}) = 0 , \\
\quad \textit{avec inégalité stricte} \\
\qquad\qquad \text{si } g_j \text{ n'est pas localement pseudo-convexe en } \bar{x} \\
\nabla h_k(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout } k \\
\qquad\qquad (\text{les } h_k \text{ étant localement linéaires affines en } \bar{x})
\end{array}\right.$$

admet une solution $x^r \in \mathbf{R}^m$ (ou $x^r - \bar{x} = X^r$) ,

- *alors le point* $\bar{x}$ *ne peut être solution du Problème* [VIII] *que s'il est solution du problème linéarisé* $[VIII_l]$.

Autrement dit, *les conditions précédentes sont des conditions suffisantes de qualification des contraintes et des fonctions économiques du Problème* [VIII] *au point* $\bar{x}$.

En effet, *si le point* $\bar{x}$ *est solution du Problème* [VIII], aucun des systèmes linéaires $(VIII_l')$ considérés à propos du Théorème 5^{ter} n'admet de solution. Mais, en vertu des hypothèses, chacun de ces systèmes impossibles résulte, d'une ou plusieurs manières, de l'adjonction d'une inégalité $\nabla f_r(\bar{x})(x - \bar{x}) > 0$ à un système $(VIII_l'')$ qui admet une solution, de sorte que la combinaison linéaire qui met en évidence son impossibilité, selon le lemme de Fourier, fait intervenir cette inégalité avec un multiplicateur $\bar{\gamma}_r$ non nul.

On peut ainsi obtenir t combinaisons linéaires l_r , dont la somme est une fonction l dans laquelle tous les multiplicateurs $\bar{\gamma}_r$ sont strictement positifs, et qui vérifie les conditions de Kuhn et Tucker (IX_l) exprimant que *le point* $\bar{x}$ *est solution du problème linéarisé* $[VIII_l]$.

Le théorème 6^{ter} est ainsi établi.

On sait, d'après les résultats obtenus au § 4.1.3., que *la condition de qualification donnée par le Théorème 6^{ter} est un corollaire de la condition plus générale donnée par le Théorème 4^{ter}*, ces conditions procédant respectivement des conditions de qualification des contraintes données par les Théorèmes 6 et 4 pour le Problème [I].

Corollaires du Théorème 6^{ter}.– Il serait facile d'énoncer et d'établir cinq conditions particulières de qualification des contraintes et des fonctions économiques du Problème [VIII], procédant respectivement des cinq conditions de qualification des contraintes du Problème [I] données par les Corollaires du Théorème 6.

Voici le premier et le plus simple de ces Corollaires :

Si le point $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ *vérifie les contraintes du Problème* [VIII], *si les* t *fonctions économiques* f_r *et les* n *fonctions* g_j *intervenant dans les inégalités* $g_j(x) \geqslant 0$ *sont localement pseudo-convexes en* $\bar{x}$ (ou, en particulier, localement linéaires affines en $\bar{x}$) , *et si les* p *fonctions* h_k *intervenant dans les égalités* $h_k(x) = 0$ *(s'il en existe) sont localement linéaires affines en* $\bar{x}$,

– *alors les contraintes et les fonctions économiques du Problème* [VIII] *sont qualifiées au point* $\bar{x}$.

En effet, les systèmes linéaires (VIII_l'') ne comprennent alors aucune inégalité stricte, et admettent donc la solution $x^r = \bar{x}$.

D'après le dernier de ces Corollaires, *on peut, dans l'énoncé du Théorème 6^{ter}, remplacer l'hypothèse de linéarité des fonctions* h_k, *intervenant dans les* p *égalités* $h_k(x) = 0$, *par l'hypothèse selon laquelle ces fonctions* h_k *sont continûment différentiables sur un voisinage ouvert de* $\bar{x}$ *et les* p *vecteurs gradients* $\nabla h_k(\bar{x})$ *sont linéairement indépendants, à condition que les* t *systèmes* (VIII_l'') *de* $(t - 1 + n_0 + p)$ *relations linéaires puissent être remplacés par les* t *systèmes* (VIII_l'''), *qui s'en déduisent par transformation de toutes les inégalités en inégalités strictes, sans qu'aucun de ces systèmes cesse d'admettre une solution.*

Remarque.– Les "conditions de qualification" posées dans le Théorème 6^{ter} ne sont pas seulement des conditions de qualification des contraintes du Problème [VIII] puisqu'elles font intervenir aussi les t fonctions économiques f_r. Elles impliquent cependant la condition de qualification des contraintes posée dans le Théorème 6 du § 4.1.3., mais, lorsque cette condition est remplie, *il se peut que certains programmes extrêmes* $\bar{x}$ *soient* "qualifiés", *en ce sens qu'ils vérifient les conditions de Kuhn et Tucker* (IX_l), *tandis que d'autres ne le sont pas.*

On peut alors dire que *les conditions de Kuhn et Tucker* (IX_l) *sont nécessaires pour que le point* $\bar{x}$ *soit solution* *qualifiée* (ou *"propre")* *du Problème* [VIII]. (Les solutions qualifiées, ou "propres", sont souvent préférables, en pratique, aux solutions non qualifiées, ou "impropres" [12].)

Exemple.–*On peut reprendre, comme problème linéarisable, le problème concave qui a été pris comme exemple au* § 3.4.1.

On vérifie encore que les conditions de qualification du Théorème 6^{ter} ne sont pas remplies par le point solution (non qualifiée) $\bar{x} = 1$, puisque l'équation $\{0(x-1) > 0\}$ n'a pas de solution.

4.3.3. *Cas où les conditions de Kuhn et Tucker sont suffisantes*.

