

# CAHIERS DU BURO

G. KREWERAS

## Sur les éventails de segments

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.*

*Série Recherche*, tome 15 (1970), p. 3-41

[http://www.numdam.org/item?id=BURO\\_1970\\_\\_15\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BURO_1970__15__3_0)

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR LES ÉVENTAILS DE SEGMENTS

par

G. KREWERAS

## 1. INTRODUCTION : ÉVENTAILS ET PONTS

1.1 – Dans tout ce qui suit, nous employons le mot *segment* dans son sens usuel :  $a$  et  $b$  étant deux éléments d'un ensemble  $N$  totalement ordonné par la relation  $\leq$ , et tels que  $a \leq b$ , nous appellerons *segment*  $[a, b]$  l'ensemble

$$[a, b] = \{x \mid x \in N, a \leq x \leq b\};$$

$a$  et  $b$  seront appelés respectivement les extrémités gauche et droite de  $[a, b]$ .

De fait,  $N$  sera presque toujours un ensemble fini de cardinal  $n$ , isomorphe du point de vue ordinal à  $\{1, 2, \dots, n\}$  que nous désignerons en abrégé par  $[1, n]$  ; nous dirons alors que  $[a, b]$  est un segment *de*  $[1, n]$ . Pour éviter des répétitions fastidieuses du mot "cardinal", nous emploierons parfois le mot "longueur" à sa place quand il s'agira de segments. Il faut noter que, de ce fait, la longueur du segment  $[a, a]$  sera 1, et non 0 comme dans les contextes d'analyse classique.

Nous appellerons *éventail* tout ensemble de segments dont *aucun n'est inclus dans un autre*. Deux segments d'un même éventail ne peuvent donc notamment avoir ni même extrémité gauche, ni même extrémité droite. Il en résulte qu'il y a toujours sur un éventail de  $k$  segments un *ordre naturel des segments*, qui sera en général celui que l'on adoptera pour leur énumération ; ainsi, pour l'éventail des segments  $[a_i, b_i]$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , on aura :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_k$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots < b_k$$

en même temps que les  $k$  inégalités  $a_i \leq b_i$ .

Les éventails de segments peuvent se rencontrer dans la représentation d'un grand nombre de réalités concrètes. Dans la plupart des cas chaque segment représente un "phénomène" qui a un commencement (extrémité gauche) et une fin (extrémité droite), les phénomènes eux-mêmes ayant un ordre de succession commun au moins approximativement à leurs commencements et à leurs fins : cela peut être le cas pour le parc de machines d'un atelier, pour les clients présents dans une file d'attente, etc.

Nous dirons qu'un éventail est *connexe* si deux segments consécutifs de cet éventail ont au moins un point commun. Pour figurer un éventail quelconque, il peut être commode de représenter ses segments horizontalement, à des altitudes successives croissantes (fig. 1) ; si l'éventail n'est pas connexe, il peut être intéressant, pour gagner de l'espace, de redescendre à l'altitude initiale au début de chaque nouvelle composante connexe (fig. 2).

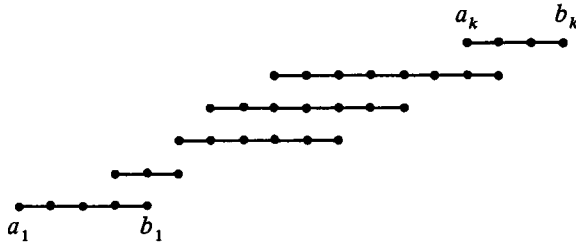


Fig. 1

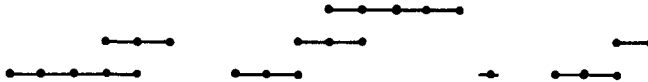


Fig. 2

Un éventail de segments peut évidemment donner lieu, et cela d'un grand nombre de manières, à une description partielle à l'aide d'un ou plusieurs paramètres. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux paramètres descriptifs suivants :

- nombre total de segments
- extrémité gauche du dernier segment
- nombre de segments ponctuels (de longueur 1)
- cardinal de la réunion des segments (ou *longueur couverte* par l'éventail)
- nombre maximum de segments deux à deux disjoints (ou *ouverture* de l'éventail).

– nombre maximum de segments deux à deux sécants (ou *épaisseur* de l'éventail)

– longueur du plus grand segment.

Pour l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  de tous les éventails de segments de  $[1, n]$ , ensemble dont nous préciserons le cardinal, nous déterminerons le nombre d'éventails pour lesquels l'un de ces paramètres a une valeur donnée. Notre objet essentiel sera d'établir que les lois de distribution finies correspondantes appartiennent à trois types principaux que nous nommerons  $(\alpha)$   $(\beta)$   $(\gamma)$  et d'en étudier les propriétés les plus importantes.

Indiquons que certaines des propriétés étudiées pourraient être aisément exprimées dans le langage de la théorie des graphes, que nous n'emploierons cependant pas ici. Les graphes dits "d'intervalles" ont notamment fait l'objet de divers travaux (cf. [1], [2], [4], [6]) dont celui-ci peut à certains égards être considéré comme un complément ou un développement.

1.2 – Très étroitement apparentée à la notion d'éventail est la notion de *pont*, que l'on rencontre notamment en statistique en liaison avec certains problèmes de scrutin, de ruine des joueurs ou de files d'attente. Nous appellerons *pont* de portée  $p$  un chemin qui, dans le plan quadrillé  $\mathbf{Z}^2$ , joint le point  $O(x_0, y_0)$  au point  $P(x_0 + p, y_0 + p)$  en  $2p$  étapes satisfaisant aux conditions suivantes :

1/  $p$  des étapes sont "sud-nord", c'est-à-dire font passer d'un point  $(x, y)$  au point  $(x, y + 1)$  et  $p$  sont "ouest-est", c'est-à-dire font passer d'un point  $(x, y)$  au point  $(x + 1, y)$  ; c'est l'existence de ces deux seules sortes d'étapes qui permet, par convention, l'emploi du mot "chemin".

2/ aucun des points de  $\mathbf{Z}^2$  par où passe le chemin n'est situé strictement au sud-est (c'est-à-dire au-dessous et/ou à droite) de la droite  $OP$  (fig. 3).

Le mot "pont" a une justification intuitive lorsque l'on se dispose de façon à faire apparaître au lieu de la figure 3 la figure 4 : il vaut mieux parler alors d'étapes ascendantes et d'étapes descendantes, que nous noterons respectivement  $c$  et  $d$ . Un pont dont le point de départ  $O$  est connu peut ainsi se définir à l'aide d'un *mot* employant  $p$  fois chacune des deux lettres  $c$  et  $d$ , étant entendu que la  $i$ -ième occurrence de  $c$  doit toujours précéder la  $i$ -ième occurrence de  $d$  ( $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ). Pour les ponts comme pour les éventails, nous nous intéresserons à un certain nombre de paramètres descriptifs, en empruntant cette fois leurs noms, pour des raisons némotéchniques évidentes, à une simili-technologie rudimentaire des ponts. Nous appellerons ainsi :

*culée* : tout point du chemin  $OP$  situé *sur* la droite  $OP$ , en précisant *culée intermédiaire* s'il ne s'agit ni de  $O$  ni de  $P$

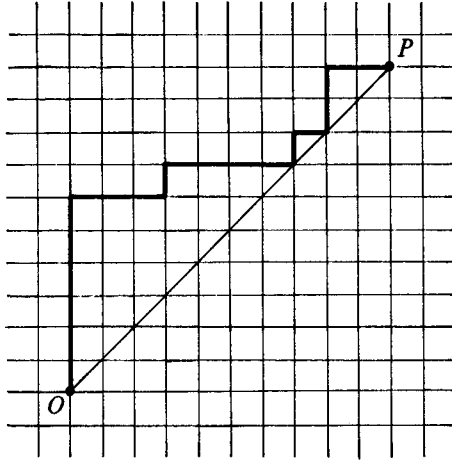


Fig. 3

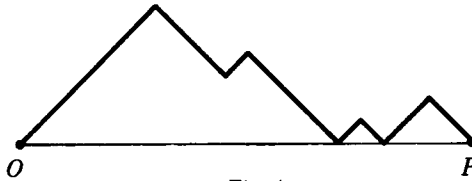


Fig. 4

- arche* : toute partie du chemin OP située entre deux culées consécutives
- pile* : tout point du chemin OP qui est point d'aboutissement d'une étape  $d$  et point de départ d'une étape  $c$  ; en particulier toute culée intermédiaire est une pile, mais il sera commode de convenir que O et P ne sont pas des piles
- arcade* : toute partie du chemin OP située soit entre O et la première pile, soit entre deux piles consécutives, soit entre la dernière pile et P
- sommet* : tout point du chemin OP qui est point d'aboutissement d'une étape  $c$  et point de départ d'une étape  $d$  (il y a un sommet et un seul par arcade)
- hauteur* : (d'un point quelconque du chemin OP) : excès, lorsque ce point est atteint, du nombre d'occurrences de  $c$  sur le nombre d'occurrences de  $d$
- hauteur d'un pont* (ou d'une arche) : hauteur maximale des points du chemin correspondant (ou de la partie de chemin).

Les ponts ne jouant ici qu'un rôle secondaire (puisque notre objectif est avant tout l'étude des éventails de segments), nous en étudierons un moins grand nombre de paramètres descriptifs.

Nous examinerons, cependant, outre la portée, les paramètres suivants :

- nombre d'arcades
- nombre d'arches
- hauteur.

A cause des parentés qui seront précisées entre les notions de pont et d'éventail, nous rencontrerons, à propos de distribution des ponts de portée donnée suivant les valeurs de ces paramètres, des lois des trois mêmes types déjà mentionnés. Dans certains cas, c'est précisément le langage des ponts qui se révélera commode pour résoudre un problème qui se sera d'abord posé en termes d'éventails de segments.

1.3 – Nous définirons, pour commencer, deux opérations, que nous appellerons toutes deux des *semi-dérivations*, qui feront correspondre l'une à tout pont un éventail, l'autre à tout éventail un pont, et qui ne seront ni l'une ni l'autre susceptibles d'une opération inverse univoque.

Considérons un pont OP de portée  $p$ , de culées extrêmes O (0, 0) et P ( $p$ ,  $p$ ). En dehors du cas où ce pont se réduirait à une arcade unique, il existe un ensemble non-vide de piles. Si ces piles sont au nombre de  $k$ , la  $i$ -ième d'entre elles ayant pour coordonnées  $(a_i, b_i)$ , on a évidemment les inégalités

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_k$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots < b_k$$

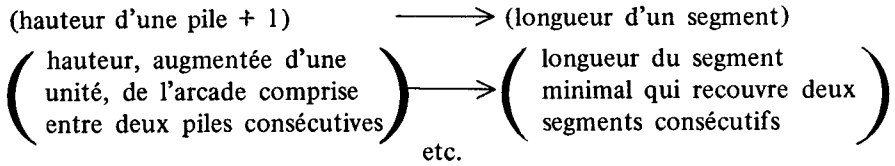
et  $a_i \leq b_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

L'ensemble des  $k$  segments  $[a_i, b_i]$  est donc bien un éventail ; c'est lui que nous nommerons par définition l'éventail semi-dérivé de OP.

Dans le cas particulier, que nous avons provisoirement exclu, où le pont OP se compose d'une seule arcade (ou, si l'on veut, est défini par le mot particulier  $c^p d^p$ ), nous dirons qu'il lui correspond par semi-dérivation l'éventail vide.

