CAHIERS DU BURO

N. MAZARS

# Descriptions des systèmes et dépendances stochastiques en théorie de la « fiabilité »

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche*, tome 39-40 (1982), p. 3-99

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1982__39-40__3_0>

# DESCRIPTIONS DES SYSTÈMES

# ET

# DÉPENDANCES STOCHASTIQUES

# EN THÉORIE DE LA "FIABILITÉ"

N. MAZARS
Université Paul Sabatier - Toulouse

# TABLE DES MATIERES


| | Pages |
|---|---|
| INTRODUCTION | 7 |
| CHAPITRE A : DESCRIPTIONS DES SYSTEMES DE "FIABILITE" | 21 |
| I. INTRODUCTION | 21 |
| II. POINTS DE VUE DETERMINISTES | 23 |
| II.1 Fonction de structure et fonction de vie | 23 |
| II.2 Les systêmes cohérents | 26 |
| II.2.1 Définitions | 27 |
| II.2.2 Décompositions modulaires | 31 |
| II.2.2.1 Définitions | 31 |
| II.2.2.2 Caractérisations des modules | 32 |
| III. DESCRIPTION STOCHASTIQUE DES SYSTEMES | 34 |
| III.1 Des lois de probabilité de survie | 34 |
| III.1.1 La fonction de fiabilité | 34 |
| III.1.2 Quelques propriétés stochastiques des systêmes cohérents | 36 |
| III.2 Diverses mesures d'un système de sûreté | 37 |
| III.2.1 La fonction de disponibilité | 38 |
| III.2.2 Compléments descriptifs | 38 |

| | Pages |
|---|---|
| III.3 Quelques types de dépendances positives entre variables aléatoires | 40 |
| III.3.1 Définitions | 40 |
| III.3.2 Critères et propriétés de l'association | 42 |
| III.3.3 Comparaisons | 44 |
| IV. REPRESENTATIONS LOGIQUES DES SYSTEMES | 45 |
| IV.1 Le diagramme de fiabilité | 45 |
| IV.2 L'arbre d'évènements | 45 |
| IV.3 Le graphe des états | 46 |
| CHAPITRE B : QUELQUES DEPENDANCES ENTRE PROCESSUS STOCHASTIQUES | 47 |
| I. INTRODUCTION | 47 |
| II. QUELQUES OPERATIONS MATRICIELLES | 49 |
| II.1 Produit et somme de Kronecker | 49 |
| II.1.1 Notations et définitions | 49 |
| II.1.2 Propriétés du produit de Kronecker | 51 |
| II.1.3 Propriétés de la somme de Kronecker | 53 |
| II.2 Généralisations du produit et de la somme de Kronecker | 54 |
| II.2.1 Préliminaires | 54 |
| II.2.2 Définitions | 56 |
| II.2.3 Quelques propriétés des produits de Kronecker généralisés | 57 |
| II.2.4 Quelques propriétés des sommes de Kronecker généralisées | 59 |
| III. DEPENDANCES D'ORDRE (h,k) ENTRE CHAINES DE MARKOV | 60 |

| | Pages |
|---|---|
| III.1 Chaînes de Markov d'ordre k | 60 |
| III.2 Dépendances d'ordre (h,k) entre chaînes de Markov | 65 |
| III.2.1 Définitions | 65 |
| III.2.2 Une chaîne de Markov vectorielle | 68 |
| III.2.3 Un choix de l'Espace des états $E_Z$ | 69 |
| IV. DEPENDANCES D'ORDRE (h,k) ENTRE PROCESSUS DE MARKOV | 73 |
| IV.1 Préliminaires | 73 |
| IV.2 Dépendances d'ordre (h,k) entre processus de Markov | 77 |
| IV.2.1 Définitions | 77 |
| IV.2.2 Etude du processus stochastique | 79 |
| V. PROCESSUS STOCHASTIQUES ASSOCIES | 83 |
| V.1 Définitions | 84 |
| V.2 Processus de Markov associés | 85 |
| ANNEXE XA | 87 |
| ANNEXE XB | 91 |
| BIBLIOGRAPHIE | 96 |

*<u>Convention de notation</u> :*

*A titre d'exemple, nous désignerons par "Théorème A-II-2-1" le Théorème 1 qui figure au paragraphe II-2 du chapitre A. Toute référence à une définition, une relation, une proposition,... s'effectuera de manière analogue. Si une référence et son objet figurent dans un même chapitre, l'identificateur de celui-ci ne sera pas indiqué.*

# INTRODUCTION

Ces différentes mises au point étant effectuées, de manière détaillée, en introduction de maints traités de fiabilité,

- nous ne commenterons pas la définition officielle du terme "fiabilité" énoncée dans le rapport de la Commission Electrotechnique Internationale [18] [32] ; employé entre guillemets, ce terme doit être désormais interprété selon son sens générique ;

- nous ne mettrons pas en évidence la nécessité des études de "fiabilité" par des motivations techniques, économiques... [18] [31] [32] ;

- nous ne justifierons pas la légitimité de l'emploi des méthodes mathématiques pour résoudre certains problèmes [31] ;

mais, nous tenterons de décrire les grandes lignes directrices de l'évolution actuelle de la théorie de la "fiabilité" telles que nous les avons perçues au fil de nos lectures : quelques articles parmi ceux de plus en plus nombreux éparpillés dans les diverses revues de statistique, de probabilités et de recherche opérationnelle...

Si la diversité des systèmes est réelle, il convient de démasquer la part illusoire de celle-ci puisque due à des distinctions injustifiées ; c'est afin d'éviter de telles duplications irréalistes qu'une classification des systèmes de "fiabilité"[(a)] a été ébauchée à partir des processus physiques auxquels sont soumis leurs divers éléments : environnements, défaillances, remplacements, détections, maintenances, commutations,.... Inspiré de celui, "classique", des files d'attente le plus souvent étudiées, un tel système de classification exige, pour être suffisamment représentatif de la diversité des systèmes, un formalisme très lourd. Le panorama proposé dans cette étude respecte un point de vue probabiliste qui permet de mettre en relief l'une des motivations essentielles de l'évolution actuelle de la théorie de la "fiabilité" : l'élaboration de méthodes dites "analytiques" (souvent opposées, pour leur "plus grande précision", aux méthodes de simulation [32]) de détermination des caractéristiques de "fiabilité" de systèmes de plus en plus divers et "complexes". Un système formé selon une *configuration non "classique"*, *d'un "grand" nombre d'éléments stochastiquement dépendants* et dont l'étude rigoureuse exige non seulement la distinction de *plus de deux niveaux de performance* mais encore la prise en compte de lois de probabilité caractérisées par *un taux de hasard non constant* peut être qualifié d'"inextricable !" car il répond alors aux cinq critères de complexité généralement répertoriés. Conformément au point de vue choisi, c'est à travers la notion de dépendance stochastique que nous nuancerons les diverses publications traitant de fiabilité selon deux courants d'intensités car de difficultés inégales.

---

(a) BENDELL T. "The Classification of Reliability Models" (June 1982). Fifth European Conference on Electronics. Copenhague. North Holland Publishing Company, p.89-95.

Des Etudes Effectuées sous l'Hypothèse de l'Indépendance entre les Variables Aléatoires du Modèle :

MOORE E.F. et SHANNON C.E. ayant mis en évidence la courbe en forme de S[(a)] représentative de la fiabilité d'un réseau de relais identiques exprimée en fonction de celle de ses éléments, c'est pour généraliser un tel résultat que ESARY J.D. et Al. introduisent la notion de système binaire cohérent formé d'éléments identiques [8] puis différents [25]. Les propriétés largement réalistes caractérisant de tels systèmes, les méthodes des coupes et des chemins minimaux théoriquement dépourvues de difficulté, jointes au développement parallèle de l'analyse automatique, à l'aide d'un calculateur, des arbres de fautes [15] [29], peuvent raisonnablement expliquer l'engouement suscité par la notion de cohérence. Ainsi que nous tenterons de le refléter dans la suite de notre exposé, sans perdre de vue les quatre facteurs de complexité encore éventuels sous l'hypothèse de l'indépendance, une telle notion est à l'origine de résultats très divers. Les modèles communément utilisés consistent alors à décrire les caractéristiques d'un système à partir de celles de ses éléments, d'un point de vue déterministe : par la fonction de structure[(b)] ou la fonction de vie[(c)], d'un point de vue stochastique : par la fonction des per-

---

(a) "S Shapedness" (cf. [2] pour une analyse rétrospective) ; c'est-à-dire : courbe représentative d'une fonction f non décroissante sur l'intervalle [0,1] et telle que :

$$(i)\ f(0) = 0 \ .$$
$$(ii)\ f(1) = 1 \ .$$
$$(iii)\ \exists p \in ]0,1[\ :\ f(p) = p \ .$$

(b) permet d'exprimer la variable d'état d'un système en fonction de celles de ses divers éléments [2] [25].

(c) permet d'exprimer la durée de vie d'un système en fonction de celles de ses divers éléments [22].

formances[a] ou la transformation du hasard[b].

Inspirées de la théorie de la commutation ("switching theory"), les caractérisations des modules [6] mettent en évidence une certaine stabilité de la propriété de cohérence ; en effet, toute décomposition modulaire permet de restreindre l'étude des "grands" systèmes binaires cohérents à des systèmes de tailles moindres sans briser l'hypothèse de cohérence et donc, sans accroître, par ailleurs, la complexité des méthodes à utiliser. C'est encore par souci de simplification, que certains auteurs proposent divers facteurs dits "d'importance" [5] [15] [32] permettant de mesurer, selon différents critères, celles des éléments des systèmes binaires cohérents.

Afin de décrire stochastiquement des "vieillissements" aléatoires nuls, positifs ou négatifs, on distingue tout d'abord respectivement trois classes de lois de probabilité de survie[c] : celle des lois exponentielles bien connues caractérisées par un taux de hasard constant,

---

(a) permet d'exprimer la fiabilité ou la disponibilité d'un système en fonction de celles de ses divers éléments [2] [25].

(b) permet d'exprimer la fonction du hasard de la loi de probabilité de survie d'un système en fonction de celles de ses divers éléments [24].

(c) Par définition, lois de probabilité des variables aléatoires à valeurs réelles presque-sûrement positives.

classe-frontière entre celles des lois de type IHR[a] et de type DHR[b]. Cependant, alors que selon la non-décroissance de ses fonctions de vie et de performances, il semble intuitivement raisonnable de prévoir, comme conséquence de l'usure d'un élément quelconque, un raccourcissement de la durée de bon fonctionnement d'un système binaire cohérent, celui formé de deux éléments en parallèle et de type IHR n'a pas une loi de probabilité de survie dans cette même classe. Les deux classes de lois de types IHR et DHR définies en fonction des variations du taux de hasard se révèlant ainsi trop restreintes, c'est à partir de deux notions simples, l'une déterministe : la propriété de cohérence, l'autre stochastique : les lois exponentielles, que BIRNBAUM Z.W., ESARY J.D. et MARSHALL A.W. définissent les deux classes plus larges des lois de probabilité de type IHRA et de type DHRA [7] caractérisées par un taux de hasard moyen croissant et décroissant[c] respectivement et admettant toujours comme classe-frontière : celle des lois exponentielles. Relativement aux diverses classes de lois de probabilité introduites ultérieurement, toujours dans le but de distinguer divers types de variations aléatoires

---

(a) "Increasing Hazard Rate" [1]. Lois de probabilité dont la fonction de survie $\bar{F}$ est telle que : la probabilité de vie résiduelle $[\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)}]$ soit une fonction non croissante de $t \in R^+$, pour tout $s \in R^+$, s fixé ; et donc, en cas d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\bar{R}^+, \mathcal{B}_{R^+})$, caractérisées par un taux de hasard non décroissant.

(b) "Decreasing Hazard Rate" [1]. Intervertir les propriétés de non-croissance et de non-décroissance dans la définition ci-dessus.

(c) ou, plus généralement, par une fonction du hasard H telle que le rapport $[\frac{1}{t} H(t)]$ soit une fonction non-décroissante et non-croissante de $t \in \bar{R}^+$, respectivement.

à l'aide de considérations intuitives simples[a], la classe des lois de type IHRA joue un rôle primordial. Au-delà du cadre de cette étude, un tel effort de classification se prolonge selon les trois axes principaux suivants : statistique inférentielle, modèles de chocs et comparaisons de diverses politiques de maintenance.

Tout système binaire cohérent est logiquement équivalent à une structure série-parallèle (ou inversement, par dualité). Afin d'étudier, de manière simple, des systèmes (binaires) plus généraux, quelques études récentes proposent d'étendre la notion de cohérence à des systèmes multiperformants ("multistate systems" [20]). Un modèle logique, inspiré de celui proposé pour décrire les systèmes binaires cohérents soumis à une "cannibalisation" [35], généralise le modèle dichotomique ; les règles opératoires de l'"algèbre de Post" [18] se substituent à celles de l'algèbre de Boole ; et la logique de tout système multiperformant alors considéré peut être caractérisée par des ensembles de "vecteurs de connection" [20], notion admettant, de manière évidente, celle de vecteur-coupe ou de vecteur-chemin comme cas particuliers. Si la fermeture des classes de lois de probabilité de type IHRA ou de type NBU est alors "élargie à la formation des systèmes multiperformants cohérents" [20],

---

(a) telles qu'-une probabilité de vie résiduelle inférieure (ou : supérieure) à celle absolue :

$\forall (s,t) \in \overline{R}^{+2}$, $P[T > t+s / T > t] \leqslant$ (ou : $\geqslant$) $P[T > s]$ ;

-une espérance de vie résiduelle :

$E[T-t / T > t]$ décroissante ou croissante en fonction de l'"âge" du système, $t \in R^{+}$.

T désigne une variable aléatoire réelle positive. Ces relations définissent les classes de lois de probabilité de type NBU, NWU, DMRL et IMRL [12] [25], respectivement.

il convient de noter que ce résultat correspond toujours à la propriété stochastique de ces classes de lois mise en évidence au cours de l'étude des systèmes binaires cohérents.

Sous l'hypothèse de l'indépendance, les limitations des méthodes de détermination de la "fiabilité" des systèmes cohérents sont de nature essentiellement déterministe : un "grand" nombre d'éléments liés par des relations fonctionnelles "apparemment non-classiques" demeure un facteur de complexité. Tandis que le problème reste largement ouvert pour les systèmes multiperformants cohérents, c'est vers l'analyse des arbres de fautes que semblent s'orienter les méthodes actuelles pour déterminer la structure série-parallèle logiquement équivalente à un système binaire cohérent. Comme pour de nombreux problèmes classés "NP-difficiles" en "théorie de la complexité" [48], des algorithmes de tri [42] efficaces peuvent améliorer les performances de tel ou tel algorithme ; celles-ci restent, cependant, grandement soumises à la configuration de l'arbre considéré [40].

L'extension des résultats obtenus sous l'hypothèse de la cohérence à des systèmes plus généraux (semi-cohérents (en moyenne) [25], par exemple,...) demeure un problème largement ouvert.

Des études qui tiennent compte de certaines dépendances entre des variables aléatoires du modèle :

L'étude de nombreux systèmes exige la prise en compte de dépendances. A titre d'exemple, le terme physique "mode commun de défaillances"[a] qui peut désigner

(a) Le chapitre 8 de l'étude [32] propose une classification de ceux-ci.

un "environnement", un sous-système..., correspond à la présence de dépendances entre certaines variables aléatoires du modèle descriptif d'un système. En négligeant les difficultés structurales ou statistiques éventuelles, on peut prendre en compte les dépendances entre les éléments d'un système par des modélisations stochastiques qui peuvent avoir recours à trois grandes méthodologies présentées selon leur ordre rétrospectif de parution.

Ne plus considérer séparément mais conjointement les lois de probabilité de survie des divers éléments, ainsi pourrions-nous résumer physiquement l'une des démarches. Bien que l'effort de généralisation au cas multidimensionnel des lois de probabilités classiques[a] comme celles exponentielles, Gamma, de Weibull, ... soit également présent dans des domaines probabilistes étrangers à la théorie de la fiabilité, celle-ci marque son empreinte, avec forces modèles de choc à l'appui, sur de nombreuses propositions de lois parmi lesquelles nous retiendrons la loi exponentielle multidimensionnelle, notée MVE en abrégé, et imaginée par MARSHALL A.W. et OLKIN I. [39]. Le passage au multidimensionnel des notions classiques conduit actuellement à diverses généralisations des classes de lois évoquées précédemment. Ces extensions [11] [13] tendent à satisfaire les trois critères légitimes suivants :

---

(a) Lois de probabilités multidimensionnelles rassemblées avec forces références, dans l'ouvrage suivant : JOHNSON N.L. and KOTZ S. "Distributions in Statistics", Volume 4 : "Continuous Multivariate Distributions", (1972). John WILEY. New-York.

