J. OLIVOS

Sur les aires des chemins surdiagonaux

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 29 (1978), p. 45-49
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1978__29__45_0>

SUR LES AIRES DES CHEMINS SURDIAGONAUX

J. OLIVOS

I. INTRODUCTION

Dans la présente note nous donnons une démonstration de la conjecture de G. Kreweras sur les aires des chemins surdiagonaux (cf. [2]), formule (B) ci-dessous, en utilisant comme point de départ une nouvelle démonstration de la formule (A) ci-dessous, déjà établie dans l'article cité. Les notations utilisées sont, pour l'essentiel, celles des articles [1] et [2].

II. PROBLEME

Soit P un "pont strict" de portée n et soit $S(P)$ l'aire comprise entre la ligne polygonale P et la diagonale $y = x$ (fig. 1). Il s'agit d'établir que

$$(A): \qquad \Sigma S(P) = 2^{2n-3}$$

$$(B): \qquad \Sigma[S(P)]^2 = u_{n-1} \cdot \frac{n(2n-1)(5n-2)}{12},$$

où u_n est le nombre de Catalan

$$u_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{1}{n+1} \cdot c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad \text{(cf. [1])}$$

III. METHODE DE RESOLUTION

Soit P un pont strict quelconque, et soit $(i, i+1)$, avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ le dernier point de P situé sur l'oblique $y = x + 1$ (fig. 1). Alors la connaissance de P équivaut à celle de deux ponts stricts P_r^{i+1} et P_s^{n-i-1} de portées respectives $i+1$ et $n-i-1$; r est un numéro de 1 à u_i et s un numéro de 1 à u_{n-i-2}.

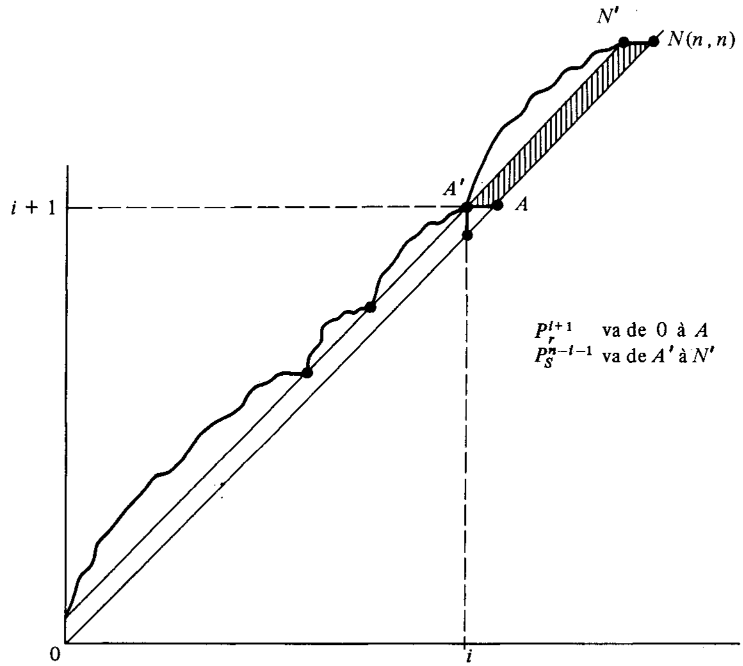

Figure 1

L'aire sous P sera

$$S(P) = S(P_r^{i+1}) + S(P_s^{n-i-1}) + (n-i-1)\,; \tag{1}$$

le dernier terme correspond à l'aire de la région hachurée sur la fig. 1.