Notons que cette semi-dérivation fait correspondre les uns aux autres certains paramètres descriptifs. Ainsi, par exemple :

$$\begin{array}{l} \text{(nombre de piles)} \longrightarrow \text{(nombre de segments)} \\ \left( \begin{array}{l} \text{nombre de culées} \\ \text{intermédiaires} \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{l} \text{nombre de segments} \\ \text{ponctuels} \end{array} \right) \end{array}$$



Remarquons que si l'éventail semi-dérivé d'un pont donné se compose de  $k$  segments, on a  $a_1 \geq 1$  et  $b_k \leq p - 1$ . Si le pont OP est de portée  $p$ , son éventail semi-dérivé est un éventail de segments de  $[1, p - 1]$ .

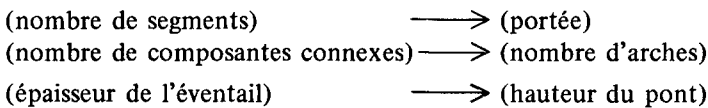
Remarquons enfin que le pont qui est transformé, par semi-dérivation, en un éventail donné E n'est pas déterminé, même si l'on impose, comme nous le ferons toujours, son point de départ 0. Si E se compose de segments de  $[1, n]$ , il faudrait, pour déterminer le pont "semi-primitif", se donner en outre son point d'arrivée P, ou, ce qui revient au même, sa portée  $p$ ; celle-ci peut être n'importe quel entier  $\geq n + 1$ .

Considérons maintenant un éventail E de  $k$  segments de  $[1, n]$ , et définissons de la manière suivante un pont OP que nous appellerons le *pont semi-dérivé de E*.

Si  $[a_i, b_i]$  est le  $i$ -ième segment de E dans l'ordre naturel de ces segments ( $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ), considérons la *somme cartésienne* S des extrémités de ces segments; cette somme cartésienne se compose toujours de  $2k$  éléments, même si l'on a parfois  $a_i = b_i$  (segment ponctuel) ou  $a_i = b_i$ . Enumérons alors les éléments de S dans l'ordre croissant, étant entendu que si une extrémité gauche et une extrémité droite ont la même valeur numérique on donne toujours la *priorité à (l'extrémité) gauche*, que ce soit celle du même segment ou celle d'un autre segment.

On peut, lors de cette énumération, noter  $c$  toute rencontre d'une extrémité gauche et  $d$  toute rencontre d'une extrémité droite. On obtient ainsi un mot utilisant  $k$  fois chacune des deux lettres  $c$  et  $d$ ; de plus, en raison de  $a_i \leq b_i$  et de la règle de priorité à gauche, la  $i$ -ième occurrence de  $c$  précède toujours la  $i$ -ième occurrence de  $d$ . C'est le *pont* OP défini par ce *mot* que nous appellerons par définition le *pont semi-dérivé de E*.

Si E est l'éventail vide, nous lui ferons correspondre par semi-dérivation le "pont vide" OO. En ce qui concerne les paramètres descriptifs, cette nouvelle semi-dérivation fournit notamment les correspondances suivantes :



Notons que l'opération inverse de cette seconde semi-dérivation n'est pas plus déterminée que celle de la première (l'est même moins, pourrait-on dire). Cependant, si l'on se donne un pont  $OP$ , tous les éventails qui fournissent ce pont par semi-dérivation sont "ordinalement isomorphes" : cette affirmation résume le fait que l'ordre "croissant avec priorité à gauche" sur la somme cartésienne des extrémités fournit toujours le même *mot* en  $c$  et  $d$ . Deux éventails ordinalement isomorphes ont non seulement même nombre de segments, même nombre de composantes connexes et même épaisseur, mais aussi, évidemment, même *ouverture* (nombre maximal de segments deux à deux *non* sécants, paramètre auquel ne correspond par semi-dérivation rien de spécialement simple).

## 2. NOMBRES DE CATALAN ; LOI ( $\alpha$ )

2.1 – Le résultat le plus classique relatif aux ponts concerne le nombre total de ponts de portée donnée  $p$  (cf. [3], par exemple).

Une des manières possibles de l'établir repose sur la remarque de base que le nombre des ponts de portée  $p$  est égal au nombre des ponts à une seule arche de portée  $p + 1$  : on s'en rend compte immédiatement en considérant un pont quelconque joignant  $O(0, 0)$  à  $P(p, p)$  comme partie d'un pont à une seule arche joignant  $O'(0, -1)$  à  $P'(p + 1, p)$  (fig. 5).

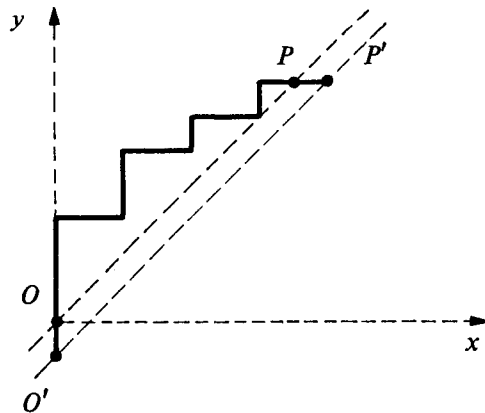


Fig. 5



On peut alors appeler  $u_p^k$ , pour tout entier positif  $k$ , le nombre de ponts de portée  $p$  ayant  $k$  arches ;  $u_p^k = 0$  si  $p = 0, 1, \dots, k - 1$ . On conviendra bien entendu que  $u_0^0 = 1$  et que  $u_p^0 = 0$  pour  $p > 0$ .

Il est clair que

$$u_p^k = \sum_h u_h^{k-1} u_{p-h}^1,$$

l'indice de sommation  $h$  pouvant varier théoriquement de 0 à  $p$  (mais seules donnent des termes non nuls les valeurs de  $h$  qui appartiennent à  $[k - 1, p - 1]$ ). Cela suffit à établir que, si l'on introduit la fonction génératrice

$$u^k(t) = \sum_{p=k}^{+\infty} u_p^k(t),$$

on a  $u^k(t) = u^{k-1}(t)u^1(t)$  et par conséquent

$$u^k(t) = [u^1(t)]^k \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

Mais si l'on appelle  $u(t)$  la fonction génératrice du nombre total  $u_p$  de ponts de portée  $p$ , on a

$$u(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + u_p t^p + \dots,$$

et la remarque de base se traduit par

$$u^1(t) = t u(t). \quad (2)$$

D'autre part on a

$$u(t) = 1 + u^1(t) + \dots + u^k(t) + \dots = \frac{1}{1 - u^1(t)} = \frac{1}{1 - t u(t)}.$$

Il en résulte que la fonction  $u(t)$  satisfait à l'équation

$$t [u(t)]^2 - u(t) + 1 = 0, \quad (3)$$

ce qui permet de conclure qu'elle est définie, pour  $|t| < 1/4$ , par le développement de Mac-Laurin de

$$u(t) = \frac{1 - (1 - 4t)^{1/2}}{2t}.$$

A partir de là, il suffit d'utiliser le résultat classique relatif au développement de  $(1 + z)^m$  pour  $m$  non entier (ici =  $1/2$ ) pour conclure que

$$u_p = \frac{(2p)!}{p! (p + 1)!}. \quad (4)$$

Ces nombres  $u_p$ , appelés parfois *nombres de Catalan*, ont les valeurs ci-après pour  $p \in [0,11]$  :

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$u_p =$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

L'approximation de Stirling permet, par ailleurs, de dire que  $u_p$  croît de manière équivalente à  $4^p / \sqrt{p\pi}$ .

Mais les équations (2) et (3) entraînent que :

$$[u^1(t)]^2 = u^1(t) - t ;$$

en multipliant les deux membres par  $[u^1(t)]^{k-2}$  et en tenant compte de (1), on voit que

$$u^k(t) = u^{k-1}(t) - tu^{k-2}(t) ,$$

d'où

$$u_p^k = u_p^{k-1} - u_{p-1}^{k-2} \quad (5)$$

Cette relation de double récurrence en  $p$  et  $k$  a deux conséquences :

1/ Elle permet de former les colonnes successives du tableau suivant, dont chaque case est ainsi la somme de sa "voisine sud" et de sa "voisine nord-ouest" :

$u_p^k$	(portée)										
	$p = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(arches)											
$k = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
2			1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
3				1	3	9	28	90	297	1001	3432
4					1	4	14	48	165	572	2002
5						1	5	20	75	275	1001
6							1	6	27	110	429
7								1	7	35	154
8									1	8	44
9										1	9
10											1
	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bien entendu la formation de chaque colonne commence par le 1 de la diagonale, qui correspond au fait qu'il n'y a qu'un pont de portée  $p$  ayant  $p$  arches, à savoir le pont défini par  $cdcdcd \dots cd = (cd)^p$  ; cette formation n'exige donc pas la connaissance a priori des nombres de Catalan, qu'elle permet au contraire de retrouver, soit en haut des colonnes successives soit (avec décalage) en sommes des colonnes successives.

2/ La relation (5) permet de justifier une expression condensée de  $u_p^k$ , à savoir

$$u_p^k = C_{2p-k-1}^{p-k} - C_{2p-k-1}^{p-k-1} \tag{6}$$

ou

$$u_p^k = \frac{k(2p-k-1)!}{p!(p-k)!} \tag{7}$$

Telle est la loi que nous appelons de type  $(\alpha)$  : c'est celle qui répartit les  $u_p$  ponts de portée  $p$  suivant le nombre  $k$  de leurs arches.

Par semi-dérivation, on voit immédiatement que la même loi  $(\alpha)$  répartit les éventails de segments de  $[1, p-1]$  ou  $[1, n]$  suivant le nombre  $k-1$  de leurs segments ponctuels.

2.2 – Une autre disposition possible des nombres du tableau des  $u_p^k$  est celle figurée ci-dessous :

9	1	9	44	154	429	1 001	2 002	3 432	4 862	4 862
8	1	8	35	110	275	572	1 001	1 430	1 430	
7	1	7	27	75	165	297	429			
6	1	6	20	48	90	132	132			
5	1	5	14	28	42	42				
4	1	4	9	14	14					
3	1	3	5	5						
2	1	2	2							
1	1	1								
y = 0	1									
	x = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Chacun des nombres est alors somme de son voisin ouest et de son voisin sud. Avec cette disposition il suffit d'imaginer ces nombres affectés aux points  $(x, y)$  de  $Z^2$  qui définissent leurs emplacements, pour voir que chacun d'eux compte précisément les chemins par lesquels on peut atteindre son emplacement à partir de  $(0, 0)$  sans jamais passer au-dessous de la diagonale  $y = x$ .

Ce nombre est, par suite de l'expression (6) et de la nouvelle disposition adoptée, égal à

$$\alpha(x, y) = C_{x+y}^x - C_{x+y}^{x-1}$$

Ce résultat peut du reste s'obtenir par un procédé classique consistant à considérer deux sortes de chemins parmi les  $C_{x+y}^x$  chemins qui joignent  $O(0, 0)$  à  $(x, y)$  : les  $\alpha(x, y)$  qui ne passent en aucun point situé strictement au sud-est de  $y = x$ , et ceux qui ont au moins un point sur la droite  $y = x - 1$ , notamment un point d'abscisse maximale  $M$  (fig. 6). Mais à chacun de ces derniers on peut, par une symétrie de sa partie  $OM$  par rapport à la droite  $y = x - 1$ , faire correspondre un chemin joignant  $O'(1, -1)$  à  $(x, y)$ .