- caractérisations des nouvelles classes à partir d'expressions utilisant la fonction de survie conjointe et analogues à celles qui définissent les classes de lois unidimensionnelles correspondantes ;

- préservation des inclusions entre classes ;

- admission des lois de probabilité MVE comme classe-frontière.

S'il est grossièrement illusoire de vouloir dresser une liste de dépendances stochastiques exhaustive relativement aux systèmes réels, il semble par contre raisonnable de graduer celle-ci ; LEHMANN E.L. [38] propose dans une optique statistique, trois types de dépendances bivariées qui sont, selon l'ordre croissant de leur puissance : les dépendances "de quadrant", "de régression" et "du rapport de vraisemblance". Ce dernier type de dépendance a été généralisé depuis en termes de variables aléatoires dont la densité de probabilité conjointe est caractérisée par des applications partielles d'ordre 2 "totalement positives"(a) [2]. La création des classes de lois de probabilité multidimensionnelles évoquées ci-dessus a suscité les définitions de divers autres types de dépendances telles que celles dites "d'extrémité"(b)

(a) Conformément à la notion de "positivité totale" proposée et étudiée, de manière intensive, par KARLIN S. -Cf. "Total Positivity", (1968) STANFORD University Press.

(b) "Right or left tail dependences" [11] [27]. A titre d'exemple, le vecteur aléatoire réel $\underline{X}=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ est d'extrémité gauche décroissante par rapport au vecteur aléatoire réel $\underline{Y}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ si et seulement si : pour tout vecteur $(x_1,\dots,x_m)$ fixé dans $R^m$, $P[\bigcap_{i=1}^{m}[X_i<x_i]/\bigcap_{i=1}^{n}[Y_i<y_i]]$ est une fonction non croissante de $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$.

ou "de coin"[a] droits ou gauches, croissants ou décroissants. La notion de cohérence n'étant guère étrangère à l'introduction de la relation d'"association" [28] entre variables aléatoires réelles[b], les diverses propriétés de celle-ci en font un type de dépendance positive primordial parmi ceux évoqués ci-dessus.

La détermination d'une borne inférieure qui tient compte des dépendances entre les éléments d'un système s'avère souvent moins érronée qu'un "calcul exact" effectué abusivement, par souci de faisabilité, sous l'hypothèse de l'indépendance[c]. La prise en compte de dépendances telles que l'association, a permis de déterminer, de manière simple, divers "encadrements" de la fonction des performances d'un système binaire cohérent [2]. Ces approximations ont été affinées par la mise en jeu de décompositions modulaires [9] [41] puis, généralisées à la disponibilité d'intervalle d'un système binaire cohérent [41].

---

(a) "Right or left corner dependences" [11] [33]. A titre d'exemple, le vecteur aléatoire réel $\underline{X}=(X_1,\dots,X_m)$ est de coin droit croissant si et seulement si : $P[\bigcap_{i=1}^{m} [X_i > x_i] / \bigcap_{i=1}^{m} [X_i > x_i']]$ est une fonction non décroissante de $(x_1',x_2',\dots,x_m') \in R^m$, pour tout vecteur $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ fixé dans $R^m$.

(b) L'inégalité qui définit cette relation de dépendance, a été préalablement obtenue pour des variables aléatoires binaires mutuellement indépendantes au cours de l'étude [25] (cf. théorème 3.1) des systèmes binaires cohérents et a permis, en particulier d'obtenir un "encadrement" de la fonction des performances d'un tel système.

(c) Le chapitre 1 de l'étude [18] évoque quelques modèles qui ont abouti à de telles constatations.

Cerner des types de dépendance qui permettent, à l'aide de transformations simples, de substituer au modèle stochastique initial un modèle exclusivement défini par des variables aléatoires mutuellement indépendantes constitue une des techniques d'extension des nombreux résultats connus qui exigent l'hypothèse d'indépendance. C'est dans cette optique qu'a été discernée, entre les relations d'indépendance mutuelle et d'association, une relation de dépendance positive vérifiée, en particulier, par des variables aléatoires à valeurs réelles positives et dont la loi de probabilité conjointe présente des "minimums exponentiels" [23] ou, plus généralement, "des minimums de hasard proportionnels" à une fonction du hasard donné [37] ; en effet, la fonction de fiabilité d'un système cohérent dont les durées de vie élémentaires admettent une telle loi de probabilité conjointe est celle d'un système d'ordre plus élevé mais également cohérent et dont les éléments peuvent être caractérisés par des durées de vie aléatoires mutuellement indépendantes. Les lois de probabilité multidimensionnelles qui présentent des minimums de hasard proportionnels à la fonction du hasard d'une loi de probabilité de survie de type IHRA ou de type NBU, permettent de faire apparaître une plus grande stabilité des deux classes de lois unidimensionnelles correspondantes et d'illustrer, à l'aide d'exemples, diverses classes qui généralisent ces dernières au cas multidimensionnel, parmi celles évoquées précédemment.

Après celles des phénomènes biologiques, des "files d'attente" [17] [19],..., la modélisation des systèmes à l'aide des chaînes et des processus de Markov ou des processus semi-markoviens constitue une méthode de "fiabilité", désormais classique, qui permet une grande fidélité de description. Cependant, le nombre des états du processus croissant exponentiellement avec celui-ci, un "grand" nombre d'éléments liés par des relations fonctionnelles très diverses et non "classiques" constitue un lourd facteur de complexité de la méthode générale [14] [18].

Afin de tenter d'enrayer cette croissance exponentielle une première possibilité consiste à contracter l'espace des états selon certaines partitions qui conservent la propriété de Markov du processus puisqu'elles vérifient la condition suffisante bien connue [36]. L'algorithme proposé dans l'étude [44] permet une détermination plus efficace de telles partitions en détectant celles-ci directement à partir de la logique du système et des caractéristiques de fiabilité, taux de défaillances et taux de réparations, de ses éléments.

Parmi diverses méthodes d'"approximation" aux domaines d'applications plus ou moins généraux, la "méthode des états de marche critique" [32] propose une expression "approchée" du taux de défaillances du système en évitant le traitement complet du processus de Markov descriptif d'un système cohérent.

Outre celles dites "d'approximation", une technique d'extension bien connue du domaine d'application d'une méthode limitée par des difficultés croissantes de manière non-polynomiale par rapport à la taille des problèmes envisagés consiste à décomposer ceux-ci en divers problèmes (mathématiquement indépendants) de taille moindre et relevant du domaine d'application de la méthode initialement envisagée (ou de "méthodes équivalentes"). La recherche [15] d'une décomposition modulaire d'un système cohérent, évoquée précédemment, constitue une telle technique d'extension du domaine d'application de la "méthode des coupes ou des chemins minimaux". A partir des matrices de taux de transition très structurées présentées dans deux études pratiques[a], cette troisième démarche est envisageable pour étudier l'évolution stochastique de certains systèmes de "fiabilité" : celle-ci est fondée sur l'introduction de quelques relations de dépendance stochastique entre chaînes puis processus de Markov qui conduisent à un processus stochastique (vectoriel) également de Markov. A titre d'exemple, la prise en compte de telles relations de dépendance peut rendre plus aisée l'étude d'un système de fiabilité ou de sûreté dont l'évolution stochastique est soumise à un processus de Markov dépendant de "l'état présent" d'un environnement, lui-même aléatoirement changeant selon un processus de Markov. De plus, ces relations de dépendance DP(h,k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$ , admettent comme cas-limite la notion d'indépendance.

L'étude de ces relations de dépendance DP(h,k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$ , est cependant loin de prétendre à l'exhaustivité. Aussi, si une connaissance approfondie de ces dépendances est irréalisée dans le futur, il pourrait s'avérer profitable de ne pas omettre l'idée initiale de cette démarche : définir des dépendances stochastiques entre deux processus de Markov qui assurent un processus stochastique vectoriel vérifiant également la propriété de Markov et qui permettent d'obtenir, de manière exacte ou "approchée", des résultats descriptifs de ce processus -résultant, sinon à partir des deux processus composants, du moins à l'aide de certains processus qui le composent. Il est bien connu que l'étude

(a) - BAZOVSKY I. -"Optimizations of Communications Satellite Reliability Systems". Intermediate Report prepared for C.N.E.S." (1977). Contract C76. C.N.E.S. 067.

- CLAROTTI C., CONTINI S. et SOMMA R. "Phased Mission Systems with Reparable Components : Comparison between analytical Markov Solutions and Fault Tree Technique Evaluation". (1977).

des processus (de Markov) fait appel à des argumentations tant analytiques qu'algébriques ; et la démarche proposée recouvre le souci de formuler de manière "exacte" -à l'aide du produit de Kronecker (simple), par exemple- ou "approché" -en prenant en compte des matrices bien structurées telles que celles dites "presque complètement décomposables", par exemple- les solutions de systèmes d'équations algébriques ou différentielles en fonction des solutions de systèmes de même nature de taille moindre .

La classification des systèmes évoquée au début de cette introduction s'appuie sur les caractéristiques physiques des systèmes. C'est une classification orientée vers les méthodes analytiques de détermination de la "fiabilité" que l'on pourra retenir de cette étude : il convient alors de distinguer les systèmes cohérents de ceux non-cohérents ; puis de moduler ces deux classes selon diverses notions de dépendance stochastique (parmi celles évoquées précédemment) sans omettre le cas-limite de l'indépendance mutuelle.

*L'exposé des méthodes analytiques de détermination de la "fiabilité" au fur et à mesure des types de systèmes envisagés fera l'objet d'un texte ultérieur. Cette étude correspond à la première partie d'une thèse de 3ième cycle présentée à l'Université Paul Sabatier de Toulouse.*

# CHAPITRE A

## DESCRIPTIONS DES SYSTEMES DE "FIABILITE"

### I. INTRODUCTION

La description de tout système de "fiabilité" faisant appel à deux points de vue :

- l'un déterministe : la logique du système, seule, est alors considérée,
- l'autre stochastique : le système est alors considéré comme une entité dynamique,

il nous a paru fondamental d'aborder les trois points suivants :

(1) Définition de deux modèles de "fiabilité" très généraux et présentation unifiée d'une propriété déterministe : la cohérence. A cet effet, nous introduisons les notions de fonction de structure ("structure function" [25]) et de fonction de vie ("life function" [22]) étendues à l'ensemble des systèmes multiperformants ("multistate systems" [20]) qui englobe le cas particulier des systèmes binaires bien connus. Bien que les deux formulations des systèmes de fiabilité considérées alors soient équivalentes, il convient de noter que selon les cas, l'une peut s'avérer d'utilisation plus aisée que l'autre. Conformément à l'étude [20], nous généralisons la notion d'"essentialité" au cas des systèmes multiperformants. On notera qu'une telle terminologie se justifie alors par les conséquences de la propriété qu'elle désigne et non plus par le sens intuitif de celle-ci appliquée aux systèmes binaires, à savoir : tout élément inessentiel n'a aucune influence sur le comportement du système complet.

(2) Exposé des diverses caractéristiques stochastiques des systèmes de "fiabilité". Face à l'inflation des définitions proposées dans les nombreuses études de fiabilité (cf. [14], [31], [32], par exemple), nous présentons en particulier les diverses mesures stationnaires des systèmes de sûreté ("safety systems" [43]). Nous compléterons au chapitre B les diverses notions de dépendances présentées au paragraphe (III-3).

(3) Enumération des diverses représentations logiques les plus utilisées. Si elles permettent de mettre en évidence de nombreux résultats théoriques, la fonction de structure et la fonction de vie interviennent souvent de manière implicite dans la pratique. En effet, la représentation logique d'un système est alors traduite directement en les caractéristiques nécessaires à la méthode choisie. Ainsi, la détermination du modèle descriptif le mieux adapté constitue le point de départ de toute étude analytique de la fiabilité.

Les systèmes considérés dans cette étude sont supposés exempts de toute "cannibalisation" [35].

# II. POINTS DE VUE DETERMINISTES

## II.1 Fonction de Structure et Fonction de Vie

Tout système étant tout d'abord défini comme un ensemble d'éléments (ou composants, unités élémentaires du système par définition) soumis à des processus physiques, on caractérise tout état de l'ensemble complet à l'aide des états respectifs de ses divers éléments ou de ses divers modules. Jusqu'à de plus amples précisions (cf. § II.2.1), nous noterons $C = \{i \in N | i=1,2,...,n\}$ tout système formé de n éléments distincts, donc dit d'ordre n. Tout état d'un composant i correspond alors à l'un de ses divers niveaux de performances possibles ("performance level") supposés en nombre fini, et éléments de l'ensemble $S_i = \{0,1,2,...,N_i\}$ notés suivant leur ordre croissant depuis le niveau de panne complète (niveau 0) jusqu'au niveau de fonctionnement parfait (niveau $N_i$) ; on posera : $S_i^* = S_i - \{0\}$. Parmi ces systèmes dits à plusieurs états ou multiperformants nous n'omettrons pas le cas particulier des systèmes dits binaires [2], [25] dont l'étude n'exige que la distinction de deux niveaux de performance (niveau 0 ou 1) pour tout élément de C et C lui-même.

Etant donné l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{a},P)$, supposé complété, des observations (dont nous préciserons la définition au chapitre B suivant), on décrit tout élément i du système C à l'aide de : $\forall\ t \in \bar{R}^+$ ,

(i) la variable aléatoire $X_i(t)$ de $(\Omega,\mathcal{a},P)$ dans $(S_i, \mathcal{P}(S_i))$ rendant compte de l'état du composant i à l'instant t .

On notera alors $x_i(t)$ toute valeur observée de $X_i(t)$.

(ii) la variable aléatoire $\underline{T}_i = (T_i^j)_{j\in S_i^*}$ de $(\Omega,\mathcal{a},P)$

dans $(\overline{R}^{+N_i}, \mathcal{P}_{\overline{R}^{+N_i}})$ définie par :

$\forall\ j\in S_i^*,\ T_i^j \overset{p.s.}{=} \mathrm{Sup}\{t\in\overline{R}^+/\forall u\in[0,t], X(u)>j-1\}.$ (T1)

Si l'élément i est soumis à des réparations, alors $T_i^j$ désigne la date aléatoire de la première dégradation de niveau j ; sinon, on appelle $T_i^j$ "durée de vie aléatoire de niveau j" (cf.§ III-1-1) et on peut encore définir celle-ci par la relation :

$T_i^j \overset{p.s.}{=} \mathrm{Sup}\{u\in\overline{R}^+/X_i(u) > j-1\}.$ (T2)

On notera alors, $\underline{t}_i = (t_i^j)_{j\in S_i^*}$, toute valeur observée de $\underline{T}_i$ .

Dans le cas des systèmes binaires, il suffit évidemment de considérer la variable aléatoire réelle $T_i$ correspondant à j = 1. Sans restreindre le domaine de notre étude, nous supposerons que tout composant $i \in C$ présente un même niveau de performance maximal $N = \mathrm{Sup}\{N_i/i\in C\}$ ; il suffit alors de définir correctement la fiabilité ou la disponibilité de niveau $j \in S_i^*$ , $i \in C$ .

Dorénavant, $\forall\ i \in C,\ S_i = S = \{0,1,2,\dots,N\}$.

A partir de celles caractérisant chacun de ses éléments, on définit les variables aléatoires correspondantes décrivant le système complet à l'aide de :

(i) sa fonction de structure $\Phi$ de $S^n$ dans S telle que $\forall\ t \in \overline{R}^+$ , la variable aléatoire $X(t) = \Phi\circ\underline{X}(t) = \Phi\circ(X_i(t))_{i\in C}$ de $(\Omega,\mathcal{a},P)$ dans $(S, \mathcal{P}(S))$ rende compte du niveau de performance du système en fonction des performances conjointes de ses n éléments. On notera alors $x(t)$ et $\underline{x}(t)$, les valeurs observées des variables aléatoires $X(t)$ et $\underline{X}(t)$ respectivement.

(ii) Sa fonction de vie $\tau^j$ de niveau $j \in S^*$, dans le cas d'un système de fiabilité ; (cf.§(III-1-1)) ; cette fonction de $\overline{R}^{+Nn}$ dans $\overline{R}^+$ est telle que : la variable aléatoire $T^j = \tau^j \circ \underline{T} = \tau^j \circ (\underline{T}_1, \underline{T}_2, \dots, \underline{T}_n)$ de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\overline{R}^+, \mathcal{B}_{\overline{R}^+})$ rende compte de la durée de vie de niveau j du système en fonction des durées de vie de ses n éléments ; $\forall\, j \in S^*$,

$$T^j \overset{p.s.}{=} \operatorname{Sup}\{u \in \overline{R}^+ / X(u) > j-1\} .$$

La date aléatoire $T^j$ de la première dégradation de niveau j d'un système de sûreté est définie comme $T_i^j$ par la relation (T2) précédente.