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du Problème [VIII] revient à dire que $\bar{x}$ est simultanément solution des t problèmes d'optimisation linéarisables suivants :

Maximiser, au moins localement, la valeur $f_{r'}(x)$ *d'une fonction* $f_{r'}$, *sous les contraintes, supposées compatibles,*

$$\left\{\begin{array}{llll} f_r(x) - f_r(\bar{x}) & \geqslant 0 & \text{pour tout} & r \neq r' \\ g_j(x) & \geqslant 0 & \text{pour tout} & j \\ h_k(x) & = 0 & \text{pour tout} & k \end{array}\right\}$$

qui définissent un domaine $[C_{r'} \subset C \subset \mathbf{R}^m]$

(Chacun de ces t problèmes correspond à une valeur déterminée de l'indice $r' \in \{1, 2, \ldots, t\}$.)

Dire que le point $\bar{x}$ est solution du problème linéarisé [$VIII_l$] revient à dire que $\bar{x}$ est simultanément solution des t problèmes d'optimisation linéarisés respectivement tangents en $\bar{x}$ aux t problèmes précédents.

Le théorème suivant en résulte, d'après le Théorème 7 du § 4.1.4.

Théorème 7^{ter}.– *Les conditions de Kuhn et Tucker, données au* § 4.3.1., *impliquent que le point* $\bar{x}$ *rend* "extrême", *au moins localement, le vecteur de coordonnées* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_t(x)$ pour $x \in C$ (domaine défini par les contraintes du Problème [VIII]) *si les* t *parties* $C_{r'}$ *de* C *définies par les conditions* $\{f_r(x) - f_r(\bar{x}) \geqslant 0$ pour $r \neq r'\}$ *sont localement pseudo-convexes au point* $\bar{x}$ *et si les* t *fonctions* $f_r(r \in 1, 2, \ldots, t)$ *sont localement pseudo-concaves sur* C *au point* $\bar{x}$.

L'extremum local du vecteur de coordonnées $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_t(x)$ *au point* $\bar{x}$ *est un extremum absolu si ces deux contitions sont remplies sans la restriction* "localement".

[Comme dans le Théorème 7, *si* $\nabla f_r(\bar{x}) \neq 0$ *et si* f_r *est continue*, l'hypothèse de pseudo-concavité d'une fonction f_r peut être remplacée, dans le Théorème 7^{ter}, par une *hypothèse de quasi-concavité* qui l'implique.]

Les deux conditions posées dans le Théorème 7^{ter} *sont remplies, en particulier, si, les* p *fonctions* h_k *étant linéaires affines* (s'il en existe), *les* n *fonctions* g_j *sont quasi-concaves* (ou a fortiori concaves) *et les* t *fonctions* f_r *sont à la fois quasi-concaves sur* C *et pseudo-concaves au point* $\bar{x}$ *sur* C (ou a fortiori pseudo-concaves sur C, ou concaves sur C).

Ces résultats, complétés par le 4ème corollaire du Théorème 6^{ter} (procédant du 4ème corollaire du Théorème 6), permettent de retrouver les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker pour les problèmes concaves, qui ont été données au § 3.4.2., mais on suppose de plus ici que les t fonctions f_r et les n fonctions g_j sont différentiables au point $\bar{x}$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1 J. ABADIE - *Problèmes d'optimisation* (Institut Blaise Pascal, Paris, 1965).

2 J. ABADIE (editor) - *Nonlinear Programming* (North-Holland Publishing Company, 1967).

3 K. ARROW, L. HURWICZ and H. UZAWA - *Studies in linear and nonlinear Programming* (Stanford University Press, 1958).

4 K. ARROW, L. HURWICZ and H. UZAWA - *Constraint Qualifications in Maximization Problems* (Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 8, n° 2, pp. 175-191, Juin 1961).

5 C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI - *Programmes, jeux et réseaux de transport* (Dunod, 1962).

6 G. DANTZIG - *Linear Programming and Extensions* (Princeton University Press, 1963).

Traduction et adaptation française par E. VENTURA (Dunod, 1966).

7 R. DORFMAN, P. SAMUELSON and R. SOLOW - *Linear Programming and economic Analysis* (Mc Graw Hill, 1958).

8 J. FOURIER - *Note sur le calcul des inégalités* (dans Histoire de l'Académie des Sciences pour 1824, page 47, Didot, 1827).

9 D. GALE - *The Theory of linear economic Models* (Mc Graw Hill, 1960).

10 S. KARLIN - *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics* - Volume I (Pergamon Press, 1959).

11 T. KOOPMANS (editor) - *Activity Analysis of Production and Allocation* (Cowles Commission Monograph n° 13, Wiley, 1951).

12 H. KUHN and A. TUCKER - *Nonlinear Programming* (in Proceedings of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pp. 481-492, University of California Press, 1951).

13 H. KUHN and A. TUCKER (editors) - *Linear Inequalities and related Systems* (Annals of Mathematics Studies, n° 38, Princeton University Press, 1956).

14 O. MANGASARIAN - *Pseudo-convex Functions* (Journal of SIAM Control, Ser. A, Vol. 3, pp. 281-290, 1965).

15 R. PALLU DE LA BARRIERE - *Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire* (Revue Française de Recherche Opérationnelle, n° 27, pp. 163-180, 1963).

16 M. SIMONNARD - *Programmation linéaire* (Dunod, 1962).

17 S. VAJDA - *The Theory of Games and Linear Programming* (Methuen, 1956).

Traduction et adaptation française par J. BOUZITAT (Dunod, 1959).

18 J. VILLE - *Leçons sur quelques aspects nouveaux de la théorie des probabilités* (Annales de l'Institut Henri Poincaré, Tome 14, Fascicule 2, pp. 106-107, 1954).