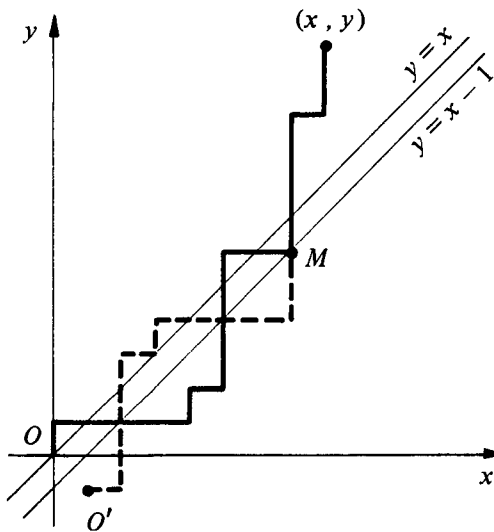


Fig. 6

En tout cas il est facile de déduire de là le nombre de ponts de portée  $p$  pour lesquels la *dernière pile* a une abscisse égale à  $x$  ( $1 \leq x \leq p - 1$ ) : c'est tout simplement le nombre  $\alpha(x, p - 1)$ . On voit ainsi que la loi ( $\alpha$ ) est également celle suivant laquelle les ponts de portée donnée sont distribués suivant l'abscisse de leur dernière pile (abscisse que l'on prend égale à 0 par convention pour le pont trivial  $c^p d^p$ ).

Par semi-dérivation, on voit que la même loi ( $\alpha$ ) donne la distribution des éventails de segments de  $[1, n]$  suivant l'extrémité gauche du dernier segment.

2.3 – Enfin montrons, en raisonnant cette fois directement sur les éventails de segments de  $[1, n]$ , que c'est encore la même loi ( $\alpha$ ) qui donne leur répartition suivant la *longueur totale couverte*.

Considérons, en effet, les éventails de segments de  $[1, n]$  qui couvrent  $h$  points et appelons provisoirement  $\alpha'(h, n)$  le nombre de ces éventails. Il y a deux sortes de tels éventails :

1/ ceux pour lesquels le point  $n$  n'est pas couvert, et qui sont donc des éventails de segments de  $[1, n - 1]$  couvrant  $h$  points (il y a  $\alpha'(h, n - 1)$  tels éventails)

2/ les éventails pour lesquels  $n$  est l'un des  $h$  points couverts, éventails qui forment un ensemble  $A$ .

Or cet ensemble  $A$  peut être mis facilement en bijection avec l'ensemble  $B$  de tous les éventails de  $[1, n]$  qui couvrent  $h - 1$  points, et cela de la façon suivante :

– partant d'un éventail de  $A$ , en considérer les segments dans l'ordre inverse de l'ordre naturel, c'est-à-dire en commençant par le plus à droite, et supprimer les extrémités gauches des segments successifs (ce qui diminue leurs longueurs d'une unité) jusqu'à ce que l'une de ces suppressions ait pour effet de diminuer d'une unité le nombre de points couverts, qui devient ainsi égal à  $h - 1$ ;

– partant d'un éventail de  $B$ , considérer le point non couvert le plus à droite ; si c'est  $n$ , adjoindre comme dernier segment le segment ponctuel  $[n, n]$  ; dans tout autre cas, joindre le point en question au segment qui commence immédiatement à sa droite, et prolonger de même d'un point vers la gauche tous les segments qui sont après lui dans l'ordre naturel.

On voit ainsi que  $A$  a même cardinal que  $B$ , c'est-à-dire  $\alpha'(n, h - 1)$ . Finalement donc :

$$\alpha'(h, n) = \alpha'(h, n - 1) + \alpha'(h - 1, n)$$

Les  $\alpha'(h, n)$  satisfont ainsi à la même double récurrence que les  $\alpha(x, y)$  ; il ne reste qu'à s'assurer que les deux récurrences s'amorcent de la même manière, ce qui est bien le cas, pour conclure que c'est encore suivant une loi ( $\alpha$ ) que se répartissent les éventails suivant ce nouveau paramètre.

2.4 – A titre d'exemple, nous donnons ci-après la répartition effective des 14 éventails de segments de [1, 3] suivant les trois paramètres considérés ; par abréviation nous notons chaque éventail entre parenthèses, en donnant les segments dans l'ordre naturel et écrits eux-mêmes sous les formes  $ab$  ou  $a$  au lieu de  $[a, b]$  ou  $[a, a]$ . La loi ( $\alpha$ ) apparaîtra chaque fois en dernière colonne.

		Eventails						Nombre
I. Nombre de segments ponctuels	0	$\emptyset$	(12)	(13)	(23)	(12,23)		5
	1	(1)	(2)	(3)	(1,23)	(12,3)		5
	2	(1,2)	(1,3)	(2,3)				3
	3	(1,2,3)						1
II. Extrémité gauche du dernier segment	3	(3)	(1,3)	(2,3)	(12,3)	(1,2,3)		5
	2	(2)	(23)	(1,2)	(1,23)	(12,23)		5
	1	(1)	(12)	(13)				3
	0	$\emptyset$ (par convention)						1
III. Nombre de points couverts	3	(13)	(1,23)	(12,3)	(12,23)	(1,2,3)		5
	2	(23)	(12)	(1,2)	(1,3)	(2,3)		5
	1	(1)	(2)	(3)				3
	0	$\emptyset$						1

Le tableau récapitulatif ci-après permet de s'assurer que les trois paramètres I, II, III sont fonctionnellement indépendants non seulement deux à deux, mais aussi dans leur ensemble.

	$\emptyset$	(1)	(2)	(3)	(12)	(13)	(23)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,23)	(12,3)	(12,23)	(1,2,3)
I	0	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	0	3
II	0	1	2	3	1	1	2	2	3	3	2	3	2	3
III	0	1	1	1	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3

Enfin il est intéressant de noter que les lois ( $\alpha$ ) ont une loi limite particulièrement simple : en effet si l'on divise par son total  $u_p$  la colonne  $p$  du tableau des  $u_p^k$ , on voit, par suite de (7) et (4), que

$$u_p^k = \frac{k(2p-k-1)!}{p!(p-k)!} \cdot \frac{p!(p+1)!}{(2p)!} = \frac{k(p+1)_{k+1}}{(2p)_{k+1}}$$

(notation de Vandermonde  
 $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$ )

Quand  $p$  augmente indéfiniment, cette fraction, qui est le quotient de deux polynômes en  $p$ , tend vers  $k/2^{k+1}$ , expression qui définit la loi-limite cherchée ; il s'agit d'une "loi binomiale négative".

### 3. SEGMENTS EN NOMBRE IMPOSE ; LOI ( $\beta$ )

3.1 – Examinons maintenant l'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  des éventails de segments de  $[1, n]$  du point de vue du nombre total de segments dont ils se composent. Le cardinal de  $\mathfrak{S}_n$  est égal à  $u_{n+1}$  comme on le voit par semi-dérivation de tous les ponts de portée  $n + 1$ . Nous appellerons  $\beta_n^s$  le nombre d'éventails de  $s$  segments de  $[1, n]$ .

Il est d'abord intéressant d'établir, avant tout calcul, que

$$\beta_n^s = \beta_n^{n-s} . \quad (8)$$

Pour cela, convenons d'associer à toute suite (strictement) croissante  $X$  de points de  $[1, n]$  une autre suite croissante  $\bar{X}$ , que nous dirons complémentaire de  $X$ , et qui aura pour termes tous les points de  $[1, n]$  qui n'appartiennent pas à  $X$ . Il est clair que, pour  $s$  donné, l'ensemble de toutes les suites croissantes de  $s$  termes de  $[1, n]$  est partiellement ordonné par la relation de majoration terme à terme, que nous noterons  $X \leq Y$ . Cela dit nous allons démontrer la proposition suivante, simple mais nullement triviale :

$$X \leq Y \iff \bar{X} \geq \bar{Y} \quad (9)$$

Il suffit bien entendu de montrer l'une des deux implications, p.e. celle qui va de gauche à droite ; nous le ferons par récurrence sur le nombre  $s$  de termes de  $X$  et  $Y$ , et pour tout  $n$ . L'implication est triviale pour  $s = 0$ , puisque  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  coïncident alors tous deux avec la suite  $1, 2, \dots, n$ .

Soient alors deux suites croissantes  $X$  et  $Y$ ,

$$X = (x_1 \dots x_{s-1} x_s) = (X' x_s)$$

$$Y = (y_1 \dots y_{s-1} y_s) = (Y' y_s) .$$

Supposons que  $X \leq Y$ , ce qui veut dire que  $X' \leq Y'$  et  $x_s \leq y_s$ .  $X'$  et  $Y'$  ont des complémentaires  $\bar{X}'$  et  $\bar{Y}'$  qui peuvent s'obtenir à partir de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  par intercalation, à la place convenable, d'un terme  $\xi = x_s$  pour la première et d'un terme  $\eta = y_s$  pour la seconde. Comme on a  $\xi \leq \eta$  il est impossible que le rang  $j$  auquel  $\eta$  apparaît dans  $\bar{Y}'$  soit inférieur au rang  $i$  auquel  $\xi$  apparaît dans  $\bar{X}'$  ; on a donc  $i \leq j$ , d'où l'une ou l'autre des deux dispositions

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= (\dots \xi \dots) \\ \bar{Y}' &= (\dots \eta \dots) \end{aligned} \quad (i = j)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= (\dots \xi \dots \bar{x}'_j \dots) \\ \bar{Y}' &= (\dots \bar{y}'_i \dots \eta \dots) \end{aligned} \quad (i < j)$$

Dans les deux cas on passe de  $\bar{X}'$  à  $\bar{X}$  par suppression de  $\xi$  et de  $\bar{Y}'$  à  $\bar{Y}$  par suppression de  $\eta$ . Dans le premier cas, le fait que  $\bar{X} \geq \bar{Y}$  est une évidence ; dans le second cas ( $i < j$ ), les inégalités terme à terme sont inchangées avant la  $i$ -ième et après la  $j$ -ième, et renforcées en ce qui concerne les autres ; la fig. 7 indique les correspondances entre termes de même rang de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ .

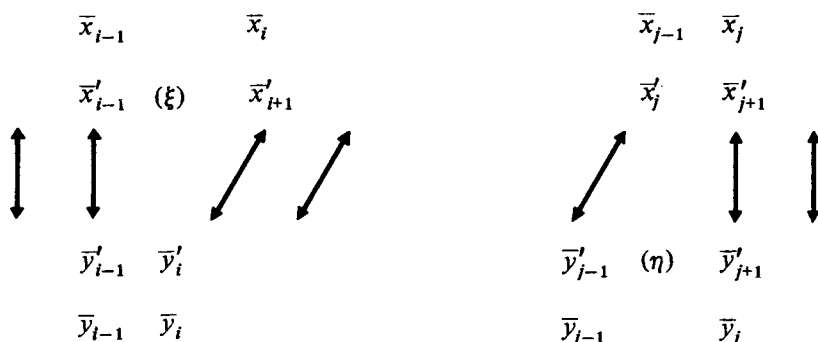


Fig. 7

La proposition (9) est ainsi établie par récurrence dans tous les cas. Elle a notamment pour conséquence que le nombre de manières de choisir deux suites croissantes de points de  $[1, n]$  dont l'une majore l'autre terme à terme est le même si l'on impose aux suites d'avoir  $s$  termes ou si on leur impose d'avoir  $n - s$  termes ; d'où finalement l'égalité (8) annoncée, puisque chacun de ces choix revient précisément au choix d'un éventail de  $s$  segments de  $[1, n]$ , défini par la suite des extrémités gauches et la suite des extrémités droites de ses segments.