Lorsque nous négligerons l'aspect dynamique du système, nous utiliserons seulement les symboles $X_i, x_i, \underline{X}, \underline{x}, X$ et $x$ sans aucune référence à la date t fixée dans $\overline{R}^+$ .

Conventions :

Nous respecterons désormais les notations vectorielles suivantes: tout vecteur $\underline{x} \in S^n$ étant repéré par ses coordonnées en base canonique,

- pour toute partie M non vide de C et tout $j \in S$,

$$\underline{x} = (\underline{j}_M, \underline{y}_{\overline{M}}) \Leftrightarrow x_i = \begin{cases} j \text{ si : } i \in M \\ y_i \text{ si : } i \in \overline{M} \end{cases}$$

où : $\underline{y}$ désigne un vecteur de $S^n$ et $\overline{M}$ le complémentaire de M dans C ; dans le cas particulier où :

- $M = \{i\}$, on écrira : $\underline{x} = (j_i, \underline{y})$
- $M = C$ , on écrira : $\underline{x} = \underline{j}$ .

- Etant donné une partition $\mathcal{M} = \{M_\ell / \ell=1,2,\ldots,m\}$, $m < n$, de l'ensemble C, nous désignerons par :
  $\underline{x}_{M_\ell} \in S_{M_\ell}$ , le vecteur des performances des divers éléments de $M_\ell$ .

  On peut alors noter tout vecteur $\underline{x} \in S^n$ sous la forme : $\underline{x} = (\underline{x}_{M_1}, \underline{x}_{M_2}, \ldots, \underline{x}_{M_m})$.

Tout à fait analogues seront les notations relatives au vecteur $\underline{t} \in \bar{R}^{+n}$ , et aux vecteurs aléatoires $\underline{X}$ et $\underline{T}$ .

Afin de caractériser quelques types de systèmes, nous introduisons :

- une relation d'ordre partiel sur $S^n$ [46] = pour tout $\underline{x} \in S^n$ et tout $\underline{x}' \in S^n$ ,

$$\underline{x} \leqslant \underline{x}' \Leftrightarrow \forall\, i \in C \ , \ x_i \leqslant x_i' \ .$$

- Une relation de préordre sur $S_M$ [ 6 ] , M désignant une partie propre non vide de C : pour tout $\underline{x}_M \in S_M$ et tout $\underline{x}_M' \in S_M$ ,

$$\underline{x}_M \leqslant_\Phi \underline{x}_M' \Leftrightarrow \forall \underline{x}_{\overline{M}} \in S_{\overline{M}} \ , \ \Phi(\underline{x}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) \leqslant \Phi(\underline{x}_M', \underline{x}_{\overline{M}}) \ .$$

Ainsi que les deux relations d'équivalence correspondantes sur $S^n$ et $S_M$ respectivement

## II.2 Les Systèmes Cohérents

Remarque préliminaire :

Dorénavant, nous désignerons tout système à l'aide du couple $(C,\Phi)$ tel que :

- C désigne un ensemble arbitraire de n éléments de $N^*$

- la fonction de structure $\Phi$ décrive la logique du système définie lors de la conception de celui-ci.

### II.2.1 Définitions

**Définition 1 :**

On appelle système dual du système $(C,\Phi)$ d'ordre n, le système d'ordre n, noté $(C,\Phi^D)$ dont la fonction de structure $\Phi^D$ est définie par la relation :

$$\forall\ \underline{x} \in S^n\ ,\ \Phi^D(\underline{x}) = N - \Phi(\underline{N} - \underline{x})\ .$$

Nous noterons $\tau^{jD}$ : la fonction de vie de niveau j du système $(C,\Phi^D)$ .

**Remarque 1 :**

Dans le cas des systèmes binaires : $\forall\ \underline{x} \in S^n$, $\Phi^D(\underline{x}) = \overline{\Phi(\underline{1}-\underline{x})}$ conformément aux notations de l'algèbre de BOOLE. En l'absence de toute précision, $\Phi$ désigne la fonction de structure d'un système dont on doit distinguer plus de deux niveaux de performance [20] ; la détermination d'une telle fonction fait alors appel aux règles opératoires de l'algèbre de POST [18] définie sur S ; la variable aléatoire X s'écrit, pour tout i ∈ C, sous la forme suivante :

$$X = \sum_{j=0}^{N} \Phi \circ (j_i, \underline{X})\ .\ 1_{\{j\}} \circ X_i\ .$$

où : $\forall x \in S, 1_{\{j\}}(x) = \delta_{xj}$ ($\delta$ = symbole de Kronecker).

**Définition 2 :**

On dit qu'un système $(C,\Phi)$ d'ordre n est un système semi-cohérent si et seulement si :

(C1) sa fonction de structure $\Phi$ est une fonction non décroissante (au sens de la relation d'ordre partiel définie précédemment) sur $S^n$ .

**Remarque 2 :**

L'interprétation physique de l'axiome (C1) constitue l'hypothèse raisonnable suivante : si le système $(C,\Phi)$ est à un niveau de performance j , alors, aucune baisse de performance d'un élément n'induit une augmentation de la performance du système complet ; et inversement, relativement à toute augmentation des niveaux de performance des éléments du système.

<u>Définition 3</u> :

On appelle <u>système cohérent au sens large</u>, tout système $(C,\Phi)$ semi-cohérent dont la fonction de structure $\Phi$ vérifie de plus l'axiome suivant :

$$(C2) \ \forall\, j \in S \ , \ \Phi(\underline{j}) = j \ .$$

<u>Remarque 3</u> :

Les seuls systèmes binaires strictement semi-cohérents (i.e. : semi et non cohérents) sont ceux caractérisés par la fonction de structure $\Phi \equiv 0$ ou $\Phi \equiv 1$ .

<u>Définition 4</u> :

On dira qu'une <u>partie</u> M propre non vide de C est <u>essentielle au niveau de performance j ∈ S</u> d'un système $(C,\Phi)$ si et seulement si :

$$\exists\, \underline{x}_{\overline{M}} \in S_{\overline{M}} \,/\, \begin{cases} \Phi(\underline{j}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) = j \\ \forall\, \ell \in S,\ \ell \neq j \Rightarrow \Phi(\underline{\ell}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) \neq j . \end{cases}$$

Si $M = \{i\}$, l'élément i est essentiel au niveau de performance j.

<u>Exemple 1</u> :

Si $(C,\Phi)$ désigne un système de redondance majoritaire k/n (<<k out of n system >> ; $k \in C$ ; cf. exemple 2), alors, toute partie M de C telle que : $|M|=k$ est une partie essentielle au système $(C,\Phi)$ pour tout niveau $j \in S$ .

<u>Remarque 4</u> :

Cette dernière définition comprend évidemment comme cas particulier la notion d'élément essentiel i (<<relevant>> [22]) à un système binaire $(C,\Phi)$ : $1_i \neq_\Phi 0_i$ .

Définition 5 :

On appelle système cohérent au sens strict relativement au niveau de performance $j \in S$, tout système $(C,\Phi)$ cohérent au sens large vérifiant l'axiome suivant :

(C3) Tout élément $i \in C$ est essentiel au niveau de performance $j$.

Remarque 5 :

Notons que selon la remarque 3 précédente, les axiomes (C1) et (C3) seuls, sont nécessaires et suffisants pour assurer la cohérence stricte d'un système binaire (<<fully coherent system>> [22]).

Dorénavant, toutes les fois que nous ferons appel à la notion de cohérence, nous évoquerons celle au sens large, sauf indication contraire.

Proposition : [20] [25]

Le système dual $(C,\Phi^D)$ de tout système $(C,\Phi)$ cohérent (au sens strict) est lui-même un système cohérent (au sens strict).

Exemple :

On vérifie aisément que le système dual $(C,\Phi^D)$ du système $(C,\Phi)$ strictement cohérent formé de n éléments :

- en fiabilité-série ($\Phi\circ\underline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i$) est un système de n éléments en fiabilité-parallèle ($\Phi\circ\underline{X} = \coprod_{i=1}^{n} X_i = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)$) et inversement.

- en configuration de <<redondance majoritaire k/n>>

($\Phi\circ\underline{X} = \coprod_{C_k\in\mathcal{C}_k} \prod_{i\in C_k} X_i$ où : $\mathcal{C}_k = \{C_k \subset C / |C_k| = k\}$ ; $k\in N^*$, $k < n$)

est un système de n éléments en configuration de <<redondance majoritaire (n-k+1)/n>>
$(\Phi \circ \underline{X} = \coprod_{C_{n-k+1} \in \mathcal{C}_{n-k+1}} \prod_{i \in C_{n-k+1}} X_i)$.

Remarque 6 :

Lorsqu'elle est définie (cf. § III-1-1), la fonction de vie d'un système cohérent est une fonction non décroissante en chacun de ses arguments et à valeurs dans $\bar{R}^+$. Elle permet aussi de caractériser les systèmes binaires selon le théorème suivant [22] :

Théorème 1 :

Un système binaire $(C,\Phi)$ d'ordre n admettant une fonction de vie $\tau$ est cohérent si et seulement si : celle-ci vérifie l'une des deux conditions suivantes :

$(C_i)$ Pour tout simplexe de $\bar{R}^{+n}$ de la forme :

$\Sigma = \{\underline{t} \in \bar{R}^{+n} / t_{i_1} \leqslant t_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{i_n}\}$ où $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$

désigne une permutation de $(1,2,\ldots,n)$,

$\exists\, i_\Sigma \in C / \forall\, \underline{t} \in \Sigma,\ \tau(\underline{t}) = t_{i_\Sigma}$ .

$(C_{ii})$ Pour toute fonction f non décroissante de $\bar{R}^+$ dans lui-même, $\forall\, \underline{t} \in \bar{R}^{+n}$ , $f[\tau(\underline{t})] = \tau(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n))$.

Nous ne tiendrons pleinement compte du caractère aléatoire des variables descriptives des systèmes qu'à partir du paragraphe III ; afin de compléter le point de vue déterministe de celui-ci, nous présentons une notion fondamentale souvent utile puisque source de simplifications des systèmes : celle de module ou sous-système cohérent.

### II-2-2 Décomposition Modulaire des Systèmes Cohérents

#### II-2-2-1 Définitions

Définition 6 :

Une partie M propre non vide de C et essentielle au système $(C,\Phi)$ forme un sous-ensemble modulaire (<<modular subset>> [ 6 ]) de $(C,\Phi)$ si et seulement si : il existe deux fonctions de structure $\mu$ et $\psi$ définies sur $S_M$ et $S \times S_{\overline{M}}$ respectivement et telles que :

(M1) $\forall\ \underline{x} \in S^n,\ \Phi(\underline{x}) = \Phi\ (\underline{x}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) = \psi(\mu(\underline{x}_M), \underline{x}_{\overline{M}})$ .

(M2) le couple $(M,\mu)$ définit un système cohérent d'espace des états $S_M$ et appelé module de $(C,\Phi)$ .

(M3) le couple $(C' = \{C_M\} \cup \overline{M},\ \psi)$ définit un système cohérent, $C_M$ désignant l'élément de $(C',\psi)$ obtenu par contraction de M en un seul élément dont les performances sont décrites à l'aide de la variable aléatoire $X_M = \mu \circ \underline{X}_M$ .

Remarque 7 :

On vérifie aisément que :

(a) la relation <<être module de>> est transitive.

(b) Le couple $(M,\mu^D)$ définit un module du système $(C,\Phi^D)$ vérifiant la relation : $\forall\ \underline{x} \in S^n$ ,

$$\Phi^D(\underline{x}) = \Phi^D(\underline{x}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) = \psi^D(\mu^D(\underline{x}_M), \underline{x}_{\overline{M}}) .$$

(c) Selon la relation (M1), on peut considérer tout sous-ensemble modulaire M d'un système cohérent comme un macro-élément (<<super-component>>) de C ; la fonction de vie $\tau^j$ , $j \in S^*$, vérifie donc la relation tout à fait analogue suivante :

$$\tau^{j} \circ \underline{T} = \tau'^{j} \circ ((\tau_M^{\ell} \circ \underline{T}_M)_{\ell \in S^*}, \underline{T}_{\overline{M}})$$

où : $-\tau_M^{\ell}$, $\ell \in S^*$, désigne la fonction de vie de niveau $\ell$ du système cohérent $(M,\mu)$ :

$$\tau_M^{\ell} \circ \underline{T}_M = T_M^{\ell} = \text{Sup}\{u \in \bar{R}^+ / \mu \circ \underline{X}_M(u) > \ell - 1\}$$

$-\tau'^{j}$ désigne la fonction de vie de niveau j du système cohérent $(C',\psi)$ :

$$\tau'^{j}_{\circ}((\underline{T}_M^{\ell})_{\ell \in S^*}, \underline{T}_{\overline{M}}) = \text{Sup}\{u \in \bar{R}^+ / \psi \circ (\mu \circ \underline{X}_M(u), \underline{X}_{\overline{M}}(u)) > j-1\}.$$

Définition 7 :

On dit que l'ensemble des modules $(M_1,\mu_1),(M_2,\mu_2),\ldots (M_m,\mu_m)$ forme une décomposition modulaire du système cohérent $(C,\Phi)$ d'ordre n $(m < n)$ [6] si et seulement si : l'ensemble $\mathcal{M} = \{M_\ell / \ell = 1,2,\ldots,m\} \subset \mathcal{P}(C)$ constitue une partition de l'ensemble C en sous-ensembles modulaires de $(C,\Phi)$.

Le système cohérent $(C',\psi)$ correspondant formé de m éléments essentiels est alors décrit par la variable aléatoire :

$$\text{(M4)} \quad \Phi \circ \underline{X} = \Phi \circ (\underline{X}_{M_1}, \underline{X}_{M_2}, \ldots, \underline{X}_{M_m}) = \psi \circ (\mu_1 \circ \underline{X}_{M_1}, \mu_2 \circ \underline{X}_{M_2}, \ldots, \mu_m \circ \underline{X}_{M_m}) .$$

### II.2.2.2 Caractérisation des Modules des Systèmes Cohérents

Avec une démonstration analogue à celle effectuée dans le cas des systèmes binaires cohérents [6], on vérifie aisément le théorème suivant : (cf. annexe XA).

Théorème 2 :

Etant donné un système cohérent $(C,\Phi)$, une partie M propre non vide de C et essentielle à $(C,\Phi)$ forme un sous-ensemble modulaire de $(C,\Phi)$ si et seulement si :

$$\forall\, \underline{x}_M \in S_M \,, \quad \exists\, j \in S \;/\; \underline{x}_M =_{\Phi} \underline{j}_M \;.$$

De plus, si : $(M,\mu)$ désigne le module correspondant de $(C,\Phi)$, alors, la relation (M1) et la relation suivante : $\forall\, \underline{x}_M \in S_M \,,\ \mu(\underline{x}_M) = j \Leftrightarrow \underline{x}_M =_{\Phi} \underline{j}_M$ définissent les fonctions $\psi$ et $\mu$ respectivement de manière unique.

Toute décomposition modulaire d'un système $(C,\Phi)$ ayant pour but de restreindre l'analyse de celui-ci à des systèmes d'ordre moindre, le <<théorème des trois modules>> [ 6 ] énoncé ci-après aide considérablement à effectuer de telles décompositions.

Théorème 3 :

Etant donné un système binaire strictement cohérent $(C,\Phi)$, si trois parties $M_1$, $M_2$ et $M_3$ propres non vides et deux à deux disjointes de C sont telles que : $(M_1 \cup M_2)$ et $(M_2 \cup M_3)$ forment deux sous-ensembles modulaires de $(C,\Phi)$, alors, $M_1$, $M_2$ et $M_3$ sont eux-mêmes trois sous-ensembles modulaires de $(C,\Phi)$ tels que :

- soit : $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = C$ ,

- soit : $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ forme un sous-ensemble modulaire de $(C,\Phi)$.

De plus, les modules $(M_1,\mu_1)$, $(M_2,\mu_2)$, $(M_3,\mu_3)$ correspondants sont :

- soit : en fiabilité-série

- soit : en fiabilité-parallèle.

# III. DESCRIPTION STOCHASTIQUE DES SYSTEMES

Toute étude analytique de la fiabilité faisant appel sous des formes diverses à la notion de processus stochastique, précisons dès à présent, afin de nous rassurer pleinement sur le bien-fondé des définitions et des calculs ultérieurement envisageables, que nous utiliserons ce terme au sens d'une fonction aléatoire sur $(\Omega \times \overline{R}^+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{\overline{R}+}, P \otimes \mu)$ -où $\mu$ désigne la mesure de Lebesgue- et dont nous considérerons une version standard séparable sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ supposé complété (versions qui existent toujours selon le théorème de DOOB évoqué dans [16], p. 144).