IV. DEMONSTRATION DE (A)

La somme sur l'ensemble des ponts stricts P donne :

$$\sum_{P} S(P) = \sum_{i=0}^{n-2} (u_{n-i-2}\, S_{i+1} + u_i S_{n-i-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} u_i u_{n-i-2}\,(n-i-1), \quad (2)$$

où S_j désigne la somme étendue à tous les ponts stricts de portée j. Par un changement de variable approprié, (2) devient

$$S_{n+2} = 2 \sum_{i=0}^{n+1} u_i S_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}\,(n-i+1), (S_0 = 0) \qquad (3)$$

En introduisant les fonctions génératrices, on peut écrire (3) sous la forme

$$S(t) - S_1 t = 2\,t\,u(t)\,S(t) + t^2 c(t)\,u(t), \qquad (4)$$

où l'on a

$$S(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} S_i t^i \quad , \quad S_0 = 0$$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i t^i = \frac{1}{2t}\,[1-(1-4t)^{1/2}] \quad (\text{cf. } [1])$$

$$c(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1)\,u_i t^i = (1-4t)^{-1/2} \qquad (5)$$

En transportant dans (4) les expressions (5), en utilisant le fait évident que $S_1 = 1/2$, et en résolvant par rapport à $S(t)$, on voit que

$$S(t) = \frac{t}{2(1-4t)},$$

d'où il suit immédiatement que

$$S_n = 2^{2n-3} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \;;$$

ce qui achève la démonstration de (A).

V. DEMONSTRATION DE (*B*)

Pour démontrer (*B*), on forme le carré de l'expression (1), puis l'on somme sur tous les ponts P possibles.

On trouve ainsi

$$\sum_P [S(P)]^2 = \sum_{i=0}^{n-2} (u_i H_{n-i-1} + u_{n-i-2} H_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-2} u_i u_{n-i-2} (n-i-1)^2$$

$$+ 2 \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1)(u_{n-i-2} S_{i+1} + u_i S_{n-i-1}) + 2 \sum_{i=0}^{n-2} S_{i+1} S_{n-i-1},$$

où H_j désigne la somme des carrés des aires pour tous les ponts de portée j. En remplaçant dans cette expression n par $n+1$ et en simplifiant les termes, on obtient

$$H_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{n} u_i H_{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} u_i u_{n-i-1} (n-i)^2$$

$$+ 2 \sum_{i=0}^{n} (n+1) u_i S_{n-i} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} S_{i+1} S_{n-i}$$

En utilisant la relation (6) et en se servant de (3) pour calculer la troisième somme, on obtient

$$H_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{n} u_i H_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) u_i u_{n-i-1}$$

$$+ 4(n+1)\, 2^{2n-3} + n . 2^{2n-3}. \quad (7)$$

Enfin si l'on utilise le fait que

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i} = 2^{2(n-1)}$$

et que $H_0 = 0$, la formule (7) prend la forme

$$H_{n+1} = 2 \sum_{i=0}^{n} u_i H_{n-i} + \frac{5n+2}{8}\, 2^{2n} \quad (8)$$

Si l'on appelle $H(t)$ la fonction génératrice de H_n et que l'on pose $l(t) = (1 - 4t)^{-1}$, l'équation (8) donne, après résolution en $H(t)$:

$$H(t) = \frac{t\left[\frac{5}{8}\, t\, l'(t) + \frac{1}{4}\, l(t)\right]}{1 - 2tu(t)},$$

et en explicitant $l(t), l'(t)$ et $u(t)$,

$$H(t) = \frac{5t^2}{2}(1 - 4t)^{-5/2} + \frac{t}{4}(1 - 4t)^{-3/2} \tag{9}$$

Les deux termes du second membre se prêtent à un calcul immédiat des termes généraux de leurs développements de Mac-Laurin. On trouve ainsi comme coefficient global de t^n au second membre de (9) :

$$H_n = \frac{5}{12} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-2)!\,(n-1)!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$$

Après mise en évidence du facteur

$$u_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!},$$

on a bien ainsi

$$H_n = u_{n-1}\,\frac{n(n-1)(5n-2)}{12},$$

ce qui achève de démontrer la formule (B).

BIBLIOGRAPHIE

[1] KREWERAS G. – Sur les éventails de segments, *Cahiers du B.U.R.O.*, n° 15, Paris (1970)

[2] KREWERAS G. – Aires des chemins surdiagonaux et application à un problème économique, *Cahiers du B.U.R.O.*, n° 24, Paris (1976).