3.2 – Pour effectuer le calcul proprement dit de  $\beta_n^s$ , qui en particulier confirmera l'égalité (8), il peut être commode de se servir d'un théorème général sur les suites de Young (suites non-croissantes d'entiers non-négatifs) ; cf. [7]. Aux termes de ce théorème, si  $Z$  et  $Z'$  sont deux telles suites composées d'un même nombre  $h$  de termes, et que  $Z' \leq Z$  au sens de la majoration terme à terme, le nombre de manières dont on peut *intercaler* entre  $Z'$  et  $Z$   $s$  nouvelles suites de Young  $Z_1, \dots, Z_s$  respectant les conditions

$$Z' \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_s \leq Z$$

est donné par un déterminant  $D_s(Z, Z')$ , d'ordre  $h$ , et dont l'élément général (ligne  $i$ , colonne  $j$ ) est le nombre binomial  $C_{z_i - z'_j + s}^{i - j + s}$  ;  $z_i$  et  $z'_j$  désignent respectivement le  $i$ -ième terme de  $Z$  et le  $j$ -ième terme de  $Z'$ .

Nous suivons, ici et également plus loin, la convention proposée dans [7] de considérer comme distinctes, lorsque  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ , les deux fonctions de deux arguments habituellement notées  $C_u^v$  ou  $\binom{u}{v}$ , fonctions qui sont confondues seulement pour  $(u, v) \in \mathbf{N}^2$  ; nous posons

$$\binom{u}{v} = \begin{cases} (u)_v / v! & \text{si } v \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{si } v \in \mathbf{Z} - \mathbf{N} \end{cases}$$

$$C_u^v = \binom{u}{u - v}.$$

Or les conditions

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_s \leq n$$

$$1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_s \leq n$$

peuvent prendre la forme équivalente

$$0 \leq x_1 - 1 \leq x_2 - 2 \leq \dots \leq x_s - s \leq n - s$$

$$0 \leq y_1 - 1 \leq y_2 - 2 \leq \dots \leq y_s - s \leq n - s.$$

Le problème est ainsi ramené à l'intercalation de  $s$  suites de Young de 2 termes,  $Z_i = (y_i - i, x_i - i)$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , entre la suite  $Z' = (0, 0)$  et la suite  $Z = (n - s, n - s)$ . En vertu du théorème cité, cela est possible d'un nombre de manières égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} C_n^s & C_n^{s-1} \\ C_n^{s+1} & C_n^s \end{vmatrix},$$

lequel, après calcul et simplifications, prend l'une ou l'autre des formes ci-après :

$$\beta_n^s = \frac{1}{s+1} C_n^s C_{n+1}^s = \frac{n!(n+1)!}{s!(s+1)!(n-s)!(n-s+1)!}.$$

La seconde de ces formes confirme, comme on s'y attendait, l'égalité  $\beta_n^s = \beta_n^{n-s}$ . Ces nombres  $\beta_n^s$  ont été fréquemment rencontrés ; cf. notamment [9], [10], [11].

Ce sont eux qui définissent ce que nous appelons ici les lois ( $\beta$ ). En voici une table, de disposition triangulaire :

$\beta_n^s$	$s = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma = u_{n+1}$
$n = 0$	1										1
1	1	1									2
2	1	3	1								5
3	1	6	6	1							14
4	1	10	20	10	1						42
5	1	15	50	50	15	1					132
6	1	21	105	175	105	21	1				429
7	1	28	196	490	490	196	28	1			1430
8	1	36	336	1176	1764	1176	336	36	1		4862
9	1	45	540	2520	5292	5292	2520	540	45	1	16796

3.3 — Remarquons maintenant que les mêmes nombres, convenablement décalés, permettent de compter non seulement tous les éventails de  $s$  segments de  $[1, n]$ , mais tous ceux de ces éventails qui sont *connexes* et qui *couvrent* la totalité de  $[1, n]$ .

En effet soit  $\dots [a_i, b_i] \dots$  un tel éventail, avec  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Le fait que  $[1, n]$  soit entièrement couvert signifie que  $a_1 = 1$  et  $b_s = n$ . Quant à la connexité, elle signifie que chaque segment coupe le suivant, donc que  $a_{i+1} \leq b_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ .

Il en résulte que la suite :

$$[a_2, b_1], [a_3, b_2], \dots, [a_s, b_{s-1}]$$

forme un éventail de  $s-1$  segments de  $[2, n-1]$ .

Inversement tout éventail de  $s-1$  segments de  $[2, n-1]$ , soit

$$[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_{s-1}, y_{s-1}],$$

peut être obtenu ainsi de manière unique : il suffit de prendre  $a_1 = 1, b_s = n, a_i = x_{i-1}, b_i = y_i$ .

Or le nombre total d'éventails de  $s - 1$  segments de  $[2, n - 1]$  est le même que si les segments étaient pris sur  $[1, n - 2]$  ; ce nombre est donc  $\beta_{n-2}$  ce qui justifie et précise notre remarque. Ainsi par exemple il y a 1176 éventails de 3 segments de  $[1, 8]$ , mais 105 seulement de ces éventails sont connexes et couvrent  $[1, 8]$ .

Bien entendu la propriété correspondante peut se sommer par rapport à  $s$  : on voit ainsi que si l'on impose à un éventail de segments de  $[1, n]$  les conditions de connexité et de couverture, sans imposer le nombre de segments, le nombre total de tels éventails n'est plus  $u_{n+1}$  mais  $u_{n-1}$ .

3.4 – Nous laissons au soin du lecteur l'étude, au demeurant fort simple, de la loi limite de  $(\beta)$ , en indiquant seulement la propriété suivante des "moments factoriels" :

$$\frac{1}{u_{n+1}} \sum_{s=0}^n (s)_k \beta_n^s = \frac{(n)_k (n+1)_k}{(2n+2)_k}.$$

Cette propriété peut s'établir à partir des expressions monômes de  $u_{n+1}$  et  $\beta_n^s$  : elle se ramène aisément à une convolution de nombres binomiaux. A partir de là on voit rapidement que la variable aléatoire  $S_n$  qui prend la valeur  $s$  avec la probabilité  $\beta_n^s/u_{n+1}$ , et dont la moyenne est  $n/2$ , a pour variance  $\sigma^2 = \frac{n(n+2)}{4(2n+1)}$ , et l'on démontre que lorsque  $n$  augmente indéfiniment la loi de  $\frac{s_n - n/2}{\sigma}$  tend vers la loi de Laplace-Gauss.

3.5 – Les nombres  $\beta_n^s$  peuvent évidemment de bien des manières s'analyser en nombres plus petits : il suffit de cumuler la condition du nombre de segments avec une ou plusieurs autres conditions. Il ne saurait être question de faire cela "de toutes les façons possibles", un tel projet ne pouvant avoir aucun sens précis. Il est toutefois intéressant d'évoquer à propos des nombres  $\beta_n^s$  une classe de problèmes qui ont été résolus pour les ponts.

Il est clair que  $\beta_n^s$  dénombre les ponts de portée  $n + 1$  qui ont  $s$  piles, c'est-à-dire  $s + 1$  arcades ; en d'autres termes les ponts de portée  $p$  et de  $h$  arcades sont au nombre de  $\beta_{p-1}^{h-1}$ . Chacun de ces ponts, si on l'imagine tracé dans le plan des  $xy$ , est le graphe d'une fonction croissante définie pour  $0 \leq x \leq p$ , nulle pour  $x = 0$  et égale à  $p$  pour  $x = p$ , et qui pour  $x = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  a des discontinuités ou sauts (éventuellement nuls) dont la somme est égale à  $p$ . Nous dirons qu'un pont est "de type Z" si ceux de ces sauts qui sont non nuls forment, lorsqu'on les réordonne en une suite non-croissante, une suite de Young Z. Ainsi le pont OP de la fig. 8 est de type 4311.

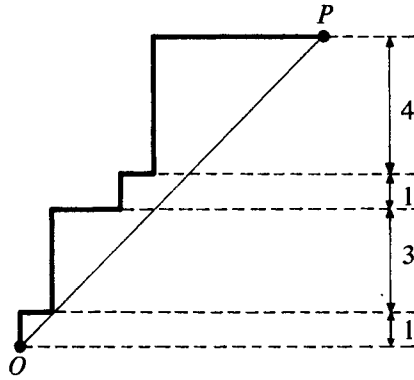


Fig. 8

Le résultat auquel nous faisons allusion est le suivant (cf. [8]) : si  $Z$  est une suite de Young ayant  $t_k$  termes égaux à  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), avec

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots = h$$

$$t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots = p,$$

le nombre de ponts de type  $Z$  est égal à

$$\pi(Z) = \frac{(p)_{h-1}}{t_1! t_2! t_3! \dots}$$

Or le fait, pour un pont, d'avoir  $h$  arcades implique qu'il y ait  $h$  sauts non nuls, c'est-à-dire que le type  $Z$  décompose l'entier  $p$  en  $h$  "parts" positives non-croissantes. Le nombre  $\beta_{p-1}^{h-1}$  apparaît ainsi comme la somme  $\pi(Z)$  correspondant à toutes ces décompositions.

Exemple :  $p = 9, h = 4$

$Z$	$\pi(Z)$
6111	84
5211	252
4311	252
4221	252
3321	252
3222	84
	<hr/>
	1 176 = $\beta_8^3$

Nous verrons plus loin les mêmes nombres  $\beta_n^s$  apparaître à nouveau comme sommes de nombres relatifs à des suites de Young, mais d'une manière tout à fait différente et à beaucoup d'égards plus intéressante.

#### 4. DERIVATION ; LOI ( $\gamma$ )

4.1 – Pour faire apparaître les lois que nous appelons ( $\gamma$ ), plusieurs voies d'approche sont praticables. Nous commencerons ici par celle qui utilise la notion de *dérivation*, qui résultera de la composition de *deux semi-dérivations* successives, telles qu'elles ont été définies au § 1.3.

Ainsi le dérivé d'un pont sera un pont, le dérivé d'un éventail sera un éventail.

La dérivation des ponts en diminue la portée au moins d'une unité, et par conséquent au bout d'un nombre fini de dérivations successives effectuées à partir d'un pont initial, on trouvera le pont vide. On peut ainsi à tout pont de portée  $p = p_0$  attacher la suite décroissante des portées de ses dérivés successifs

$$(p =) p_0 p_1 p_2 \dots p_g (= 0) \quad (10)$$

Le nombre  $g$  de dérivations nécessaires pour annuler la portée sera un paramètre descriptif important du pont initial ; nous l'appellerons le *degré*, dénomination naturelle puisqu'il diminue d'une unité par dérivation (comme le *degré* des polynômes).

Nous nous intéresserons d'abord aux ponts de portée donnée ayant un pont dérivé donné, et établirons le théorème ci-après.

**THEOREME :**

Si l'on se donne un pont  $Q$  de portée  $q$ , dont le pont dérivé  $R$  a une portée  $r$ , le nombre de ponts de portée  $p$  ayant  $Q$  pour dérivé (et par conséquent aussi  $R$  pour dérivé second) est le nombre binomial  $\binom{p+r}{2q}$ .

Nous raisonnerons sur les mots écrits avec des alphabets  $(c, d)$  ou  $(c', d')$  qui définissent les ponts en question.

Le mot qui définit  $Q$  a  $2q$  lettres. Dire que le pont  $R$  dérivé de  $Q$  est de portée  $r$ , c'est dire que l'éventail semi-dérivé de  $Q$  a  $r$  segments, ou encore que  $Q$  a  $r$  piles. Si le mot  $M$  qui définit  $Q$  est écrit avec l'alphabet  $(c', d')$ , ce mot  $M$  présente donc  $r$  occurrences de  $d'c'$  ( $d'$  suivi de  $c'$ ), et par conséquent  $r + 1$  occurrences de  $c'd'$ .