## III.1 Des Lois de Probabilité de Survie

### III.1.1 La Fonction de Fiabilité

Définition 1 :

Etant donné un système $(C,\Phi)$ d'ordre n, on notera $R^j$ sa fonction de fiabilité de niveau $j \in S^*$, fonction positive non croissante définie sur $R^+$ par l'une des deux relations suivantes :

- à partir du processus $\{X(t)/t \in \overline{R}^+\}$ des performances aléatoires du système :

$$\forall\ t \in \overline{R}^+,\ R^j(t)=P[\,X(u)>j-1\ ;\ \forall\ u \in [0,t]\,]. \qquad \text{(R01)}$$

- à partir de la variable aléatoire $T^j$ appelée durée de vie de niveau j ou date de la première occurence du niveau (j-1) selon que l'on traite d'un système de fiabilité ou de sûreté :

$$\forall\ t \in \overline{R}^+,\ R^j(t)=P[\,T^j > t\,]. \qquad \text{(R02)}$$

Dans le cas des systèmes binaires, on notera celle-ci R correspondant à j=1 .

Remarque 1 :

Si le système considéré <<a une vie>> [21] de niveau j, $j \in S^*$ , c'est-à-dire ; si le processus stochastique $\{X(t)/t \in \bar{R}^+\}$ vérifie la relation :

$$\forall\, t \in \bar{R}^+ / P[X(t) > j-1] > 0 \;,\; P[X(s) > j-1 ; \forall\, s \in [0,t[\, / X(t) > j-1] = 1 \qquad (V0)$$

$$\Leftrightarrow \forall (s,t) \in \bar{R}^{+2}, s < t / P[X(t) > j-1] > 0,\; P[[X(s) \leqslant j-1]/[X(t) > j-1]] = 0 \qquad (V1)$$

alors, la fonction $R^j$ peut s'écrire sous la forme :

$$\forall\, t \in \bar{R}^+ \;,\; R^j(t) = P[X(t) > j-1] \qquad (R03)$$

Remarque 2 :

Si, de plus, tous les éléments d'un système $(C,\Phi)$ supposé cohérent d'ordre n ont une vie c'est-à-dire : si le processus de leurs performances conjointes vérifie la relation :

$$\forall (\underline{x},\underline{y}) \in S^{2n}, \forall\, (s,t) \in \bar{R}^{+2} : \underline{x} < \underline{y},\; s < t,\; P[[\underline{X}(s) = \underline{x}] \cap [\underline{X}(t) = \underline{y}]] = 0 \qquad (V3)$$

alors, le système a une vie (la réciproque est fausse -cf. exemple A-[21], étude consacrée aux relations liant la notion de cohérence et l'existence de la vie des systèmes binaires et de leurs éléments) ; on peut montrer alors que la fonction de fiabilité de niveau $j \in S^*$ d'un tel système s'exprime comme une fonction $h_\Phi^j$ de celles de ses divers éléments caractérisés par le vecteur $\underline{r} = (r_i^j)_{(i,j) \in C \times S^*}$ de leurs fiabilités respectives :

$$\forall\, t \in \bar{R}^+ \;,\; R^j(\underline{t}) = P[T^j > t] = h_\Phi^j(\underline{r}(t)) \qquad (R04)$$

Remarque 3 :

Si $(M_1,\mu_1),(M_2,\mu_2),\ldots,(M_m,\mu_m)$ forme une décomposition modulaire d'un tel système, alors : (cf. relation (M4)-§II-2-2-1)

$$\forall\, t \in R^+ \;,\; h_\Phi^j(\underline{r}(t)) = h_\psi\, |\underline{h}_\mu(\underline{r}(t))| \,. \qquad (R05)$$

où : $\underline{h}_\mu(\underline{r}(t)) = (h_{\mu_k}^{\ell}(\underline{r}_{M_k}(t)))_{(\ell,k) \in S^* \times \{1,2,\ldots,m\}}$

### III-1-2 Quelques Propriétés Stochastiques des Systèmes Cohérents

Remarque préliminaire :

Les notions de :

- fonction du hasard(<<hazard function>> [24]) $\Lambda$ :
  $\forall\ t \in \bar{R}^+\ \Lambda(t) = -\mathrm{Log}\ \bar{F}(t)$

- fonction-taux de hasard(<<hazard rate-function>> [ 1 ]) $\lambda$ : $\forall\ t \in \bar{R}^+$ , $\lambda(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}$

  (Si celle-ci est bien définie ; le rapport :

  $$\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} \quad \text{, sinon)}$$

permettent de caractériser de larges classes de lois de probabilité parmi celles, notées $\mathcal{L}$ (T) en abrégé, des variables aléatoires T réelles, non négatives définies par leur fonction de répartition F ou leur fonction de survie $\bar{F}$=1-F. Des diverses notions de <<vieillissement aléatoire positif>> [ 12 ], nous retiendrons les deux classes de lois de probabilité suivantes incluant celle, bien connue, des lois de probabilité de taux de hasard croissant (<<increasing hazard rate distributions>> [ 1 ] ; en abrégé : de type IHR) :

Définition 1 :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire positive T est :

(i) de type IHRA (<<increasing hazard rate average>> [ 7 ]) si et seulement si : l'application : $t \in R^+ \longrightarrow [\bar{F}(t)]^{1/t}$ est une fonction non croissante sur $\bar{R}^+$ .

(ii) de type NBU (<<New Better than Used>> [ 2 ]) si et seulement si : $\forall (s,t) \in \bar{R}^{+2}$ , $\bar{F}(s+t) \leqslant \bar{F}(s).\bar{F}(t)$ .

Ces deux classes de lois sont bien distinctes [12] ; cependant, Proposition :

Toute loi de probabilité de type IHRA est une loi de probabilité de type NBU.

Définition 2 :

On dit qu' <<une classe $\mathcal{P}$ de lois de probabilités de survie est fermée pour la formation des systèmes cohérents>> [7 ] si et seulement si : pour tout système cohérent $(C,\Phi)$ de fonctions de vie $\tau^j$ de niveau j, $j \in S^*$, et pour tout vecteur aléatoire $\underline{T}$ formé de variables aléatoires réelles $T_i^j$, $(i,j) \in C \times S^*$, mutuellement indépendantes et telles que $\mathcal{L}(T_i^j) \in \mathcal{P}$, la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires $\tau^j \circ \underline{T}$, $j \in S^*$, est un élément de $\mathcal{P}$

Théorème 1 : [ 7 ]

La loi de probabilité $\mathcal{L}(T)$ est de type IHRA si et seulement si : il existe une suite aléatoire $\{U_n\}_{n \in N}$ convergente en loi vers la variable aléatoire T et telle que : $\forall$ n $\in$ N, $U_n = \tau_n \circ \underline{T}$ où : $\tau_n$ désigne la fonction de vie d'un système binaire cohérent et $\underline{T}$ un vecteur de variables aléatoires réelles positives, mutuellement indépendantes et de lois exponentielles.

Théorème 2 : [2 ], [7 ], [20]

La classe des lois de probabilité de type IHRA et celle des lois de probabilité de type NBU sont fermées toutes deux pour la formation des systèmes cohérents.

III.2 Diverses "Mesures" d'un système de sûreté

Périodes de bon fonctionnement, instants de panne, périodes de réparations et instants de remise en service se succédent tout au long de l'évolution dynamique d'un système de sûreté. Ainsi les fonctions d'échantillonnage du processus stochastique $\mathcal{X} = \{X(t)/t \in \overline{R}^+\}$ descriptif de l'état d'un tel système ne sont plus presque-sûrement non croissantes sur $\overline{R}^+$ et une meilleure connaissance de celles-ci exige la détermination de diverses caractéristiques stochastiques autres que la fonction de fiabilité.

### III.2.1 La Fonction de Disponibilité

Définition :

Etant donné un système $(C,\Phi)$, on notera :

- $A^j$ : sa fonction de disponibilité de niveau $j \in S^*$ définie par :

$$\forall\ t \in R^+ ,\ A^j(t) = P[\ X(t) > j-1]\ .$$

- $A^j_s = \lim_{t \to +\infty} A^j(t)$ : la disponibilité asymptotique (si elle existe).

Remarques :

- D'après la relation (R03) du paragraphe (III.1) précédent, les deux fonctions $R^j$ et $A^j$ coïncident si et seulement si : le système a une vie.

- Selon les relations (R04) et (R05), les disponibilités instantanée $A^j(t)$ et asymptotique $A^j_s$ s'écrivent comme des fonctions $h^j_\Phi$ des vecteurs des disponibilités élémentaires $\underline{a} = (a^j_i)_{i,j}$ et $\underline{a}_s = (a^j_{si})_{i,j}$ respectivement.

### III.2.2 Compléments Descriptifs

On précise, le plus souvent, la description stochastique d'un système de sûreté à l'aide des caractéristiques suivantes, si elles existent :

. Cas 1 : Si les durées des pannes globales sont très pénalisantes:

- la fonction de maintenabilité $M^j$ de niveau j, $j \in S^*$, définie par :

$$\forall\ t \in R^+ ,\ M^j(t) = 1 - P[\ X(u) \leq j-1\ ;\ \forall\ u \in [0,t]]\ .$$

où la date du début de la réparation fixe l'instant initial.

- La durée moyenne de bon fonctionnement de niveau $j \in S^*$ après réparation (<<mean up time>>) notée en abrégé : $MUT^j$ .

- La durée moyenne des pannes (<<mean down time>>) de niveau j $j \in S^*$, en abrégé $MDT^j$ et définie par : $MDT^j = \int_0^{+\infty}(1-M^j(u))du$ (si une telle intégrale est bien définie).

- La durée moyenne d'un cycle noté en abrégé $MCT^j$ (<<mean cycle time>>) : $MCT^j = MUT^j + MDT^j$.

  Alors, $A_s^j = \frac{MUT^j}{MCT^j}$ - d'où, le terme de <<coefficient d'aptitude>> [31] parfois utilisé pour désigner $A_s^j$ .

- La durée moyenne de bon fonctionnement de niveau j considérée à partir d'une date aléatoirement choisie notée en abrégé $MTTF^j$ . (<<mean time to failure>>) qui est surtout utile pour des systèmes fonctionnant par intermittences aléatoires.

. Cas 2 : Si le nombre des pannes est très pénalisant :

- La durée moyenne d'un cycle $MCT^j$ .

- La durée moyenne de bon fonctionnement du système jusqu'à la première panne (<<mean time to first failure>>) notée $MTFF^j$ et que l'on peut écrire, sous certaines hypothèses, sous la forme :

$$MTFF^j = \int_0^{+\infty} R^j(t)dt \quad .$$

## III.3 Quelques types de Dépendances Positives

En comparaison des études de fiabilité effectuées, souvent par souci de faisabilité, sous l'hypothèse de l'indépendance stochastique entre les variables aléatoires descriptives du modèle considéré, plus rares sont celles tenant compte de la dépendance positive créée par un <<environnement>> commun, par exemple (cf. [18], p.12 ). Au cours de ce paragraphe, nous présenterons trois types de telles dépendances parmi lesquelles la notion d'association joue un rôle primordial. Nous négligerons les diverses notions de dépendances positives définies dans le but de généraliser la notion de loi de probabilité de type IHR [11], [33] au cas multidimensionnel car elles n'interviennent jusqu'à présent, que dans des conditions suffisantes de l'association pour des vecteurs aléatoires bidimensionnels [27], [33].

### III.3.1 Définitions

Terminologies :

Nous désignerons par l'expression :

- <<fonction-test>> [38] : toute fonction f telle que toute intégrale définie par le contexte et faisant intervenir f, existe,

- <<fonction croissante sur $R^m$>> : toute fonction réelle croissante par rapport à chacun de ses m arguments réels.

Définition 1 :

On dira que la variable aléatoire vectorielle $\underline{X} = (X_1,X_2,...,X_m)$ à valeurs dans $(R^m, \mathcal{B}_{R^m})$ est dépendante de la variable aléatoire vectorielle $\underline{Y} = (Y_1,Y_2,...,Y_n)$ à valeurs dans $(R^n, \mathcal{B}_{R^n})$ selon la relation de dépendance de régression positive à gauche (respectivement : à droite -"positive regression dependence" [38] si m = n = 1) si et seulement si :

$\forall \underline{x} \in R^m$ , $P[\bigcap_{i=1}^{m} [X_i \leqslant x_i] / \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i=y_i]]$ est une fonction non croissante de $\underline{y} \in R^n$ (respectivement : $P[\bigcap_{i=1}^{m} [X_i > x_i] / \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i = y_i]]$ est une fonction non décroissante de $\underline{y} \in R^n$).

On notera ceci en abrégé : PLRD($\underline{X}/\underline{Y}$) (respectivement : PRRD($\underline{X}/\underline{Y}$)).
Posons : PRD($\underline{X}/\underline{Y}$) $\Leftrightarrow$ {PRRD($\underline{X}/\underline{Y}$) et PLRD($\underline{X}/\underline{Y}$)} .

<u>Définition 2</u> :

On dit que m variables aléatoires réelles : $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont mutuellement dépendantes selon une relation de <u>dépendance de quadrant</u> gauche (respectivement : de quadrant droit -"positive left (right) quadrant dependence" [23]) positive si et seulement si : leurs fonctions de répartition marginales : $F_i$ , $i=1,2,\ldots,m$ et conjointe F (respectivement : leurs fonctions de survie : $\overline{F}_i$ , $i=1,2,\ldots,m$ et $\overline{F}$ (dans le cas multidimensionnel :

$\forall \underline{x} \in R^m$, $\overline{F}(\underline{x}) = P[\bigcap_{i=1}^{m} [X_i > x_i]]$) vérifient la relation suivante:

$$F \geqslant \prod_{i=1}^{m} F_i \qquad (\text{respectivement : } \overline{F} \geqslant \prod_{i=1}^{m} \overline{F}_i)$$

On notera ceci en abrégé : PLQD($\underline{X}$) (respectivement : PRQD($\underline{X}$)).

Posons : PQD($\underline{X}$) $\Leftrightarrow$ {PRQD($\underline{X}$) et PLQD($\underline{X}$)}.

<u>Remarques</u> :

- Si les m durées de vie aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_m$ vérifient la relation de dépendance PQD($\underline{T}$), alors, leur loi de probabilité conjointe $\mathcal{L}(\underline{T})$ est telle que :

$$\prod_{i=1}^{m} \overline{F}_i \leqslant \overline{F} \leqslant 1 - \prod_{i=1}^{m} (1-\overline{F}_i) \ .$$

  (relation dite "des bornes série-parallèles")
- Si X désigne une variable aléatoire réelle,

$$\text{PLRD}(X/\underline{Y}) \Leftrightarrow \text{PRRD}(X/\underline{Y}) \Leftrightarrow \text{PRD}(X/\underline{Y})$$

- Si, de plus, Y désigne une variable aléatoire réelle, PLQD(X,Y) $\Leftrightarrow$ PRQD(X,Y) $\Leftrightarrow$ PQD(X,Y) $\Leftrightarrow$ pour tout couple (f,g) de fonctions réelles "concordantes" [38] sur R : [28]

$$\text{Cov}\ (f \circ X,\ g \circ Y) \geqslant 0\ .$$

- En remplaçant toutes les inégalités larges et strictes définissant les évènements dans les définitions 1 et 2 ci-dessus par des inégalités strictes et larges respectivement, on obtient des définitions équivalentes.

Définition 3 :

On dit que m variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont associées [28] si et seulement si : pour tout couple (f,g) de fonctions-tests réelles non décroissantes sur $R^m$, le vecteur aléatoire $\underline{X}$ correspondant vérifie la relation :

$$\mathrm{Cov}(f\circ\underline{X}\ ,\ g\circ\underline{X}\ ) \geqslant 0\ . \qquad (10)$$

On notera ceci en abrégé : $A(\underline{X})$ .

### III.3.2 Critères et Propriétés de l'Association

α) Trois Critères Fondamentaux de l'Association

Théorème :

Les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont associées si et seulement si : elles vérifient l'un des trois critères suivants [28] :

(A01) L'axiome (A0) de la définition de l'association est vérifié pour tout couple de fonctions réelles bornées, continues et non décroissantes sur $R^m$ .

(A02) L'axiome (A0) de la définition de l'association est vérifiée pour tout couple de fonctions binaires non décroissantes sur $R^m$ .

(A03) Pour tout $k \in N^*$ et tout vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R^k$ , les variables aléatoires binaires :

$1_{]x_j,+\infty[} \circ X_i$ , i=1,2 ...m j=1,2,.. k, sont associées.

β) Cinq Propriétés Fondamentales de l'Association [28]

(A1) Tout sous-ensemble d'un ensemble de variables aléatoires associées forme un ensemble de variables aléatoires associées.

(A2) Toute variable aléatoire réelle est associée à elle-même.

(A3) Toute réunion de deux ensembles indépendants de variables aléatoires associées forme encore un ensemble de variables aléatoires associées.

(A4) Si le vecteur aléatoire réel $\underline{X}$ vérifie la relation $A(\underline{X})$, alors : quelles que soient les fonctions $h_1, h_2, \ldots, h_m$ $(m \in N^*)$ toutes non décroissantes ou toutes non croissantes, le vecteur aléatoire $\underline{h} \circ \underline{X} = (h_i \circ \underline{X})_i$ vérifie la relation : $A(\underline{h} \circ \underline{X})$.

(A5) La convergence en loi est stable relativement à l'association. Ainsi, si : $\{X_n^i\}_{n \in N}$ désignent m suites de variables aléatoires réelles convergentes en loi vers les variables aléatoires $X^i$, $i=1,2,\ldots,m$, respectivement et telles que : $\forall n \in N$, $A(X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^m)$, alors, les variables aléatoires-limites vérifient la relation : $A(X^1, X^2, \ldots, X^m)$.

γ) Un Exemple Fondamental

Tout vecteur aléatoire réel $\underline{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ ayant pour loi de probabilité conjointe la loi exponentielle multidimensionnelle [39] notée en abrégé $MVE_n(\{\lambda_J / J \in \mathcal{J}\})$ où $\mathcal{J}$ désigne un recouvrement de $\{1,2,\ldots,n\}$, vérifie la relation $A(\underline{T})$. En effet le vecteur aleatoire $\underline{T}$ suit une telle loi si et seulement si il existe des variables aléatoires réelles indépendantes $S_J$, $J \in \mathcal{J}$, suivant chacune une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda_J$ respectivement et telles que :

$$\forall\ i = 1,2,\ldots,n, \quad T_i \overset{p.s.}{=} \min\{S_J / i \in J \ ;\ J \in \mathcal{J}\} .$$

### III.3.3 Comparaisons

On vérifie, de manière immédiate, que les diverses relations de dépendance considérées vérifient une propriété analogue à celle notée (A1) de l'association:

Proposition 1 :

Etant donné le vecteur aléatoire réel $\underline{Y}$, si le vecteur aléatoire réel $\underline{X}$ vérifie l'une des quatre relations de dépendance suivantes : PLRD($\underline{X}/\underline{Y}$), PRRD($\underline{X}/\underline{Y}$), PLQD($\underline{X}$), PRQD($\underline{X}$), alors, toute variable aléatoire marginale $\underline{X}_k$ d'ordre k, vérifie la relation de dépendance correspondante :

PLRD($\underline{X}_k/\underline{Y}$), PRRD($\underline{X}_k/\underline{Y}$), PLQD($\underline{X}_k$), PRQD($\underline{X}_k$) .

Proposition 2 : [2]

Etant donné une variable aléatoire réelle X, si le vecteur aléatoire réel $\underline{Y}$ vérifie les deux relations de dépendance suivantes : A($\underline{Y}$) et PRD(X/$\underline{Y}$), alors, le vecteur aléatoire (X,$\underline{Y}$) vérifie la relation d'association : A(X,$\underline{Y}$).

Proposition 3 : [28]

Si les m ($m \in N^*$, $m > 1$) variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont associées, alors, elles vérifient la relation de dépendance de quadrant positive : PQD($X_1, X_2, \ldots, X_m$).

Remarque : Si ces trois relations de dépendance sont bien distinctes (cf. contre-exemples [27] [28] [38]) il est à noter les deux cas particuliers suivants ; dès qu'elles sont définies entre :

(i) deux variables aléatoires binaires X et Y [28],

(ii) ou deux variables aléatoires réelles X et Y admettant une loi de LAPLACE-GAUSS bidimensionnelle comme loi de probabilité conjointe (cf. paragraphe B-V-2) [2]

ces trois relations de dépendance sont équivalentes à la relation de dépendance positive bien connue :

$$\mathrm{PRD}(X/Y) \Leftrightarrow \mathrm{PQD}(X,Y) \Leftrightarrow A(X,Y) \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0 .$$

## IV. REPRESENTATION LOGIQUES DES SYSTEMES

En négligeant certains types de modèles logiques (tables de vérité, par exemple) d'importance moindre car de lourdeur vite excessive, il nous a paru fondamental, en conclusion de ce chapitre, d'évoquer les trois représentations logiques les plus usitées d'un système. Celles-ci jointes aux caractéristiques stochastiques du système étudié constituent la base indispensable à tout modèle mathématique d'étude de fiabilité ou de disponibilité. Afin de préciser le rôle de certains de ses éléments sur le comportement d'un système, on pourra effectuer préalablement une analyse des modes de défaillances et de leurs effets [32].

### IV-1 Le Diagramme de Fiabilité

"Le diagramme de fiabilité ("Reliability block diagramm") est un graphe sans circuit admettant une entrée et une sortie dont les sommets représentent les éléments du système et dont les arcs traduisent les relations entre les différents éléments" [32].

Une telle représentation logique permet de tenir compte de certains types de dépendances entre les éléments d'un système par le rajoût de blocs dits fictifs (Cf. [32] -exemples-type de représentations logiques de systèmes à l'aide du diagramme de fiabilité).

### IV-2 Les Arbres d'Evènements

Aux états de panne d'un système binaire cohérent, de ses sous-systèmes et de ses éléments, on associe les notions d'évènement-sommet, intermédiaires et fondamentaux, respectivement. L'arbre des fautes est alors un graphe orienté sans circuit qui décrit la répercussion sur le système des évènements fondamentaux ("primary events") en définissant à l'aide des portes logiques ("logic gates") des évènements intermédiaires ("resultant events") au fur et à mesure des niveaux de l'arbre jusqu'à la reconstitution de l'évènement-sommet ("top event").

Outre les portes logiques simples "ET", "OU", "Combinaison logique k/m", celles dites "complexes" permettent de décrire de manière fidèle la logique des systèmes binaires cohérents (Cf. [32] exemples).

Les arbres logiques décrivant les systèmes binaires non cohérents utilisent les mêmes symboles logiques mais comprennent des évènements fondamentaux et intermédiaires qui peuvent correspondre aussi bien à des états de pannes qu'à des états de fonctionnement.

Les méthodes actuelles [15] [29] tentent progressivement de construire et d'analyser les arbres d'événements de manière automatique, à l'aide d'un calculateur.

IV-3 Le Graphe des Etats

Modèle descriptif de la logique de certains systèmes formés d'éléments dépendants, le graphe des états noté $G = (S,A)$ est défini par la donnée :

- des sommets $i \in S$ correspondant aux états du système.

- des arcs $(i,j) \in A$ valués à l'aide de taux (ou de probabilités) de transition non nuls entre les divers états $i$ et $j$ du système.

L'étude de la "fiabilité" d'un système peut être grandement facilitée par la détermination d'une décomposition judicieuse de celui-ci en sous-systèmes puis par le choix de la représentation logique la plus appropriée pour chacun d'eux et pour le système complet.

* *
*

# CHAPITRE B

# QUELQUES DEPENDANCES ENTRE PROCESSUS STOCHASTIQUES

## I. INTRODUCTION

Ainsi qu'en témoigne tout traité général de fiabilité [ 1 ] [32 ], la modélisation des systèmes de sûreté constitue une application, désormais classique, de la théorie des processus de Markov. De tels processus stochastiques permettent d'éviter, sous certaines hypothèses, les calculs longs et les résultats souvent peu précis des méthodes dites de simulation [32]. Cependant, la complexité des modèles augmente très rapidement avec le nombre des éléments des systèmes et des interactions entre les divers phénomènes auxquels ils sont soumis ; à titre d'exemple, un système formé de 12 éléments binaires présente 4096 états distincts ! Dans de tels cas, il est très pénible et même souvent humainement irréalisable de construire le graphe des états et surtout la "matrice de transition" associée sans une systématisation préalable de la méthode. Il semble donc raisonnable pour surmonter de telles difficultés de choisir une partition du système étudié en divers sous-systèmes convenablement choisis selon la logique de l'ensemble. Il suffit alors de ne considérer que des graphes d'états de tailles moindres puis de déterminer la matrice de transition associée au système complet bloc par bloc et non plus terme à terme.

Ainsi, bien que nous ne traitions pas de fiabilité tout au long de ce chapitre B, celle-ci n'est nullement absente de nos motivations dans l'élaboration des modèles stochastiques proposés. La construction de ces derniers débute par la définition de quelques dépendances stochastiques simples entre chaînes puis processus de Markov. Ces définitions tiennent compte des cas où les "propriétés de Markov généralisées" cèlent des dépendances fictives ou "irréalistes" [34]. La caractéristique essentielle de tout processus aléatoire, à savoir : les lois de probabilité conjointes d'ordre n, $n \in N$ (cf. "grand théorème de Kolmogorov" [47]) étant souvent de détermination difficile, on a coutume de caractériser de larges classes de processus par les propriétés de leurs probabilités de transition. C'est donc à l'aide de cette notion d'utilisation plus aisée, que nous introduirons des dépendances stochastiques aux paragraphes III et IV. Nous étudierons alors quelques propriétés de la suite ou du processus résultant respectivement de deux chaînes ou de deux processus de Markov qui vérifient une de ces relations de dépendances. C'est dans ce but, que nous proposons préalablement au paragraphe II, quelques opérations matricielles inspirées du produit de Kronecker. Leurs définitions seront dûment complétées par une liste de propriétés qui ne prétendent nullement à l'exhaustivité relativement aux applications ultérieurement envisageables.

D'un point de vue essentiellement probabiliste, on pourrait présenter les modèles proposés par le biais d'une généralisation de la stabilité, pour la propriété de Markov, de tout ensemble de chaînes ou de processus de Markov mutuellement indépendants. Tout à fait indifférente à de telles préoccupations est la notion de processus stochastiques associés présentée au paragraphe V. Nous complétons ainsi l'exposé des dépendances entre variables aléatoires que nous avons commencé au chapitre A précédent.

# II. QUELQUES OPERATIONS MATRICIELLES

Les études concernant les systèmes d'équations linéaires tant algébriques [ 4 ] que différentielles [ 3 ] [10], la formulation des dérivées partielles de fonctions de matrices à valeurs matricielles [10] constituent les deux motivations principales de l'intérêt suscité par le produit et la somme de Kronecker. Après avoir rappelé les propriétés algébriques classiques de ces deux opérations, nous proposons et étudions quelques formes généralisées de celles-ci.

## II.1 Produit et Somme de Kronecker

### II.1.1 Notations et Définitions

Notations 1 :

$\mathcal{M}(m \times n)$ désigne l'ensemble des matrices à m lignes ($m \in N^*$) et n colonnes ($n \in N^*$). En particulier, $\mathcal{M}(m) = \mathcal{M}(m \times m)$ et $R^m = \mathcal{M}(m \times 1)$ .

Définition 1 :

On appelle matrice élémentaire ("elementary matrix" [10]) toute matrice notée $E_{ij}^{(mxn)} \in \mathcal{M}(mxn)$ et définie par : $(i,j) \in \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ ,

$$E_{ij}^{(mxn)} = \underline{e}_i^{(m)} . (\underline{e}_j^{(n)})' \quad .$$

où : $\underline{e}_i^{(m)}$ et $\underline{e}_j^{(n)}$ désignent respectivement deux vecteurs des bases canoniques respectives de $R^m$ et de $R^n$ .

Notations 2 :

Etant donné une matrice $A \in \mathcal{M}(mp \times nq)$, on distinguera les deux expressions suivantes :

. $A = ((a_{ij}))_{ij}$ définissant A à l'aide de ses m n p q termes.

. $A = [[A_{ij}]]_{ij}$ définissant A à l'aide de ses m n blocs, éléments de $\mathcal{M}(p \times q)$.

- Etant donné une matrice $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, on notera :

. pour tout $i = 1,2,\dots,m$, $A_{i.} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}^{(m \times n)}$ .

. pour tout $j = 1,2,\dots,n$, $A_{.j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} E_{ij}^{(m \times n)}$ .

Définition 2 :

On appelle produit de Kronecker de deux matrices $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ et $B \in \mathcal{M}(p \times q)$, la matrice notée $A \otimes B \in \mathcal{M}(mp \times nq)$, partitionnée en $(m.n)$ blocs, éléments de $\mathcal{M}(p \times q)$ et définie par :

$$A \otimes B = [[a_{ij} B]]_{ij} . \qquad (K0)$$

Pour tout $k \in N^*$, on notera : $A^{\otimes k}$ ; la puissance $k^{\text{ième}}$ de A au sens du produit de Kronecker.

Définition 3 :

On désigne par $U_{m \times n}$ la matrice de permutation [10], élément de $\mathcal{M}(m.n)$, définie à l'aide des matrices élémentaires de $\mathcal{M}(m \times n)$ et de $\mathcal{M}(n \times m)$ comme suit :

$$U_{m \times n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{ij}^{(m \times n)} \otimes E_{ji}^{(n \times m)} .$$

Notons que : $U_{p \times 1} = U_{1 \times p} = I_p$ .

Définition 4 :

On appelle somme de Kronecker de deux matrices $A \in \mathcal{M}(m)$ et $B \in \mathcal{M}(p)$, la matrice notée : $A \oplus B \in \mathcal{M}(mp)$, partitionnée en $m^2$ blocs, éléments de $\mathcal{M}(p)$ et définie par :

$$A \oplus B = [[a_{ij} I_p + \delta_{ij} B]]_{ij} .$$

On vérifie aisément que : $A \oplus B = A \otimes I_p + I_n \otimes B$ .

### II.1.2 Propriétés du Produit de Kronecker

(K1) Associativité : $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p \times q)$, $\forall C \in \mathcal{M}(r \times s)$,

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) .$$

(K2) Le produit de Kronecker n'est pas commutatif mais vérifie la relation suivante : $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p \times q)$,

$$B \otimes A = U_{p \times m}(A \otimes B)U_{n \times q} .$$

(K3) Distributivité à droite et à gauche :
$\forall A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall B \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall C \in \mathcal{M}(p \times q)$, $\forall D \in \mathcal{M}(p \times q)$,

$$(A+B) \otimes (C+D) = A \otimes C + B \otimes C + A \otimes D + B \otimes D .$$

(K4) Règle du produit mixte (Stephanos 1900) :
$\forall A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p \times q)$, $\forall C \in \mathcal{M}(n \times r)$, $\forall D \in \mathcal{M}(q \times s)$,

$$(A \otimes B).(C \otimes D) = (A.C) \otimes (B.D).$$

On en déduit aisément les quatre relations suivantes :

(K5) Quelles que soient les matrices : $A \in \mathcal{M}(m)$ et $B \in \mathcal{M}(p)$ régulières,

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} .$$

(K6) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$, $\forall k \in N^*$ ,

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k .$$

(K7) $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\forall B \in \mathcal{M}(n \times p)$, $\forall k \in N^*$ ,

$$(A.B)^{\otimes k} = A^{\otimes k} . B^{\otimes k} .$$

(K8) Si les deux matrices $A \in \mathcal{M}(m)$ et $C \in \mathcal{M}(m)$ et les deux matrices $B \in \mathcal{M}(p)$ et $D \in \mathcal{M}(p)$ commutent au sens des produits matriciels usuels définis sur $\mathcal{M}(m)$ et $\mathcal{M}(p)$ respectivement, alors, les matrices $(A \otimes B)$ et $(C \otimes D)$ commutent au sens du produit usuel sur $\mathcal{M}(mp)$.

(K9) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$, $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$ .

(K10) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$, $tr(A \otimes B) = tr(A).tr(B)$.

(K11) Le produit de Kronecker de deux matrices stochastiques [30] est une matrice stochastique.

(K12) Si $\lambda$ et $\mu$ désignent deux valeurs propres quelconques des matrices $A \in \mathcal{M}(m)$ et $B \in \mathcal{M}(p)$ associées aux vecteurs propres $\underline{\alpha} \in R^m$ et $\underline{\beta} \in R^p$ respectivement, alors, $(\lambda\mu)$ est valeur propre de la matrice $(A \otimes B) \in \mathcal{M}(mp)$ associée au vecteur propre $(\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}) \in R^{mp}$ .