Se donner ce mot, c'est, on l'a vu au § 1.3, définir à un *isomorphisme ordinal* près un éventail de segments. Chercher les ponts de portée  $p$  qui ont  $Q$  pour dérivé, ou les éventails de segments de  $[1, p - 1]$  qui ont  $Q$  pour semi-dérivé, c'est donc placer sur  $[1, p - 1]$  un éventail de segments ordinalement isomorphe à celui qui définit le mot  $M$  donné, mot dans lequel  $c'$  signifie "extrémité gauche" et  $d'$  signifie "extrémité droite".

Il faut finalement définir sur  $[1, p - 1]$  une suite non-décroissante de  $2q$  termes correspondant aux  $2q$  lettres du mot  $M$ , suite dont on pourra appeler les termes  $a_i$  et  $b_j$ , étant entendu que  $a_i$  correspondra à la  $i$ -ième occurrence de  $c'$  dans  $M$  et  $b_j$  à la  $j$ -ième occurrence de  $d'$  dans  $M$ .

Pour que  $[a_i b_j]$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ , définisse bien un éventail de segments, il faudra satisfaire à  $2q - 1$  inégalités dont certaines seront *strictes* et d'autres *larges* : en fait non seulement toutes les inégalités entre  $a_i$  et  $a_{i+1}$  et entre  $b_j$  et  $b_{j+1}$  devront être strictes, mais aussi toutes les inégalités entre un  $b_j$  et un  $a_i$  qui le suit immédiatement (en raison de la règle de priorité à gauche). Seules les inégalités entre un  $a_i$  et un  $b_j$  qui le suit immédiatement seront entendues au sens large ; or ces inégalités correspondent aux occurrences de  $c'd'$  dans  $M$ , et on a vu que celles-ci sont au nombre de  $r + 1$ .

Le problème se ramène donc à définir sur un segment  $S$  de longueur  $p - 1$  une suite "croissante" de  $2q$  termes, étant entendu que sur les  $2q - 1$  inégalités définissant la croissance,  $r + 1$  exactement sont entendues au sens large (et par conséquent  $2q - r - 2$  au sens strict). Or on ne change pas le nombre de possibilités en rendant stricte une inégalité large, à condition de pouvoir augmenter d'une unité son membre droit ainsi que tous les nombres qui le suivront, ce qui exige d'allonger d'une unité le segment  $S$ . En faisant cela  $r + 1$  fois, puisqu'il y a  $r + 1$  inégalités larges dans notre problème, on porte la longueur du segment de  $p - 1$  à  $p + r$ , et il suffit de compter les suites strictement croissantes de  $2q$  termes de ce segment, qui sont justement au nombre de  $\binom{p+r}{2q}$ . Le théorème est ainsi démontré.

4.2. — Ce théorème a comme conséquence immédiate que  $p + r \geq 2q$ , faute de quoi il n'existe aucun pont répondant à la question ; ou encore

$$p - q \geq q - r.$$

De deux diminutions de portée successives par dérivation, la seconde est au plus égale à la première. Donc, en reprenant la notation de (10), la suite des  $g$  entiers positifs.

$$p_0 - p_1 \quad p_1 - p_2 \cdots p_{g-1} - p_g$$

est une suite de Young, et la suite (10) elle-même est une suite décroissante et convexe.

On peut ainsi à tout pont attacher une suite de Young que nous appellerons sa *suite caractéristique*, et qui le décrit d'une manière beaucoup plus détaillée qu'un simple paramètre numérique. La suite caractéristique d'un pont a un nombre de termes égal à son degré  $g$ , et la somme de ces termes est égale à la portée  $p$  ; en outre le premier terme caractérise le nombre de piles puisqu'il est la différence entre la portée et ce nombre.

Le théorème établi permet maintenant de répondre à la question suivante : combien existe-t-il de ponts ayant une suite de Young caractéristique donnée  $Z$  ou, ce qui revient au même, tels que sa portée et les portées de ses dérivés successifs forment une suite (décroissante et convexe) donnée  $p_0 p_1 \dots p_g$  ?

La réponse est que ce nombre est le produit des  $g - 1$  nombres binomiaux

$$\varphi(Z) = \binom{p_0 + p_2}{2p_1} \binom{p_1 + p_3}{2p_2} \dots \binom{p_{g-2} + p_g}{2p_{g-1}}$$

On l'établit de manière quasi immédiate par récurrence sur  $g$ , après avoir observé que les seuls ponts de degré 1 sont les ponts du type  $c^p d^p$ , donc qu'il n'y en a qu'un pour une portée donnée.

L'intérêt de la fonction  $\varphi(Z)$  est qu'elle se prête à un calcul très rapide pour n'importe quelle suite de Young  $Z$ . Le tableau ci-dessous la donne pour toutes les suites de Young pour lesquelles la somme des termes est  $p \leq 5$  ; chaque case donne  $Z$  en haut et  $\varphi(Z)$  en bas.

			1						$p = 1$
			2		11				$p = 2$
		3		21		111			$p = 3$
	4		31	22	211		1111		$p = 4$
5		41	32	311	221	2111		11111	$p = 5$
		1	10	5	15	3	7	1	

Ce tableau permet la remarque suivante, bien entendu tout à fait générale : si à chaque niveau  $p$  on fait la somme des  $\varphi(Z)$  pour tous les  $Z$  ayant un *premier terme donné*, on retrouve une loi ( $\beta$ ) : en effet se donner le

niveau  $p$  c'est imposer une portée  $p$ , et se donner ensuite le premier terme  $p - p_1$  de  $Z$  c'est imposer un nombre  $p_1$  de piles.

Mais une autre possibilité naturelle de sommation des  $\varphi(Z)$  est de faire décrire à  $Z$  l'ensemble des suites de Young (de niveau toujours donné) qui ont un nombre de termes non nuls donné  $g$  : on obtient ainsi le nombre de ponts de portée donnée  $p$  et de degré donné  $g$ . C'est ce nombre que nous désignerons par  $\gamma_p^g$  et qui définit ce que nous appelons ici les lois  $(\gamma)$ . Le tableau des  $\gamma_p^g$ , qu'il sera commode de compléter par les conventions  $\gamma_0^0 = 1$  et  $\gamma_p^0 = 0$  pour  $p \geq 1$ , commence ainsi par :

$\gamma_p^g$	$g = 0$	1	2	3	4	5	$\Sigma = u_p$
$p = 0$	1						1
1	0	1					1
2	0	1	1				2
3	0	1	3	1			5
4	0	1	7	5	1		14
5	0	1	15	18	7	1	42

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de ces nombres. Pour l'instant nous allons interpréter la notion de degré d'un pont en termes d'éventails.

4.3 — Nous avons fait remarquer qu'en faisant deux semi-dérivations successives à partir d'un éventail  $E$ , on obtenait un nouvel éventail  $E'$ , qui demeure d'ailleurs inchangé si  $E$  décrit une classe d'isomorphisme ordinal. La figure 9 permet de visualiser simultanément les deux éventails  $E$  et  $E'$ . Les abscisses, qui représentent les extrémités des segments de  $E$ , n'ont d'importance que par leur ordre d'apparition ; quant aux ordonnées, elles représentent les points des segments de  $E'$ , à condition toutefois de numérotter non les droites horizontales qui portent les segments de  $E$ , mais les bandes délimitées par ces droites.

Chacun des segments de  $E'$  est alors représenté par un rectangle dont le sommet sud-ouest est extrémité droite d'un segment de  $E$ , dont le sommet nord-est est extrémité gauche d'un segment de  $E$ , et qui ne contient aucune extrémité de segment à son intérieur.

Une telle figure permet notamment la remarque suivante : si l'on fait abstraction de tous les segments de  $E$  qui commencent avant que le premier d'entre eux se termine, c'est-à-dire de tout ce qui est au-dessous de la ligne pointillée la plus basse de la figure 9, ce qui reste est un éventail  $E_1$ , et le



dérivé  $E'_1$  de  $E_1$  est représenté par tous les rectangles qui se trouvent au-dessus de cette même ligne pointillée.

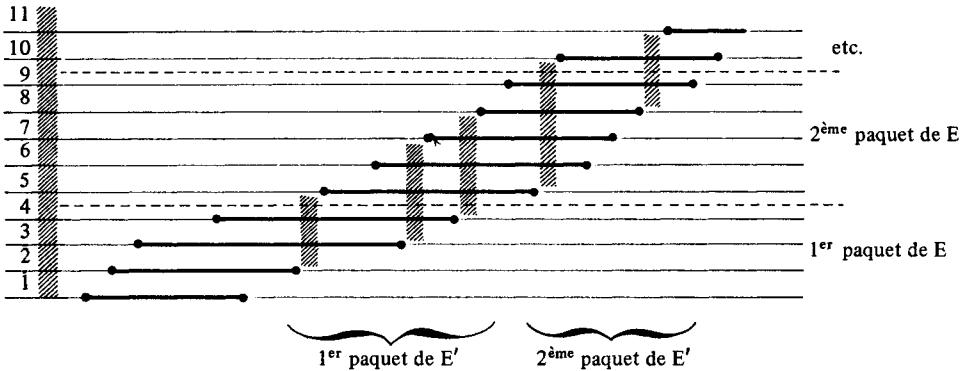


Fig. 9

Il est naturel d'appeler "premier paquet" de  $E$  l'ensemble des segments de  $E$  dont l'extrémité gauche ne dépasse pas l'extrémité droite du premier d'entre eux, "deuxième paquet" de  $E$  le premier paquet de  $E_1$ , et ainsi de suite. La figure 9 permet alors de comprendre pourquoi, à chaque paquet  $H$  de segments de  $E$  *sauf au dernier* correspond exactement un paquet  $H'$  de segments de  $E'$  :  $H'$  est formé de tous les rectangles rencontrant effectivement la ligne pointillée qui sépare le paquet  $H$  du paquet suivant.

Ainsi donc, dans le passage de  $E$  à  $E'$  par dérivation, le "nombre de paquets" diminue d'une unité. Mais le *degré* aussi diminue d'une unité (en appelant degré, comme pour les ponts, le nombre de dérivations nécessaires pour arriver à l'éventail vide). La différence "degré moins nombre de paquets" est constante, et cette constante est nulle comme on le voit par le cas des éventails de degré 1, dont toute extrémité droite majore toute extrémité gauche. Le degré d'un éventail n'est donc rien d'autre que le nombre de paquets lui-même.

Ce "nombre de paquets" de  $E$  peut d'ailleurs se définir de deux autres manières : c'est le nombre maximum de segments de  $E$  deux à deux disjoints, que nous avons appelé *ouverture* de l'éventail, et c'est aussi le nombre minimum de points d'un ensemble "transversal" de  $E$ , c'est-à-dire ayant une intersection non vide avec tous les segments de  $E$ .

(L'égalité de ce maximum et de ce minimum fait d'ailleurs l'objet d'un théorème général sur les segments, dit "théorème de Gallai" et cité dans [5] ; ce théorème porte en réalité non sur les éventails mais sur les familles quelconques de segments, mais il est clair que ni l'un ni l'autre nombre ne sont changés si l'on supprime de la famille tout segment qui en inclut un autre).

## 5. REDUCTION ; DEPLOIEMENTS ARBORESCENTS

5.1 – Outre l'ouverture d'un éventail, nous avons défini également son *épaisseur*, qui est le nombre maximum de segments deux à deux *non-disjoints* (c'est-à-dire sécants). Nous allons maintenant démontrer que ce deuxième paramètre, qui n'est nullement fonction du premier, fait néanmoins apparaître la même loi ( $\gamma$ ).