(K13) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$,

$$\det(A \otimes B) = [\det(A)]^p [\det(B)]^m .$$

(K14) Si f désigne une fonction matricielle analytique à valeurs matricielles, alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}(m), \qquad f(A \otimes I_p) = f(A) \otimes I_p$$

$$f(I_p \otimes A) = I_p \otimes f(A).$$

(K15) Quelles que soient les fonctions définies sur R : A à valeurs dans $\mathcal{M}(m \times n)$ et B à valeurs dans $\mathcal{M}(p \times q)$, supposées dérivables,

$$\frac{d(A(t) \otimes B(t))}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \otimes B(t) + A(t) \otimes \frac{dB(t)}{dt} .$$

### II.1.3 Propriétés de la Somme de Kronecker

(KS1) Associativité : $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$, $\forall C \in \mathcal{M}(q)$,

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) .$$

(KS2) La somme de Kronecker n'est pas commutative mais vérifie la relation suivante : $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$,

$$B \oplus A = U_{pxm} (A \oplus B) U_{mxp} .$$

(KS3) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$,

. $(A \oplus B)' = A' \oplus B'$

. $tr(A \oplus B) = p.tr(A) + m\,tr(B)$ .

(KS4) Si $\lambda$ et $\mu$ désignent deux valeurs propres quelconques des matrices $A \in \mathcal{M}(m)$ et $B \in \mathcal{M}(p)$ associées aux vecteurs propres $\underline{\alpha} \in R^m$ et $\underline{\beta} \in R^p$ respectivement, alors, $(\lambda+\mu)$ est valeur propre de la matrice $(A \oplus B)$ associée au vecteur propre $\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta} \in R^{mp}$ .

Enfin, à partir des propriétés (K8) et (K14), on obtient le résultat suivant :

(KS5) $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall B \in \mathcal{M}(p)$,

$$\exp(A \oplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B) .$$

## II.2 Généralisations du Produit et de la Somme de Kronecker

### II.2.1 Préliminaires

Etant donné l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}$ (mxn), nous définissons implicitement, par la suite, les opérations usuelles telles que l'addition, la multiplication, la dérivation par rapport à un scalaire....., sur l'ensemble $[\mathcal{M}(m\times n)]^p$ des vecteurs de matrices de $\mathcal{M}$ (mxn) par analogie avec les opérations correspondantes sur les espaces vectoriels usuels isomorphes à $R^p$ . Etant donné un vecteur de

matrices $\underline{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$ , noté en abrégé :

$\underline{A} = (A_i)_{i=1,2,...,p}$ , on décrira terme à terme toute matrice-coordonnée $A_i$ , sous la forme : $A_i = ((a^i_{hk}))_{hk}$ afin d'éviter toute confusion entre les différents indices.

D'une part, nous utiliserons les propriétés de $[\mathcal{M}(m\times n)]^p$, espace vectoriel réel en tant que produit d'espaces vectoriels réels.

D'autre part, nous considérerons la multiplication externe définie par : $\forall A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall \underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$,

$$A \,.\, \underline{B} = (AB_i)_i \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p .$$

Nous utiliserons, implicitement par la suite, les propriétés de $[\mathcal{M}(m\times n)]^p$ muni de l'addition matricielle usuelle et de la multiplication externe définie précédemment, A - module bilatéral sur $\mathcal{M}(m)$ à gauche et sur $\mathcal{M}(n)$ à droite - Précisons, dès à présent, que l'introduction de l'ensemble $[\mathcal{M}(m\times n)]^p$ et non de $\mathcal{M}$ (mpxn) ne constitue nullement un exercice de style mais permet d'éviter toute ambiguité dans les formulations considérées ultérieurement.

En outre, nous serons amenés à considérer la généralisation du produit (de Shur ou) d'Hadamard [49] défini non plus terme à terme mais bloc par bloc comme suit : pour toute matrice $A = [[A_{ij}]]_{ij} \in \mathcal{M}(mpxnq)$ partitionnée en (m,n) blocs, éléments de $\mathcal{M}(pxq)$, et toute matrice $B = [[B_{ij}]]_{ij} \in \mathcal{M}(mqxnr)$ partitionnée en (mn) blocs, éléments de $\mathcal{M}(qxr)$,

$$A \circ B = [[A_{ij}.B_{ij}]]_{ij} \in \mathcal{M}(mpxnr),$$

matrice partitionnée en m n blocs, éléments de $\mathcal{M}(pxr)$, obtenus en utilisant le produit matriciel usuel entre deux matrices de $\mathcal{M}(pxq)$ et de $\mathcal{M}(qxr)$ respectivement. Nous appliquerons cette opération sur l'ensemble $[\mathcal{M}(mxn)]^p$ :

$$\forall \underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(mxn)]^p \ , \ \forall \underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(nxq)]^p \ ,$$

$$\underline{A} \circ \underline{B} = (A_i.B_i)_i \in [\mathcal{M}(mxq)]^p$$

et nous utiliserons les notions suivantes au sens du produit $\circ$ :

- la puissance $k^{\text{ième}}$ $(k \in N^*)$ d'un vecteur $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m)]^p$.

$$\underline{A}^{\circ k} = (A_i^k)_i \ .$$

- la régularité d'un vecteur de matrices $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m)]^p$ vérifiée si : chaque matrice $A_i$, $i=1,2,...,p$, est régulière; sous ces hypothèses, nous écrirons : $\underline{A}^{\circ -1} = (A_i^{-1})_i \in [\mathcal{M}(m)]^p$

La transposition d'un vecteur de matrices $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(mxn)]^p$ est définie par :

$$\underline{A}' = (A_i')_i \in [\mathcal{M}(nxm)]^p \ .$$

Nous utiliserons enfin la convention d'écriture suivante : pour tout vecteur $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(mxn)]^p$ et toute fonction matricielle $f$ : $f(\underline{A}) = (f(A_i))_i$ .

II.2.2 Définitions

Définition 1 :

(i) Etant donné deux vecteurs de matrices $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$ et $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ , nous appellerons produit de Kronecker L-généralisé : la matrice notée $(\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B}) \in \mathcal{M}(mp\times nq)$ partitionnée en (m.n) blocs, éléments de $\mathcal{M}(p\times q)$ et définie par :

$$\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} \overset{L}{\otimes} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = [[((a^h_{ij}\; b^i_{hk}))_{hk}]]_{ij} \;.$$

(ii) Etant donné deux vecteurs de matrices $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m\times n)]^q$ et $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p\times q)]^n$ , nous appellerons produit de Kronecker C-généralisé : la matrice notée $(\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B}) \in \mathcal{M}(mp\times nq)$ partitionnée en m n blocs-éléments de $\mathcal{M}(p\times q)$ et définie par :

$$\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} \overset{C}{\otimes} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = [[((a^k_{ij}\; b^j_{hk}))_{hk}]]_{ij} \;.$$

Définition 2 :

Etant donné deux vecteurs de matrices $\underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m)]^p$ et $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p)]^m$ , nous appellerons somme de Kronecker

(i) L-généralisée: la matrice notée $(\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B}) \in \mathcal{M}(mp)$ partitionnée en $m^2$ blocs, éléments de $\mathcal{M}(p)$ et définie par :

$$\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B} = [[((\delta_{hk}\; a^h_{ij} + \delta_{ij}\; b^i_{hk}))_{hk}]]_{ij} \;.$$

(ii) C-généralisée: la matrice notée $\underline{A} \overset{C}{\oplus} \underline{B} \in \mathcal{M}(mp)$ partitionnée en $m^2$ blocs, éléments de $\mathcal{M}(p)$ et définie par :

$$\underline{A} \overset{C}{\oplus} \underline{B} = [[((\delta_{hk}\; a^k_{ij} + \delta_{ij}\; b^j_{hk}))_{hk}]]_{ij} \;.$$

Remarque :

Nous utiliserons le plus souvent l'une des deux "versions intermédiaires" suivantes du produit de Kronecker L-généralisé :

$$A \overset{L}{\otimes} \underline{B} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix} \overset{L}{\otimes} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = [[((a_{ij}\; b^i_{hk}))_{hk}]]_{ij} \in \mathcal{M}(mpxnq) .$$

$$\underline{B} \overset{L}{\otimes} A = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \overset{L}{\otimes} \begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix} = [[((b^h_{ij}\; a_{hk}))_{hk}]]_{ij} \in \mathcal{M}(mpxnq) .$$

où : $A \in \mathcal{M}(mxn)$ et $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}\ (pxq)]^m$ .

Selon la relation (K'2) du paragraphe (II.2.3) suivant, ces deux versions intermédiaires ont des termes identiques à une même permutation près sur les lignes et sur les colonnes de la matrice-produit ; on définit de même : $A \overset{C}{\otimes} \underline{B}$, $A \overset{L}{\oplus} \underline{B}$ et $A \overset{C}{\oplus} \underline{B}$ . Notons que si, de plus, $\forall$ i=1,2,...,m, $B_i = B$ , alors :

$$\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B} = \underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B} = A \otimes B ,$$

produit de Kronecker simple des matrices A et B .

### II.2.3 Quelques Propriétés du Produit de Kronecker L-Généralisé

Les propriétés des deux produits de Kronecker généralisés étant analogues, nous énonçons celles relatives au produit de Kronecker L-généralisé, L'annexe XB est consacrée à la vérification des relations et propriétés suivantes :

(K'1) $\forall\ \underline{A} = (A_i)_i \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$ , $\forall\ \underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ ,

$$\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} A_{ji.} \otimes B_{ij.}.$$

(K'2) Le produit de Kronecker L-généralisé n'est évidemment pas commutatif mais vérifie la relation suivante :

$\forall\ \underline{A} \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$ , $\forall\ \underline{B} \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ ,

$$\underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{A} = U_{p\times m}(\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B})U_{n\times q} .$$

(K'3) Distributivité à droite et à gauche :

$\forall\ \underline{A} \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$, $\forall\ \underline{B} \in [\mathcal{M}(m\times n)]^p$, $\forall\ \underline{C} \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ , $\forall\ \underline{D} \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ ,

$$(\underline{A} + \underline{B}) \overset{L}{\otimes} (\underline{C} + \underline{D}) = \underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{C} + \underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{D} + \underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{C} + \underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{D} .$$

(K'4) La règle du produit mixte n'est vérifiée que partiellement par les versions intermédiaires du produit de Kronecker L-généralisé,

$\forall\ A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall\ \underline{B} \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$, $\forall\ \underline{C} \in [\mathcal{M}(q\times r)]^m$ ,

(i) $(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})(A \overset{L}{\otimes} \underline{C}) = A \overset{L}{\otimes} (\underline{B} \circ \underline{C})$ .

(ii) $(\underline{B} \overset{L}{\otimes} I_m)(\underline{C} \overset{L}{\otimes} A) = (\underline{B} \circ \underline{C}) \overset{L}{\otimes} A$ .

On en déduit aisément les deux relations suivantes :

(K'5) $\forall\ A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall\ \underline{B} \in [\mathcal{M}(p)]^m$ ,

$$\text{dét}(A \overset{L}{\otimes} \underline{B}) = \text{dét}(\underline{B} \overset{L}{\otimes} A) = [\det(A)]^p \cdot \prod_{i=1}^{m} \text{dét}(B_i)$$

(K'6) Pour toute matrice régulière $A \in \mathcal{M}(m)$ et tout vecteur de matrices régulières $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p)]^m$ ,

$$(A \overset{L}{\otimes} \underline{B})^{-1} = A^{-1} \overset{C}{\otimes} \underline{B}^{-1} .$$

(K'7) Le produit de Kronecker L-généralisé de deux vecteurs de matrices stochastiques est une matrice stochastique.

(K'8) Si f désigne une fonction analytique matricielle, alors : $\forall \underline{A} \in [\mathcal{M}(m)]^p$ ,

$$\text{(i)} \quad f(\underline{A} \overset{L}{\otimes} I_p) = f(\underline{A}) \overset{L}{\otimes} I_p .$$

$$\text{(ii)} \quad f(I_p \overset{L}{\otimes} \underline{A}) = I_p \overset{L}{\otimes} f(\underline{A}) .$$

(K'9) Pour tout couple $(\underline{A}, \underline{B})$ de fonctions définies sur R et à valeurs dans $[\mathcal{M}(m\times n)]^p$ et $[\mathcal{M}(p\times q)]^m$ respectivement et telles que les dérivées ci-dessous existent : $\forall\, t \in R^+$ ,

$$\frac{d[\underline{A}(t) \overset{L}{\otimes} \underline{B}(t)]}{dt} = \frac{d\,\underline{A}(t)}{dt} \overset{L}{\otimes} \underline{B}(t) + \underline{A}(t) \overset{L}{\otimes} \frac{d\,\underline{B}(t)}{dt} .$$

### II.2.4 Quelques Propriétés de la Somme de Kronecker L-généralisée

Des propriétés énoncées précédemment, on déduit immédiatement quelques propriétés de la somme de Kronecker L-généralisée à l'aide de la relation suivante : $\forall \underline{A} \in [\mathcal{M}(m)]^p$, $\forall \underline{B} \in [\mathcal{M}(p)]^m$,

$$\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B} = (\underline{A} \overset{L}{\otimes} I_p) + (I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B}) .$$

(KS'1) La somme de Kronecker L-généralisée n'est évidemment pas commutative mais vérifie la relation suivante :

$$\underline{B} \overset{L}{\oplus} \underline{A} = U_{p\times m} (\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B})\, U_{m\times p} .$$

KS'2) $(\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B})' = \underline{A}' \overset{L}{\oplus} \underline{B}'$ .

KS'3) $tr(\underline{A} \overset{L}{\oplus} \underline{B}) = \sum_{i=1}^{p} tr(A_i) + \sum_{i=1}^{m} tr(B_i)$ .

## III. DEPENDANCES D'ORDRE (h , k) ENTRE CHAINES DE MARKOV

### III.1 Chaînes de Markov d'ordre k

Données : Soit une suite $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans un ensemble $E_X$ supposé au plus dénombrable. On peut alors considérer :

- l'ensemble $\Omega = E_X^N$ comme l'ensemble de toutes les suites possibles d'éléments de $E_X$ .

- la tribu $\mathcal{A}$ comme la tribu complétée de celle engendrée par l' anneau $\mathcal{C}$ des ensembles-cylindres de base de dimension finie :
  $\mathcal{C} = \{\gamma = \{\{\gamma_\nu / \nu \in N\} / \gamma_\nu = i_\nu \ ; \ \nu = 1,2,\ldots,m\} / i_\nu \in E_X \ ; \ m \in N^* \}$

- la loi de probabilité P comme celle obtenue par prolongement (en vertu du théorème de Kolmogorov [16] ) de la loi de probabilité additive P définie par : $\forall \gamma \in \mathcal{C}$ ,

$$P(\gamma) = P[X_0 = i_0] \prod_{\nu=1}^{m} P[[X_\nu = i_\nu] / \bigcap_{\ell=0}^{\nu-1} [X_\ell = i_\ell]] .$$

Définition 1 :

On dit qu'une suite de variables aléatoires $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ est une chaîne de Markov d'ordre k [34] $(k \in N^*)$ et d'espace des états $E_X$ si et seulement si : $\forall n \in N$, $\forall j \in E_X$ , $\forall (i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j) \in E_X^{n+1}$ ,

$$P[X_n = j / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [X_\nu = i_\nu]] = P[X_n = j / \bigcap_{\nu=n_k}^{n-1} [X_\nu = i_\nu]] \qquad \text{(MK1)}$$

(toutes les fois que les probabilités conditionnelles ci-dessus sont bien défines) avec $n_k = \text{Sup}\{n-k, 0\}$.

Notations :

Selon le théorème d'existence [34] relatif aux chaînes de Markov multiples, on pourra caractériser chacune de celles-ci à l'aide d(e) :

- un vecteur dit des probabilités d'états initiales :

$$\underline{p}(0) = (p_i(0))_{i\in E_X}$$

- ses diverses probabilités de transition initiales d'ordre h, $h \in \{1,2,\ldots,k-1\}$,

- et ses diverses probabilités de transition d'ordre k, probabilités de transition : -que nous écrirons sous la forme :

$$\forall\, h \in \{1,2,\ldots,k\},\quad \forall (i_0,i_1,\ldots,i_h) \in E_X^{h+1}\ ,$$

$$p_{i_0 i_1 \ldots i_h}(m,m+1,\ldots,m+h-1,m+h) = P[\, X_{m+h} = i_h / \bigcap_{\nu=0}^{h-1} [\, X_{m+\nu} = i_\nu]]$$

avec : $m=0$ si : $h < k$ et $m \in N$ , si $h = k$ .

-et qui vérifient la relation suivante :

$$\sum_{i_h\in E_X} p_{i_0 i_1 \ldots i_h}(m,m+1,\ldots,m+h) = 1\ .$$

(toutes les fois qu'elles sont bien définies).

Exemple :

Dans le cas d'une chaîne de Markov d'ordre 2 [34], on pourra déterminer les probabilités $p_i(\ell)=P[\,X_\ell=i]$, $p_{ij}(\ell,m)$, $p_{ijk}(\ell,m,n)$ pour tout $(i,i,k) \in E_X^3$ et tout $(\ell,m,n) \in N^3$ tel que : $\ell \leqslant m \leqslant n$ , à partir des caractéristiques définies précédemment, en utilisant les relations suivantes aisément mises en évidence à l'aide du théorème relatif aux systèmes complets d'évènements :

$$p_{ijk}(\ell,m,n) = \sum_{h\in E_X} p_{ijh}(\ell,m,m+1)p_{jhk}(m,m+1,n)$$

$$p_{ij}(\ell,m+1)p_{ijk}(\ell,m+1,n) = \sum_{h\in E_X} p_{ih}(\ell,m)p_{ihj}(\ell,m,m+1)p_{hjk}(m,m+1,n)$$

$$p_i(m)\ p_{ij}(m,n) = \sum_{h\in E_X} p_h(\ell)p_{hi}(\ell,m)p_{hij}(\ell,m,n) \ .$$

Définition 2 :

On dit qu'une suite aléatoire $\mathcal{X} = \{X_n/n\in N\}$ à valeurs dans un ensemble $E_X$ vérifie la propriété de Markov généralisée d'ordre k ($k \in N^*$) si et seulement si :

$\forall(i_0,i_1,\ldots,i_n)\in E_X^{n+1}$, $\forall(m_0,m_1,\ldots,m_n)\in N^{n+1}/m_0< m_1<\ldots< m_n$ $(n\geq k)$

$$P[X_{m_n} = i_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [X_{m_\nu} = i_\nu]] = P[X_{m_n} = i_n / \bigcap_{\nu=n_k}^{n-1} [X_{m_\nu} = i_\nu]] \qquad \text{(MK2)}$$

Remarque :

Toute suite aléatoire $\mathcal{X}$ qui vérifie la propriété de Markov généralisée d'ordre k est une chaîne de Markov d'ordre au plus égal à k ; cependant, au contraire des chaînes de Markov simples, aucune chaîne de Markov réellement d'ordre k,k > 1, ne vérifie cette propriété ainsi que l'indique le théorème 1 [34] suivant :

Théorème 1 :

Une suite aléatoire $\mathcal{X}$ vérifie la propriété de Markov généralisée d'ordre k, $k \in N^*$ , si et seulement si : $\mathcal{X}$ est une chaîne de Markov simple.

Le théorème 2 suivant permet de compléter notre exposé des relations entre les chaînes de Markov simples et celles d'ordre supérieur à 1 :

Théorème 2 :

Etant donné une chaîne de Markov $\mathcal{X} = \{X_n/n \in N\}$ d'ordre k, $k \in N^*$, et d'espace des états $E_X$, la suite aléatoire :

$$\mathcal{Y} = \{\underline{Y}_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k-1}) / n \in N\}$$

à valeurs dans $E_Y = E_X^k$ vérifie la relation suivante : $\forall (m,n) \in N^2$ ,

$$E[f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \underline{Y}_{n+m-1}, \ldots, \underline{Y}_n) / \underline{Y}_n, \underline{Y}_{n-1}, \ldots, \underline{Y}_0] \overset{ps}{=} E[f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \ldots, \underline{Y}_n) / \underline{Y}_n]$$

pour toute fonction f mesurable bornée de $(E_Y^{m+1}, \mathcal{P}(E_Y^{m+1}))$ dans $(R, \mathcal{B}_R)$ .

<u>Démonstration</u> :

Il suffit d'effectuer un raisonnement par récurrence :

- m = 0 ; soit f une fonction mesurable bornée de $(E_Y, \mathcal{P}(E_Y))$ dans $(R, \mathcal{B}_R)$ :

$$E[f\circ \underline{Y}_n / \underline{Y}_n, \underline{Y}_{n-1}, \ldots, \underline{Y}_0] \overset{ps}{=} E[f\circ \underline{Y}_n / \underline{Y}_n] \overset{ps}{=} f\circ \underline{Y}_n \ .$$

- Supposons que le résultat soit vrai pour $m \in N$ , m arbitraire. Alors, remarquons qu'à toute variable aléatoire de la forme : $f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \underline{Y}_{n+m-1}, \ldots, \underline{Y}_n)$ avec $n \in N$ , on peut associer une fonction g mesurable bornée de $(E_X^{m+k}, \mathcal{P}(E_X^{m+k}))$ dans $(R, \mathcal{B}_R)$ et vérifiant la relation :

$$f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \underline{Y}_{n+m-1}, \ldots, \underline{Y}_{n+1}, \underline{Y}_n) \overset{ps}{=}$$

$$g\circ(X_{n+m+k-1}, X_{n+m+k-2}, \ldots, X_{n+m}, \ldots, X_{n+k-1}, \ldots, X_n)$$

On peut alors, exprimer l'hypothèse de récurrence comme suit :

$$E[f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \underline{Y}_{n+m-1}, \ldots, \underline{Y}_n) / \underline{Y}_n, \underline{Y}_{n-1}, \ldots, \underline{Y}_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[g\circ(X_{n+m+k-1}, X_{n+m+k-2}, \ldots, X_{n+m}, \ldots, X_{n+k-1}, X_{n+k-2}, \ldots, X_n) / X_{n+k-1}, \ldots, X_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[g\circ(X_{n+m+k-1}, X_{n+m+k-2}, \ldots, X_{n+m}, \ldots, X_{n+k-1}, X_{n+k-2}, \ldots, X_n) / X_{n+k-1}, \ldots, X_n] \overset{ps}{=}$$

$$E[f\circ(\underline{Y}_{n+m}, \underline{Y}_{n+m-1}, \ldots, \underline{Y}_n) / \underline{Y}_n] \ .$$

- Montrons qu'alors, le résultat est vrai à l'ordre suivant (m+1) : Soit $(n,m) \in N^2$ ; soit f une fonction mesurable bornée de $(E_Y^{m+1}, \mathcal{P}(E_Y^{m+1}))$ dans $(R,\mathcal{B}_R)$. Alors, g désigne la fonction mesurable bornée de $(E_X^{m+k-1}, \mathcal{P}(E_X^{m+k-1}))$ dans $(R,\mathcal{B}_R)$ associée à f comme exposée précédemment :

$$E[f \circ (\underline{Y}_{n+m+1},\underline{Y}_{n+m},\ldots,\underline{Y}_n)/\underline{Y}_n,\underline{Y}_{n-1},\ldots,\underline{Y}_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[g \circ (X_{n+m+k},X_{n+m+k-1},\ldots,X_{n+m+1},\ldots,X_{n+k-1},\ldots,X_{n+1},X_n)/X_{n+k-1},\ldots,X_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[E[g \circ (X_{n+m+k},\ldots,X_n)/X_{n+m+k-1},\ldots,X_0]/X_{n+k-1},\ldots,X_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[\sum_{j \in E_X} g_j \circ (X_{n+m+k-1},\ldots,X_{n+1},X_n)P[X_{n+m+k} = j/X_{n+m+k-1},\ldots,X_0]/X_{n+k-1},\ldots,X_{n+1},X_n]$$

où : $g_j$ désigne la fonction définie par :

$$\forall\, \underline{x} \in E_X^{m+k} \;,\; \forall\, j \in E_X \;,\; g_j(\underline{x}) = g(j_1,\underline{x}).$$

On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence ci-dessus, à la fonction h mesurable bornée de $(E_X^{m+k},\mathcal{P}(E_X^{m+k}))$ dans $(R,\mathcal{B}_R)$ définie par :

$$h \circ (X_{n+m+k-1},X_{n+m+k-2},\ldots,X_{n+k-1},X_{n+k-2},\ldots,X_{n+1},X_n) \overset{ps}{=}$$

$$\sum_{j \in E_X} g_j \circ (X_{n+m+k-1},X_{n+m+k-2},\ldots,X_{n+k-1},\ldots,X_{n+1},X_n)P[X_{n+m+k}=j/X_{n+m+k-1},\ldots,X_{n+1},X_n]$$

$$E[f \circ (\underline{Y}_{n+m+1},\underline{Y}_{n+m},\ldots,\underline{Y}_n)/\underline{Y}_n,\underline{Y}_{n-1},\ldots,\underline{Y}_0] \overset{ps}{=}$$

$$E[h \circ (X_{n+m+k-1},X_{n+m+k-2},\ldots,X_{n+1},X_n)/X_n,X_{n-1},\ldots,X_{n-k+1}] \overset{ps}{=}$$

$$E[f \circ (\underline{Y}_{n+m+1},\underline{Y}_{n+m},\ldots,\underline{Y}_n)/\underline{Y}_n]$$

D'où, le résultat en complétant de manière usuelle le raisonnement par récurrence.

Corollaire :

Si : $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ désigne une chaîne de Markov d'ordre k ($k \in N^*$) d'espace des états $E_X$, alors, la suite aléatoire :

$$\mathcal{Y} = \{\underline{Y}_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k-1}) / n \in N\} \text{ est une chaîne de}$$

Markov simple d'espace des états $E_Y = E_X^k$ .

Démonstration :

Ceci constitue une conséquence immédiate du théorème 2 précédent ; en effet, pour tout $n \in N^*$ , et tout $\underline{j} \in E_Y$ ,

$$P[\underline{Y}_n = \underline{j} / \underline{Y}_{n-1}, \underline{Y}_{n-2}, \ldots, \underline{Y}_0] \overset{ps}{=} E[\mathbb{1}_{\{j\}} \circ \underline{Y}_n / \underline{Y}_{n-1}, \underline{Y}_{n-2}, \ldots, \underline{Y}_0]$$
$$\overset{ps}{=} E[\mathbb{1}_{\{j\}} \circ \underline{Y}_n / \underline{Y}_{n-1}] \overset{ps}{=} P[\underline{Y}_n = \underline{j} / \underline{Y}_{n-1}] \ .$$

Remarque :

Les propriétés de Markov simple et généralisée d'ordre 1 étant équivalentes, la chaîne de Markov $\mathcal{X}$ d'ordre k, $k \in N^*$, vérifie la relation (MK2) dans le cas particulier où les k dernières dates connues sont consécutives : pour tout vecteur $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in N^n$ tel que :

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-1}+1 < \ldots < m_{n-1}+k-1 < m_n \ ,$$

et tout vecteur $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i_{0n-1}, i_{1n-1}, \ldots, i_{k-1,n-1}, i_n) \in E_X^{n+k-1}$

$$P[X_{m_n} = i_n / \bigcap_{\nu=0}^{k-1} [X_{m_{n-1}+\nu} = i_{\nu n-1}] \cap [\bigcap_{\nu=1}^{n-2} [X_{m_\nu} = i_\nu]]] = P[X_{m_n} = i_n / \bigcap_{\nu=0}^{k-1} [X_{m_{n-1}+\nu} = i_{\nu n-1}]] \ .$$

## III.2 Dépendances d'ordre (h , k) entre chaînes de Markov

### III.2.1 Définitions

Données : Soit $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_n / n \in N\}$ deux chaînes de Markov homogènes

- d'ordres respectifs $k_X$ et $k_Y$ , $(k_X,k_Y) \in N^{*2}$,

- définies sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$,

- et d'espaces des états respectifs : $E_X \subset N$ et $E_Y \subset N$.

On considère alors la suite aléatoire $\mathcal{Z} = \{\underline{Z}_n = (X_n,Y_n)/n \in N\}$ définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et à valeurs dans $(E_Z = E_X \times E_Y, \mathcal{P}(E_Z))$.

Soit $(h,k) \in N^{*2}$.

<u>Définition 1</u> :

Nous dirons que les deux chaînes de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont <u>dépendantes jusqu'à</u> :

(i) <u>l'ordre (0 , 0)</u> si et seulement si :

$$P[\underline{Z}_n = \underline{j}_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [\underline{Z}_\nu = \underline{j}_\nu]] = \qquad (DC(0\ ,\ 0))$$

$$P[X_n = j_{Xn} / \bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}]]\ P[Y_n = j_{Yn} / \bigcap_{\nu=n_{k_Y}}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y\nu}]]\ .$$

(ii) <u>l'ordre (h , 0)</u> si et seulement si :

$$P[\underline{Z}_n = \underline{j}_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [\underline{Z}_\nu = \underline{j}_\nu]] = \qquad (DC(h\ ,\ 0))$$

$$P[X_n = j_{Xn} / (\bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}]) \cap (\bigcap_{\nu=n_h}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y\nu}])]\ P[Y_n = j_{Yn} / \bigcap_{\nu=n_{k_Y}}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y\nu}]]\ .$$

(iii) <u>l'ordre (0 , k)</u> si et seulement si :

$$P[\underline{Z}_n = \underline{j}_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [\underline{Z}_\nu = \underline{j}_\nu]] = \qquad (DC(0\ ,\ k))$$

$$P[X_n = j_{Xn} / (\bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}])]\ P[Y_n = j_{Yn} / (\bigcap_{\nu=n_k}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}]) \cap (\bigcap_{\nu=n_{k_Y}}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y\nu}])]\ .$$

(iV) l'ordre (h , k) si et seulement si :

$$P[\underline{Z}_n = \underline{j}_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [\underline{Z}_\nu = \underline{j}_\nu]] = \qquad (DC(h\ ,\ k))$$

$$P[X_n = j_{Xn} / (\bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}]) \cap (\bigcap_{\nu=n_h}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y\nu}])] P[Y_n = j_{Yn} / (\bigcap_{\nu=n_k}^{n-1} [X_\nu = j_{X\nu}]) \cap (\bigcap_{\nu=n_{k_Y}}^{n-1} [Y_\nu = j_{Y_\nu}])].$$

(toutes les fois que les probabilités conditionnelles ci-dessus sont bien définies).

où : $\forall\ n \in N^*$, $\forall\ \nu \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $\underline{j}_\nu = (j_{X\nu}, j_{Y\nu}) \in E_Z$ ,
$\forall\ \ell \in \{k_X, k_Y, h, k\}$, $n_\ell = \mathrm{Sup}\ \{n-\ell, 0\}$ .

Définition 2 :

Nous dirons que deux chaînes de Markov simples $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient la relation de dépendance DC'(h , k), $(h,k) \in N^2$ , si et seulement si :

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient la relation de dépendance DC(h , k) correspondante avec des valeurs de paramètres arbitraires et non forcément consécutives dans N.

Exemple :

Les chaînes de Markov simples $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient la relation de dépendance DC'(0 , k) si et seulement si : la suite aléatoire $\mathcal{Z}$ est telle que :

$\forall\ n \in N^*$, $\forall (m_0, m_1, \ldots, m_n) \in N^{*n+1} / m_0 < m_1 < \ldots < m_n$ ,

$\forall\ \underline{i}_\nu = (i_{X\nu}, i_{Y\nu}) \in E_Z$ , $\nu = 0,1,\ldots,n$,

$$P[\underline{Z}_{m_n} = \underline{i}_n / \bigcap_{\nu=0}^{n-1} [\underline{Z}_{m_\nu} = \underline{i}_\nu]] =$$

$$P[X_{m_n} = i_{Xn} / X_{m_{n-1}} = i_{Xn-1}] . P[Y_{m_n} = i_{Yn} / [Y_{m_{n-1}} = i_{Yn-1}] \cap (\bigcap_{\nu=n_k}^{n-1} [X_{m_\nu} = i_{X\nu}])].$$

(toutes les fois que les probabilités conditionnelles ci-dessus sont bien définies).

Notons que toute relation de dépendance DC(h,k) constitue un cas particulier de la relation de dépendance DC'(h,k) correspondante, $(h,k) \in N^2$ .

Définition 3 :

Nous dirons que la relation de dépendance DC(h , k) entre deux chaînes de Markov simples $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est homogène relativement à $\mathcal{Y}$ ($h \in N^*$) si et seulement si :

$$\forall\, n \in N^*,\ \forall\, \nu \in \{0,1,2,\dots,n\},\ \underline{j}_\nu = (j_{X\nu}, j_{Y\nu}) \in E_Z\ ,\ \forall\, m \in N,$$

$$P[[X_{m+n}=j_{X_n}]/(\bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1}[X_{m+\nu}=j_{X\nu}])\cap(\bigcap_{\nu=n_h}^{n-1}[Y_{m+\nu}=j_{Y\nu}])] =$$

$$P[X_n=j_{Xn}/(\bigcap_{\nu=n_{k_X}}^{n-1}[X_\nu=j_{X\nu}])\cap(\bigcap_{\nu=n_h}^{n-1}[Y_\nu=j_{Y\nu}])].$$

On définit, de manière analogue, l'homogénéité par rapport à $\mathcal{X}$ (avec $k \in N^*$).