Il sera à nouveau commode de raisonner sur les ponts plutôt que sur les éventails. Nous avons vu, en effet, que l'épaisseur d'un éventail est égale à la hauteur de son pont semi-dérivé. Nous allons donc procéder au dénombrement des ponts de portée donnée  $p$  et de hauteur donnée  $h$ .

Introduisons pour cela un nouveau type d'opération, qui aura quelques analogies avec la dérivation, et que nous appellerons *réduction*.

Si un pont donné  $P$  (non vide) se compose d'une seule arche, nous appellerons son *pont réduit* le pont  $Q$  obtenu par suppression du premier  $c$  et du dernier  $d$  ; en d'autres termes, si  $P$  joint le point  $(0, 0)$  au point  $(p, p)$ ,  $Q$  est la partie de  $P$  qui joint  $(0, 1)$  à  $(p - 1, p)$ . Si  $P$  a plusieurs arches, on définira son *pont réduit* par la règle suivante :

- 1/ réduire toutes les arches de hauteur maximale
- 2/ ne rien changer aux autres arches
- 3/ mettre bout à bout, sans en changer l'ordre, toutes les arches ainsi traitées.

Il est évident que dans les réductions successives d'un pont, la hauteur du pont diminuera chaque fois d'une unité.

Si une arche  $i$  de hauteur maximale (par exemple égale à  $h$ ) ne comprend aucune *pile* de hauteur 1, cette arche donnera, par réduction une nouvelle arche  $j$  de hauteur maximale (égale à  $h - 1$ ). Si par contre il y a dans l'arche  $i$ , de hauteur maximale  $h$ , au moins une pile de hauteur 1, la réduction la remplacera par une pile de hauteur 0 c'est-à-dire par une culée, et par conséquent la réduction transformera l'arche  $i$  en plusieurs arches successives ;

toutefois il est clair que l'une au moins de ces arches sera de hauteur  $h - 1$ , c'est-à-dire sera à son tour, dans le pont réduit, une arche de hauteur maximale.

On peut donc dire que si, à partir d'un pont  $P_h$  de hauteur  $h$ , on considère les ponts réduits successifs jusqu'à la hauteur 1 incluse,

$$P_h P_{h-1} \dots P_2 P_1,$$

les nombres d'arches qui pour chacun de ces ponts seront de hauteur maximale formeront une suite non-décroissante

$$r_h \leq r_{h-1} \leq \dots \leq r_2 \leq r_1.$$

Considérons n'importe laquelle de ces  $r = r_1 + \dots + r_h$  arches, arche que nous appellerons  $i$ . Ou bien  $i$  figurait déjà, telle quelle, dans le pont initial  $P_h$ , ou bien il existe une arche  $j$  qui, lors d'une certaine réduction, a engendré une arche restée, par la suite, identique à  $i$ ; si c'est le cas nous appellerons  $j$  l'arche antécédente (directe) de  $i$ , et  $i$  une arche conséquente (directe) de  $j$ .

On peut alors, pour compter les ponts de hauteur  $h$  donnée, élaborer une petite théorie "ad hoc" qui fera l'objet du § 5.2. Cette théorie utilise les diagrammes de Ferrers, qui ne sont que l'une des manières classiques de représenter les suites de Young, et définit sur de tels diagrammes un type particulier de structure arborescente.

5.2 – On se donne un "diagramme de Ferrers" dont les  $h$  lignes successives comportent  $r_1, r_2, \dots, r_h$  points, et l'on définit sur l'ensemble  $F$  de ses  $r$  sommets ( $r = r_1 + r_2 + \dots + r_h$ ) une relation "antécédent-conséquent" satisfaisant aux conditions suivantes :

1/ Tout point  $a$  au plus un antécédent (direct) et l'antécédent d'un point  $i$  appartient, s'il existe, à une ligne située *au-dessous* de  $i$ ; il en résulte notamment que les points de la dernière ligne n'ont pas d'antécédents et que ceux de la première ligne n'ont pas de conséquents.

2/ L'ensemble  $C_1(i)$  des conséquents (directs) d'un point  $i$  contient nécessairement au moins un point de la ligne située *immédiatement au-dessus* de  $i$ ; cela signifie notamment que seuls les points  $i$  de la première ligne ont leur  $C_1(i)$  vide.

3/ En appelant  $C(i)$  l'ensemble de tous les conséquents *directs ou indirects* de  $i$ , c'est-à-dire la réunion de  $C_1(i), C_2(i), \dots$ , où  $C_\lambda(i)$  se définit à partir de  $C_{\lambda-1}(i)$  comme réunion de tous les  $C_1(j)$  quand  $j$  décrit  $C_{\lambda-1}(i)$ , la trace de  $C(i)$  sur toute ligne située au-dessus de  $i$  est un *segment* (ensemble de points consécutifs de la ligne, éventuellement réduit à un point).

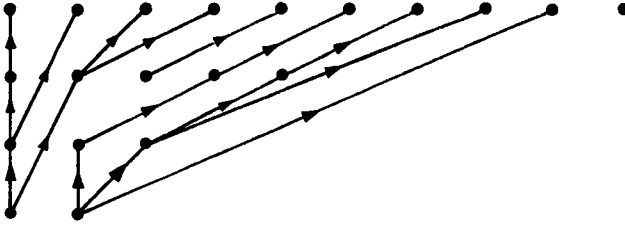


Fig. 10

La figure 10, qui correspond à un diagramme de Ferrers avec  $r_1 = 10$ ,  $r_2 = 5$ ,  $r_3 = 3$ ,  $r_4 = 2$ , illustre les différentes circonstances qui peuvent se présenter ; elle montre en particulier des points sans antécédents (non seulement les deux de la dernière ligne, mais un point au bout de la première et un au milieu de la seconde), et quelques points ayant leur antécédent (direct) unique dans une ligne autre que celle située immédiatement au-dessous.

Nous appellerons une telle relation un *déploiement arborescent* puisque par suite de la condition (1/) il ne peut pas y avoir de cycles. Le graphe de la relation est une réunion d'arbres avec "racines", celles-ci étant les points sans antécédents ; pour que le graphe soit connexe, c'est-à-dire soit un arbre, il est nécessaire (mais pas suffisant) que la dernière ligne du diagramme de Ferrers se réduise à un point unique.

Si à partir d'un diagramme de Ferrers  $H$  de  $h$  lignes on ne considère que les  $k$  dernières lignes, celles-ci constituent un sous-diagramme de Ferrers  $K$ . Bien entendu, si l'on a défini sur  $H$  un déploiement arborescent, celui-ci possède une *restriction à  $K$* , que l'on définit tout naturellement en ne conservant comme conséquents (directs) d'un point  $i$  de  $K$  que ceux de l'intersection de  $C_1(i)$  avec  $K$ .

Soit alors  $H$  un diagramme de Ferrers de  $h$  lignes, et soient respectivement  $H'$  et  $H''$  les deux diagrammes de Ferrers que l'on obtient à partir de  $H$  en faisant abstraction de la première ou des deux premières lignes. Appelons respectivement  $r$ ,  $s$  et  $t$  les nombres totaux de points de  $H$ ,  $H'$  et  $H''$  ; on a  $r + t \geq 2s$ , puisque les  $r - s$  points de la première ligne sont au moins aussi nombreux que les  $s - t$  de la seconde. On a alors un théorème de forme analogue à celui du § 4.1..

## THEOREME :

Etant donné sur  $H'$  un déploiement arborescent quelconque  $\alpha$ , le nombre de déploiements arborescents distincts définissables sur  $H$  et dont la restriction à  $H'$  soit  $\alpha$  est égal à  $\binom{r+t}{2s}$ .

Représentons sur la figure 11 le diagramme de Ferrers  $H'$  et le déploiement  $\alpha$ . Pour tout point  $i$  de  $H'$ , nous savons d'après la condition (3/) que l'ensemble  $C(i)$  de tous les conséquents directs ou indirects de  $i$  devra avoir pour trace sur la première ligne (non représentée) de  $H$  un *segment*, que nous appellerons  $\sigma(i)$ . Si deux points distincts  $i$  et  $j$  sont tels que l'un d'eux, par exemple  $i$ , soit antécédent direct ou indirect de  $j$ , on doit évidemment avoir  $\sigma(i) \supset \sigma(j)$ . Dans tout autre cas, les deux segments  $\sigma(i)$  et  $\sigma(j)$  sont disjoints ; en effet s'ils avaient un point commun la suite des antécédents de ce point (bien définie en vertu de la condition (1/)) contiendrait à la fois  $i$  et  $j$ , dont l'un serait ainsi antécédent direct ou indirect de l'autre.

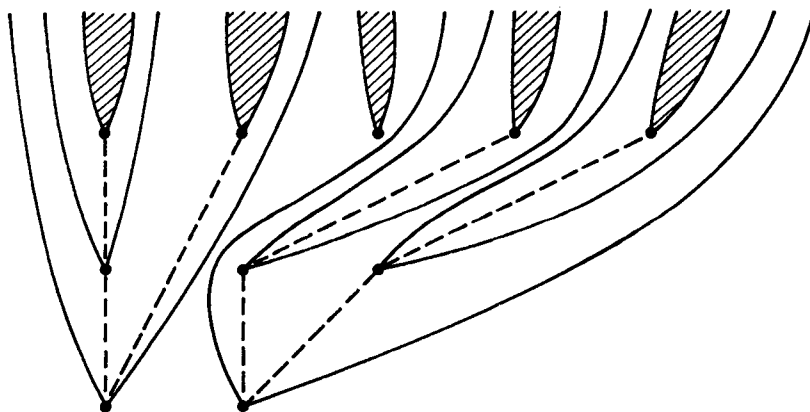


Fig. 11

On peut en outre remarquer que  $\sigma(i)$  est entièrement à gauche de  $\sigma(j)$  si et seulement si  $i$  et  $j$  appartiennent à des branches de  $\alpha$  dont la première est située plus à gauche que la seconde ; la signification de ce langage ne soulève aucune difficulté.

Cela dit, on peut comme l'indique la fig. 11 associer à chacun des  $s$  points  $i$  de  $H'$  un "pinceau" dirigé vers le haut, les pinceaux en question ayant les uns par rapport aux autres les mêmes propriétés d'inclusion ou

de disposition que les segments  $\sigma(i)$  correspondants ; sur la fig. 11 on a en outre hachuré les pinceaux issus des  $s - t$  points de la première ligne de  $H'$  (un tel pinceau ne peut en effet inclure aucun autre pinceau). Sur la droite où s'aligneront les  $r - s$  points de la première ligne de  $H$ , les  $s$  pinceaux délimitent  $2s + 1$  intervalles disjoints dont  $s - t$  hachurés.

Il reviendra bien entendu au même, du point de vue du dénombrement, soit de déplacer ces  $2s + 1$  intervalles (en les déformant éventuellement, mais sans changer leurs positions relatives) par rapport aux  $r - s$  points de la première ligne de  $H$ , supposés figurés à l'avance, soit de fixer les intervalles et d'y placer les  $r - s$  points ; du fait de la condition (2/) il faudra que chacun des  $s - t$  intervalles hachurés comprenne au moins un point.

Le problème se trouve donc ramené à celui-ci : dans  $2s + 1$  intervalles juxtaposés, répartir  $r - s$  points, sachant que dans chacun de  $s - t$  intervalles particuliers il doit y avoir au moins un point. Ce problème se réduit à répartir, sans autre condition,  $r - s - (s - t)$  ou  $r + t - 2s$  points dans les  $2s + 1$  intervalles, ou en d'autres termes à définir une suite de  $\omega = 2s + 1$  entiers non-négatifs de somme  $\nu = r + t - 2s$ . Le nombre de manières dont cela est possible est le nombre binomial  $\binom{\nu + \omega - 1}{\omega - 1} = \binom{r + t}{2s}$ , ce qui achève de démontrer le théorème.

A partir de là, il devient facile de calculer le nombre total de déploiements arborescents constructibles sur un diagramme de Ferrers donné  $F$ . Il suffira de rebaptiser ( $r =$ )  $p_0, p_1, \dots, p_{h-1}, p_h (= 0)$  les nombres de sommets qui restent si l'on enlève les  $0, 1, \dots, h - 1, h$  premières lignes, et le nombre total cherché sera le produit

$$\binom{p_0 + p_2}{2p_1} \binom{p_1 + p_3}{2p_2} \dots \binom{p_{h-2} + p_h}{2p_{h-1}} ;$$

ceci n'est autre que la fonction  $\varphi(Z)$  déjà rencontrée, attachée à la suite de Young  $Z$  dont  $F$  constitue la représentation.

5.3 — Si l'on revient au problème de la hauteur des ponts, il faut maintenant remarquer que la réduction diminue la portée d'autant d'unités qu'il y a d'arches de hauteur maximale ; la portée est ainsi diminuée de  $r_h$  à la première réduction, de  $r_{h-1}$  à la seconde, etc., enfin de  $r_1$  à la dernière réduction (qui fait passer du pont  $(cd)^{r_1}$  au pont vide) ; la portée initiale est donc  $r_h + \dots + r_1 = r = p_0$ .

Finalement le nombre de ponts de portée  $r$  et de hauteur  $h$  est égal à la somme de tous les  $\varphi(Z)$  lorsque la suite de Young  $Z$  a  $h$  termes non nuls de somme  $r$ .

C'est précisément ce que nous avons appelé  $\gamma_r^h$ . Il y a, parmi les ponts de portée  $r$ , exactement autant de ponts de hauteur  $h$  que de ponts de degré  $h$ .

On obtient à partir de là deux résultats intéressants concernant les éventails de segments, en considérant d'une part les éventails qui redonnent ces ponts par semi-dérivation, d'autre part les éventails (dérivés des premiers) qui résultent de ces ponts par semi-dérivation. Ces résultats sont présentés numériquement, pour  $r = 4$ , par la figure 12 et le tableau ci-après.

La figure 12 donne les  $u_r = 14$  configurations ordinales que peut présenter un éventail de  $r = 4$  segments, et donne pour chacune d'elles l'ouverture et l'épaisseur ; elle illustre le fait que ces deux paramètres, tout en n'étant pas liés fonctionnellement (comme on le voit notamment par les deux cas où ils sont tous deux égaux à 2), sont bien distribués suivant la même loi ( $\gamma$ ).

Enfin, le tableau ci-après, analogue dans son principe à celui du § 2.4., donne la répartition des 14 éventails de segments de  $[1, 3]$  d'une part par ouvertures, d'autre part par *longueurs du plus long segment* : à nouveau ce tableau fait apparaître deux fois la même loi ( $\gamma$ ) :

		éventails							nombre
ouverture	0	$\emptyset$							1
	1	(1)	(2)	(3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)	7
	2	(1,2)	(1,3)		(2,3)	(1,2,3)		(1,2,3)	5
	3	(1,2,3)							1
longueur du plus long segment	0	$\emptyset$							1
	1	(1)	(2)	(3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)	7
	2	(1,2)	(2,3)		(1,2,3)	(1,2,3)		(1,2,3)	5
	3	(1,3)							1

## 6. PROPRIETES DES NOMBRES $\gamma_r^h$

6.1 – Les nombres  $\gamma_r^h$ , définis d'abord comme sommes de nombres  $\varphi(Z)$ , ont plusieurs propriétés intéressantes, qui permettent notamment de les rattacher au problème suivant : parmi les chemins joignant, dans  $\mathbf{Z}^2$ , le point  $(0, 0)$  au point  $(r + h, r)$  en  $r + h$  étapes ouest-est et  $h$  étapes sud-nord, quel est le nombre  $\delta_r^h$  de ceux qui n'ont aucun point strictement extérieur à la "bande diagonale" définie par les droites  $y = x$  et  $y = x - h$  ?



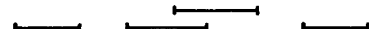



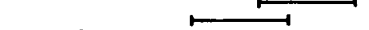
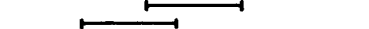




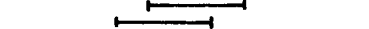
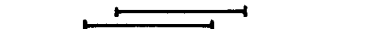
	ouvertures	épaisseurs
	4	1
	3	2
	3	2
	3	2
	2	2
	3	2
	3	2
	2	2
	2	3
	2	3
	2	3
	2	3
	2	3
	1	4

Fig. 12



On a évidemment  $\delta_r^1 = 1$  quel que soit  $r$ , puisqu'il n'y a alors qu'un chemin à étapes alternativement ouest-est et sud-nord. (Il est d'autre part naturel d'écrire que pour  $r \geq 1$ ,  $\delta_r^0 = 0$  et de convenir que  $\delta_0^0 = 1$ ). On a aussi  $\delta_0^h = 1$  pour tout  $h \geq 1$ .

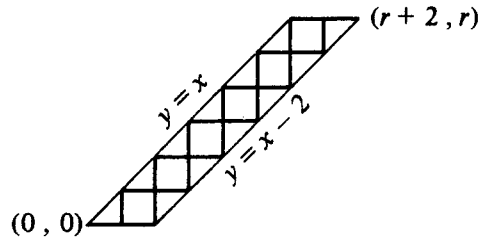


Fig. 13

Pour  $h = 2$ , il est également très simple de voir directement que  $\delta_r^2 = 2^r$  : en effet le chemin doit "contourner"  $r$  carrés unitaires (fig. 13) dont chacun, indépendamment des autres, peut être contourné par la droite ou par la gauche.

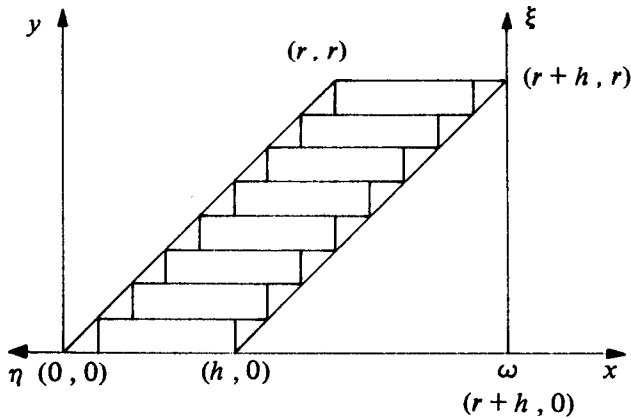


Fig. 14

Dans le cas général, il est commode de considérer chacun des chemins comme représentant une fonction en escalier non-croissante dans un système d'axes  $(\omega\xi, \omega\eta)$  défini comme suit (fig. 14) : on prend pour origine  $\omega$

le point  $(r + h, 0)$  et l'on oriente  $\omega\xi$  vers le haut et  $\omega\eta$  vers la gauche. La fonction  $\eta(\xi)$  est définie dans les  $r$  intervalles unitaires compris entre 0 et  $r$  ; elle est majorée par la fonction qui, dans ces mêmes intervalles, a pour valeurs respectives

$$r + h - 1, r + h - 2, \dots, h \quad (11)$$

et minorée par celle dont les valeurs respectives sont

$$r, r - 1, \dots, 1. \quad (12)$$

Le problème consiste donc à compter les suites de Young majorées par (11) et minorées par (12), ce qui peut se faire en utilisant à nouveau le théorème général déjà mentionné au § 3.2, avec la même convention relative à  $C_u^v$  : le nombre  $\delta_r^h$  de ces suites est  $D_1(Z, Z')$ , déterminant d'ordre  $r$  dont l'élément général (ligne  $i$ , colonne  $j$ ) est le nombre binomial

$$C_{z_i - z_j + 1}^{i - j + 1}.$$

$z_i$  et  $z_j'$  sont ici respectivement le  $i$ -ième terme de (11) et le  $j$ -ième de (12) ; l'élément général est donc égal à

$$C_{h - (i - j)}^{i - j + 1},$$

ce qui signifie que ces éléments sont constants sur chaque "parallèle"  $i - j = \text{constante}$ . En particulier la dernière ligne se termine par

$$\dots C_{h-2}^3 \quad C_{h-1}^2 \quad C_h^1$$

Il est facile de voir que si dans ce déterminant on supprime la dernière ligne et la colonne  $j$ , le mineur obtenu est égal à un déterminant formé des mêmes "parallèles" que le déterminant primitif, mais plus courtes, l'ordre n'étant plus que  $j - 1$  au lieu de  $r$  ; on en conclut, en développant suivant la dernière ligne (lue de droite à gauche), que

$$\delta_r^h = C_h^1 \delta_{r-1}^h - C_{h-1}^2 \delta_{r-2}^h + C_{h-2}^3 \delta_{r-3}^h - \dots, \quad (13)$$

ce qui fournit une récurrence permettant de calculer de proche en proche les nombres  $\delta_r^h$  à partir de  $\delta_0^h = 1$  ; un tableau est donné plus loin. Il résulte

d'ailleurs de (13) que la fonction génératrice  $\sum_{r=0}^{+\infty} \delta_r^h t^r$  est égale à :

$$(1 - C_h^1 t + C_{h-1}^2 t^2 - C_{h-2}^3 t^3 + \dots)^{-1} = [F_{h+1}(t)]^{-1}$$

6.2 — Le polynôme  $F_{h+1}(t)$  a pour coefficients les nombres binomiaux (avec alternance de signe), lus par exemple en diagonale ascendante dans le triangle de Pascal à partir de  $C_{h+1}^0$ .

On a ainsi :

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 & F_1 &= 1 & F_2 &= 1 - t & F_3 &= 1 - 2t \\ F_4 &= 1 - 3t + t^2 & F_5 &= 1 - 4t + 3t^2 \end{aligned}$$

et par récurrence

$$F_{h+1}(t) = F_h(t) - tF_{h-1}(t). \quad (14)$$

Comme ces polynômes prennent, pour  $t = -1$ , des valeurs égales aux nombres de Fibonacci, il est commode de les nommer *polynômes de Fibonacci*.

Les polynômes de Fibonacci ne manquent pas de propriétés intéressantes par elles-mêmes et relativement faciles à établir. Nous ne retiendrons ici que la suivante qui nous sera utile :

$$F_h F_{h+k} - F_{h-1} F_{h+k+1} = t^h F_k. \quad (15)$$

On la démontre par exemple par récurrence sur  $h$ , en établissant que l'on a

$$F_h F_{h+k} - F_{h-1} F_{h+k+1} = t(F_{h-1} F_{h+k-1} - F_{h-2} F_{h+k}),$$

égalité qui peut aussi s'écrire

$$F_{h+k}(F_h + tF_{h-2}) = F_{h-1}(F_{h+k+1} + tF_{h+k-1});$$

mais cela, compte tenu de (14), n'est qu'une manière d'écrire

$$F_{h+k} F_{h-1} = F_{h-1} F_{h+k}.$$

Comme, pour  $h = 1$ , la formule (15) est une conséquence immédiate de (14), cette formule (15) est donc établie dans tous les cas.

La parenté entre les nombres  $\delta_r^h$  est les nombres  $\gamma_r^h$  de la loi ( $\gamma$ ) peut être précisée à partir de la remarque suivante. Sur chacun des  $\gamma_r^h$  ponts OP de portée  $r$  et de hauteur  $h$  ( $\leq r$ ), il existe un point M qui est le *dernier point de hauteur h* de ce pont, et qui est donc suivi d'un point N de hauteur  $h - 1$ . Si l'on impose le point M par son abscisse  $s$ , on voit (fig. 15) que le nombre de possibilités est  $\delta_s^h$  pour la partie OM du pont OP et  $\delta_{r-h-s}^{h-1}$  pour la partie NP.

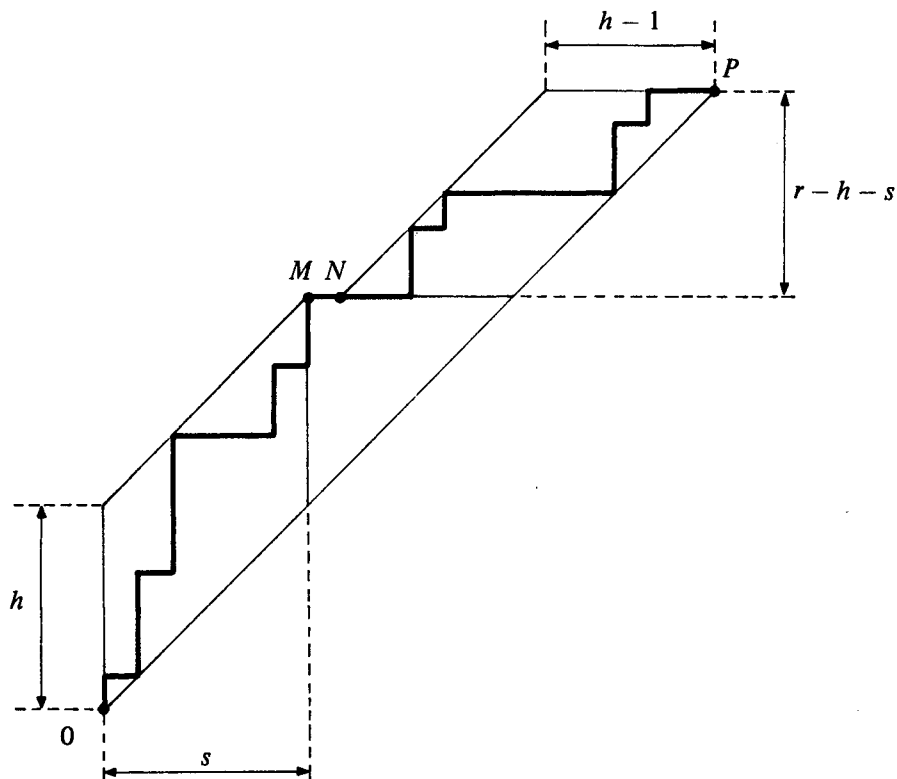


Fig. 15

Le nombre de ponts OP de portée  $r$  et de hauteur  $h$  est ainsi

$$\gamma_r^h = \sum_{s=0}^{r-h} \delta_s^h \delta_{r-h-s}^{h-1}.$$

Il en résulte que le terme en  $t^r$  de la fonction génératrice  $\sum_r \gamma_r^h t^r$  est égal au terme en  $r-h$  dans le produit des fonctions génératrices des deux suites  $\delta_r^h$  et  $\delta_r^{h-1}$ . On a ainsi

$$\sum_{r=h}^{+\infty} \gamma_r^h t^r = \frac{t^h}{F_{h+1}(t) F_h(t)} = \frac{F_h(t)}{F_{h+1}(t)} - \frac{F_{h-1}(t)}{F_h(t)};$$

la dernière de ces expressions se justifie à l'aide de la propriété (15), utilisée pour  $k = 0$ .

On voit que, pour  $r$  donné, la somme

$$\sigma_r^h = \gamma_r^1 + \gamma_r^2 + \dots + \gamma_r^h,$$

c'est-à-dire le nombre de ponts de hauteur  $\leq h$ , est égale au coefficient de  $t^r$  dans le quotient des deux polynômes de Fibonacci consécutifs  $F_h/F_{h+1}$ .

Les deux tableaux ci-après donnent numériquement les premières valeurs d'une part des  $\delta_r^h$ , d'autre part des  $\sigma_r^h = \gamma_r^1 + \gamma_r^2 + \dots + \gamma_r^h$ :

$\delta_r^h$	$r = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	f. gén.
$h = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$1/F_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$1/F_2$
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	$1/F_3$
3	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	$1/F_4$
4	1	4	13	40	121	364	1093	3280	9841	$1/F_5$
5	1	5	19	66	221	728	2380	7753	25213	$1/F_6$
6	1	6	26	100	364	1288	4488	15504	53296	$1/F_7$
7	1	7	34	143	560	2108	7752	28101	100947	$1/F_8$
8	1	8	43	196	820	3264	12597	47652	177859	$1/F_9$

$\sigma_r^h$	$r = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	f. gén.
$h = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$F_0/F_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$F_1/F_2$
2	1	1	2	4	8	16	32	64	128	$F_2/F_3$
3	1	1	2	5	13	34	89	233	610	$F_3/F_4$
4	1	1	2	5	14	41	122	365	1094	$F_4/F_5$
5	1	1	2	5	14	42	131	417	1341	$F_5/F_6$
6	1	1	2	5	14	42	132	428	1416	$F_6/F_7$
7	1	1	2	5	14	42	132	429	1429	$F_7/F_8$
8	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	$F_8/F_9$

Les lois ( $\gamma$ ) se retrouvent en colonne si à partir de ce dernier tableau on forme les différences entre lignes consécutives, ou encore si à partir du tableau des  $\delta_r^h$  on forme, en les décalant convenablement, les convolutions entre deux lignes consécutives :

$\gamma_r^h$	$r = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	f. gén.
$h = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1/F_0 F_1$
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$t/F_1 F_2$
2			1	3	7	15	31	63	127	255	511	$t^2/F_2 F_3$
3				1	5	18	57	169	482	1341	3669	$t^3/F_3 F_4$
4					1	7	33	132	484	1684	5661	$t^4/F_4 F_5$
5						1	9	52	247	1053	4199	$t^5/F_5 F_6$
6							1	11	75	410	1975	$t^6/F_6 F_7$
7								1	13	102	629	$t^7/F_7 F_8$
8									1	15	133	$t^8/F_8 F_9$
9										1	17	$t^9/F_9 F_{10}$
10											1	$t^{10}/F_{10} F_{11}$
$\Sigma = u_r$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	

6.3. — Le tableau des  $\delta_r^h$  et celui des  $\gamma_r^h$  sont représentés avec une ligne de séparation ; la partie au sud-ouest de cette ligne correspond pour les  $\delta_r^h$  à  $r \leq h + 1$  et pour les  $\gamma_r^h$  à  $r \leq 2h$ .

En fait, dans ces parties des deux tableaux,  $\delta_r^h$  et  $\gamma_r^h$  ont l'un et l'autre des propriétés qui en facilitent considérablement le calcul, que l'on veuille calculer de proche en proche ou directement. Ces propriétés sont les suivantes :

$$\delta_r^h = \delta_r^{h-1} + \delta_{r-1}^{h+1} \quad (16)$$

$$\delta_r^h = C_{h+2r-2}^r - 2C_{h+2r-2}^{r-2} + C_{h+2r-2}^{r-4} \quad (17)$$

$$\gamma_r^h = \gamma_{r-1}^{h-1} + 2\gamma_{r-1}^h + \gamma_{r-1}^{h+1} \quad (18)$$

$$\gamma_r^h = C_{2r}^{r-h} - 3C_{2r}^{r-h-1} + 3C_{2r}^{r-h-2} - C_{2r}^{r-h-3} \quad (19)$$

Pour établir (16) on peut remarquer que  $\delta_r^h - \delta_r^{h-1} - \delta_{r-1}^{h+1}$  est le coefficient de  $t^r$  dans le développement de

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{h+1}} - \frac{1}{F_h} - \frac{t}{F_{h+2}} &= \frac{F_h F_{h+2} - F_{h+1} F_{h+2} - t F_h F_{h+1}}{F_h F_{h+1} F_{h+2}} \\ &= \frac{F_h F_{h+3} - F_{h+1} F_{h+2}}{F_h F_{h+1} F_{h+2}} = \frac{-t^{h+1}}{F_h F_{h+1} F_{h+2}} \end{aligned}$$

La dernière expression résulte de la formule (15) employée avec  $k = 1$ . Le développement a donc  $t^{h+1}$  en facteur, et le coefficient de  $t^r$  est bien nul pour  $r \leq h$ .

On en déduit aisément que la relation (16) est vérifiée quand les trois couples  $(h, r)$ ,  $(h-1, r)$  et  $(h+1, r-1)$  sont dans la partie indiquée du tableau des  $\gamma_r^h$ . La vérification de (17) n'est plus alors qu'une question de calcul élémentaire sur les binomiaux.

Pour passer de (16) et (17) à (18) et (19), il est commode de se servir de la formule

$$\sigma_r^{2h} = \sigma_r^{h-1} + \delta_{r-h}^{2h}, \quad (20)$$

qui, en termes de fonctions génératrices, signifie que

$$\frac{F_{2h}}{F_{2h+1}} = \frac{F_{h-1}}{F_h} + \frac{t^h}{F_{2h+1}};$$

cette dernière relation, rendue entière, n'est autre que (15), pour  $k = h$ . Or pour  $r \leq 2h$ , l'ensemble des  $\sigma_r^{2h}$  ponts de portée  $r$  et de hauteur  $\leq 2h$  n'est autre que l'ensemble de *tous* les ponts de portée  $r$ , qui sont au nombre de  $u_r$  (nombre de Catalan) ; (20) donne alors

$$\sigma_r^{h-1} = u_r - \delta_{r-h}^{2h}$$

et

$$\sigma_r^h = u_r - \delta_{r-h-1}^{2h+2},$$

d'où par différence

$$\gamma_r^h = \delta_{r-h}^{2h} - \delta_{r-h-1}^{2h+2}.$$

Il suffit alors de transformer le second membre à l'aide de (17) pour établir d'abord (19), puis (18).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE C. – *Contributions de la théorie des graphes à l'étude des relations binaires*. ICC Research Report, Rome (1966).
- [2] ROLAND J. and LEKKERKERKER C. – *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*, Fund. Math. 51 (1962), pp. 45-64.
- [3] DVORETZKY A. and MOTZKIN T. – *A problem of arrangements*, Duke Math. J., 14 (1947), pp. 305-313.
- [4] GILMORE P. and HOFFMAN A.J. – *A characterization of comparability graphs and interval graphs*, Canad. J. Math. 16 (1964), pp. 539-548.
- [5] HAJNAL A. und SURANYI J. – *Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen*, Annales Univ. Sc. Budapest. Roland Eötvös, t. 1 (1958), pp. 113-121.
- [6] HAJOS G. – *Über eine Art von Graphen*, Internat. Math. Nachr., 2 (1957), p. 65.
- [7] KREWERAS G. – *Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers*, Cahiers du B.U.R.O., N° 6, Paris (1965).
- [8] KREWERAS G. – *Dénombrements de chemins minimaux à sauts imposés*, C.R. Ac. Sc., Paris, 263 (1966), pp. 1-3.
- [9] KREWERAS G. – *Traitement simultané du problème de Young et du problème de Simon Newcomb*, Cahiers du B.U.R.O., n° 10, Paris (1967), pp. 23-31.
- [10] NARAYANA T.V. and SATHE Y.S. – *Minimum variance unbiased estimation in coin tossing problems*, Sankhya A, vol. 23, 2 (1961), pp. 183-186.
- [11] RIORDAN J. – *Combinatorial Identities*, Wiley, New-York (1968), p. 17.