### III.2.2 Une Chaîne de Markov Vectorielle

Proposition 1 :

Si les chaînes de Markov $\mathcal{X} = \{X_n/n \in N\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_n/n \in N\}$ d'ordres respectifs $k_X$ et $k_Y$ ($(k_X,k_Y) \in N^{*2}$) vérifient une relation de dépendance DC(h , k), $(h,k) \in N^2$ , alors, la suite aléatoire : $\mathcal{Z} = \{\underline{Z}_n=(X_n,Y_n)/n \in N\}$ est une chaîne de Markov d'ordre Sup $\{k_X,k_Y,h,k\}$.

Démonstration :

Ceci constitue une conséquence immédiate de la définition d'une relation de dépendance DC(h , k).

Remarque :

La relation de dépendance DC(0 , 0) est équivalente à celle notée DC'(0 , 0) entre deux chaînes de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ . Mais, vérifier la relation DC(0 , 0) n'implique pas forcément l'indépendance des deux chaînes de Markov. En effet, une telle implication est vraie si et seulement si : les variables aléatoires $X_0$ et $Y_0$ rendant compte des états initiaux respectifs de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ sont indépendantes.

Proposition 2 :

Si deux chaînes de Markov simples sont dépendantes selon une relation DC'(h , k), $(h,k) \in N^2$, alors, leur relation de dépendance se réduit en fait à :

- une relation DC'(0 , 1) si : $(h,k) \in \{0\} \times N^*$
- une relation DC'(1 , 0) si : $(h,k) \in N^* \times \{0\}$
- une relation DC'(1 , 1) si : $(h,k) \in N^{*2}$ .

Démonstration :

Soient deux chaînes de Markov simples dépendantes selon une relation DC'(h , k) : $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_n / n \in N\}$ avec $h > 0$ ou $k > 0$. Alors, la suite $\mathcal{Z} = \{\underline{Z}_n = (X_n, Y_n) / n \in N\}$ est une chaîne de Markov d'ordre $K = \mathrm{Sup}\{1,h,k\}$ et vérifie la propriété de Markov généralisée d'ordre K. On obtient donc le résultat annoncé comme une conséquence directe du théorème (III.1.1).

### III.2.3 Un Choix de l'Espace des Etats $E_{\mathcal{Z}}$

Hypothèses :

Les chaînes de Markov $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_n / n \in N\}$ sont supposées simples et homogènes et vérifient une relation de dépendance DC(h , k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$ , également supposée homogène. La suite aléatoire $\mathcal{Z} = \{\underline{Z}_n = (X_n, Y_n) / n \in N\}$ est alors une chaîne de Markov simple et homogène d'espace des états $E_Z = E_X \times E_Y$ .

Notations 1 :

Pour toute valeur du paramètre $n \in N$,

. les vecteurs $\underline{p}_Z(n)$, $\underline{p}_X(n)$ et $\underline{p}_Y(n)$ désignent ceux des probabilités d'états des chaînes de Markov $\mathcal{Z}$ , $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement

. Plus généralement, pour tout $\underline{i} = (i_X, i_Y) \in E_Z$ ,

$$p_{i_X}^{i_Y}(n) = P[X_n = i_X / Y_n = i_Y] \ .$$

$$p_{i_Y}^{i_X}(n) = P[Y_n = i_Y / X_n = i_X] \ .$$

Toutes les probabilités conditionnelles ainsi mises en jeu sont supposées bien définies.

Notations 2 : Soit $n \in N^*$ .

. les matrices $P_X(n)=((p_{Xij}(n)))_{i_X,j_X \in E_X}$ , $P_Y(n)=((p_{Yij}(n)))_{i_Y,j_Y \in E_Y}$ et

$P_Z(n)=(p_{Zij}(n)))_{\underline{i}_Z,\underline{j}_Z} \in E_Z$ désignent celles des probabilités de transition en n étapes des chaînes de Markov $\mathcal{X}$ , $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ respectivement.

. Plus généralement, pour tout $\underline{i} = (i_X, i_Y) \in E_Z$ , considérons les matrices $P_X^{i_Y}(n)=((p_{Xij}^{i_Y}(n)))_{i_X,j_X \in E_X}$ et $P_Y^{i_X}(n)=((p_{Yij}^{i_X}(n)))_{i_Y,j_Y \in E_Y}$ définies respectivement par les relations suivantes :

$\forall\, m \in N$ ,

- $\forall (i_X,j_X) \in E_X^2$ , $p_{Xij}^{i_Y}(n) = P[\, X_{m+n}=j_X / \underline{Z}_m=\underline{i}]$ .

- $\forall (i_Y,j_Y) \in E_Y^2$ , $p_{Yij}^{i_X}(n) = P[\, Y_{m+n}=j_Y / \underline{Z}_m=\underline{i}]$ .

Les probabilités conditionnelles ci-dessus sont supposées bien définies.

Posons : $\underline{P}_X(n) = (P_X^{i_Y}(n))_{i_Y \in E_Y}$ et $\underline{P}_Y(n)=(P_Y^{i_X}(n))_{i_X \in E_X}$

Dans le cas particulier où : n=1, on notera $P$, $P_X$, $P_Y$, $P_X^{i_Y}$ et $P_Y^{i_X}$ respectivement les diverses matrices définies précédemment.

Nous dirons alors que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient une relation de dépendance DC(h , k) selon les vecteurs de matrices $\underline{P}_X$ et $\underline{P}_Y$ .

<u>Remarque 1</u> : Soit $n \in N^*$ et $\underline{i} = (i_X, i_Y) \in E_Z$.

On vérifie aisément que les matrices $P_X^{i_Y}$ et $P_Y^{i_X}$ sont des matrices stochastiques. Ainsi, selon le théorème d'existence relatif aux chaînes de Markov simples, aux triplets

$(E_X, \underline{p}_X^{i_Y}(0), P_X^{i_Y})$ et $(E_Y, p_Y^{i_X}(0), P_Y^{i_X})$, on peut associer les

chaînes de Markov $\mathcal{X}^{i_Y} = \{X_n^{i_Y} / n \in N\}$ et $\mathcal{Y}^{i_X} = \{Y_n^{i_X} / n \in N\}$ respectivement :

- d'espace des états $E_X^{i_Y} = E_X$ et $E_Y^{i_X} = E_Y$.
- de vecteurs de probabilité initiales : $\underline{p}_X^{i_Y}(0)$ et $\underline{p}_Y^{i_X}(0)$.
- de matrices de probabilités de transition : $P_X^{i_Y}$ et $P_Y^{i_X}$.

<u>Remarque 2</u> :

Les chaînes de Markov $\mathcal{X}^{i_Y}$ et $\mathcal{Y}^{i_X}$ définies précédemment peuvent avoir des états éphémères [19]. Par exemple, l'état $i_Y \in E_y$ peut être tel que :

$$\exists\, j_X \in E_X / p_{Xj}^{i_Y}(0) > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i_X \in E_X\,,\ p_{Xij}^{i_Y} = 0\,.$$

Si nous acceptions que certaines probabilités conditionnelles considérées précédemment puissent être indéfinies, ceci pourrait se produire, par exemple, lorsqu'il existe au moins deux états $i_X \in E_X$ et $i_Y \in E_Y$ initialement incompatibles (c'est-à-dire : l'état $\underline{i} = (i_X, i_Y) \in E_Z$ est tel que : $P[\underline{Z}_0 = \underline{i}] = 0$). Il conviendrait alors de choisir $E_X^{i_Y} \subsetneq E_X$ et $E_Y^{i_X} \subsetneq E_Y$.

<u>Notations 3</u> :

La définition de l'espace des états au plus dénombrable d'une chaîne de Markov est tout à fait arbitraire et n'a aucune influence théorique. La définition de $\mathcal{Z}$ en tant que chaîne de Markov vectorielle n'a pas d'autre utilité qu'une terminologie plus aisée.

On peut donc poser, en désignant les éléments $(i_X, i_Y) \in E_X \times E_Y$ par leur rang i selon l'ordre lexicographique [46] défini sur $E_X \times E_Y$ :

$$E_Z = \{1,2,\ldots,|E_X|.|E_Y|\}.$$

On notera : $\mathcal{Z} = \{Z_n = XY_n / n \in N\}$ la chaîne de Markov d'espace des états $E_Z$ ainsi défini.

Proposition :

Si les chaînes de Markov $\mathcal{X} = \{X_n / n \in N\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_n / n \in N\}$ vérifient la relation de dépendance DC(h , k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$, selon les vecteurs de matrices $\underline{P}_X$ et $\underline{P}_Y$, alors, la matrice $P_Z$ des probabilités de transition de la chaîne de Markov $\mathcal{Z} = \{Z_n = XY_n / n \in N\}$ est définie par : $P_Z = \underline{P}_X \overset{L}{\otimes} \underline{P}_Y$ .

Remarque 3 :

Lorsque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient une relation de dépendance DC'(h k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$, l'égalité matricielle précédente est vraie pour tout $n \in N$ :

$$P_Z(n) = \underline{P}_X(n) \overset{L}{\otimes} \underline{P}_Y(n) .$$

Les diverses matrices stochastiques définies précédemment vérifient alors la relation :

$\forall (m,n) \in N^{*2}$ , $\forall\, \underline{i} = (i_X, i_Y) \in E_X \times E_Y$ , $\forall\, \underline{j} = (j_X, j_Y) \in E_X \times E_Y$ ,

$$p_{\underline{ij}}(m+n) = \sum_{h_X \in E_X} \sum_{h_Y \in E_Y} p^{i_Y}_{Xih}(m)\, p^{i_X}_{Yih}(m)\, p^{h_Y}_{Xhj}(n)\, p^{h_X}_{Xhj}(n) = p^{i_X}_{Xij}(m+n)\, p^{i_Y}_{Yij}(m+n) .$$

Dans le cas particulier d'une dépendance DC(0 , 0), $\underline{P}_X = P_X$ et $\underline{P}_Y = P_Y$ . On retrouve ainsi l'équivalence entre les relations de dépendances DC(0 , 0) et DC'(0 , 0) : pour tout $n \in N$ ,

$$P_Z(n) = P_X(n) \otimes P_Y(n) = (P_X \otimes P_Y)^n .$$

La classification des états de la chaîne de Markov $\mathcal{Z}$ à partir de celles des chaînes de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est alors immédiate. Il ne semble guère en être de même dans tous les autres cas de dépendances présentés ci-dessus.

# IV. DEPENDANCES D'ORDRE (h k) ENTRE PROCESSUS DE MARKOV

## IV.1 Préliminaires

Tout en situant ceux-ci dans la théorie générale des processus stochastiques, nous soulignons les propriétés des processus de Markov [17] [19] (ou : chaînes de Markov à paramètre continu [16]) directement descriptifs d'un système de "fiabilité" et nous présentons les notations retenues chaque fois que nous ferons appel à de tels processus.

Soit un processus de Markov homogène $\mathcal{Y} = \{Y(t)/ t \in R^+\}$ d'espace des états $E_Y$ au plus dénombrable et défini sur l'espace mesuré : $(\Omega \times R^+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{R^+}, P \otimes \mu)$ supposé complété ;

celui-ci peut être, en particulier, caractérisé par :

- l'ensemble $\Omega = E_Y^{R^+}$ dont on notera les éléments sous la forme : $(\omega(t))_{t\in R^+}$ .

- la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par l'anneau $\mathcal{C}$ des ensembles cylindre de base de dimension finie de $\Omega$ .

- la loi de probabilité P obtenue par extension à $(\Omega,\mathcal{A})$ de la loi de probabilité additive P définie par :

$$P[\{\omega\in\Omega/\omega(t_\nu)=i_\nu;\nu=0,1,2,\dots,m\}] = P[Y(0)=i_0] \prod_{\nu=1}^{m} P[Y(t_\nu)=i_\nu/Y(t_{\nu-1})=i_{\nu-1}] .$$

Un processus de Markov peut présenter des trajectoires très "tourmentées". Celles-ci s'avèrent le plus régulières lorsque le processus de Markov $\mathcal{Y}$ vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

(MP1) $\mathcal{Y}$ est caractérisé par une matrice de fonctions de transition de Markov $P_Y = ((P_{Yij}))_{i_Y,j_Y\in E_Y}$ standard [16] ; cette première propriété est riche de conséquences puisqu'elle assure :

- la continuité des fonctions $P_{Yij}$ sur $R^+$

- l'existence de la dérivée $Q_Y=((q_{Yij}))_{i_Y, j_Y \in E_Y}$ au point 0 de la fonction $P_Y$. Notons que les termes diagonaux, au contraire de ceux non-diagonaux, de la matrice $Q_Y$ peuvent être infinis .

- la continuité stochastique du processus $\mathcal{Y}$ sur $R^+$.

(MP2) Pour tout état $i_Y \in E_Y$, $q_{Yii}$ est fini ; en vertu de cette condition supplémentaire :

- par définition, le processus $\mathcal{Y}$ ne présente pas d'état instantané :
  $\forall i_Y \in E_Y$, $\forall (s,t) \in R^+ \times R^{+*}$ ,

  $$P[\, Y(u)=i_Y \;;\; \forall u \in ]s,s+t[\; / Y(s)=i_Y] = e^{q_{Yii}t} > 0 \;.$$

  Cette propriété s'avère vérifiée dès que l'espace des états $E_Y$ est fini.

- les fonctions d'échantillonage $(t \in R^+ \longrightarrow Y(t,\omega)$ où $\omega \in \Omega$. [16] ) sont presque - sûrement continues à droite sur $R^+$.

- la matrice $P_Y$ des fonctions de transition est continûment dérivable sur $R^+$.

(MP3) Le processus $\mathcal{Y}$ est $Q_Y$-conservatif [19] :

$$\forall i_Y \in E_Y \;,\; q_{Yii} = - \sum_{\substack{j_Y \in E_Y \\ i_Y \neq j_Y}} q_{Yij} \;.$$

Ces deux dernières propriétés s'avèrent vraies dans le cas particulier où le processus $\mathcal{Y}$ est $Q_Y$-borné :

$$\exists\, C \in R^{+*} / \forall i_Y \in E_Y, |q_{Yii}| < C \;.$$

Le vecteur des probabilités initiales $\underline{p}_Y(0)=(p_{i_Y}(0))_{i_Y \in E_Y}$ et la matrice $Q_Y$ caractérisent de manière unique un processus de Markov vérifiant les propriétés (MP1), (MP2) et (MP3). La matrice $Q_Y$ jouant un rôle essentiel dans les applications, nous présentons deux méthodes permettant de souligner théoriquement celui-ci.

($\alpha$) Une méthode Analytique [16] :

La matrice des fonctions de transition vérifiant, par définition, les équations de Chapman-Kolmogorov,

$$\forall (s,t) \in R^{+2} \;, \; P_Y(s+t) = P_Y(s).P_Y(t) \qquad \text{(CK)}$$

on obtient respectivement, par différentiation de chacun des membres de l'équation (CK) par rapport à s puis à t au point 0,

- le système du passé ("backward system" [16]) :

$$\forall\, t \in R^+, \; \frac{dP_Y(t)}{dt} = Q_Y.P_Y(t) \qquad \text{(BS)}$$

- le système du futur ("forward system" [16]) :

$$\forall\, t \in R^+, \; \frac{dP_Y(t)}{dt} = P_Y(t).Q_Y \qquad \text{(FS)}$$

Si la matrice $Q_Y$ est conservative, alors, ces deux systèmes admettent une solution unique vérifiant les conditions initiales :

$$P_Y(0) = I \quad . \qquad \text{(S0)}$$

($\beta$) Une méthode stochastique [16] [17] :

D'une part, à partir du processus de Markov $\mathcal{Y}$ , on définit les suites aléatoires $\{T_n/n \in N\}$ et $\mathcal{X} = \{X_n/n \in N\}$ à l'aide des relations respectives suivantes :

. $T_0 = 0$ et $T_n$, $n \in N^*$, désigne la durée aléatoire du séjour du processus $\mathcal{Y}$ au $(n-1)^{\text{ième}}$ état visité.

. $$X_{n+1} \overset{p.s}{=} \begin{cases} Y(\sum_{i=1}^{n+1} T_i) & \text{si : } \sum_{i=1}^{n+1} T_i < +\infty \\ X_n & \text{si : } \sum_{i=1}^{n+1} T_i = +\infty \end{cases} .$$

Toute variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} T_i$, $n\in N^*$, constituant un temps d'arrêt du processus de Markov $\mathcal{Y}$, la loi de probabilité conjointe de tout couple $(X_n, \sum_{i=1}^{n} T_i)$, $n\in N^*$, est définie par :

$\forall j_Y\in E_Y$, $\forall t\in R^+$,

$$P[(X_{n+1}=j_Y)\cap(\sum_{i=1}^{n+1} T_i > t)/X_n,T_n,X_{n-1},T_{n-1},\dots,X_0,T_0] = r_{Y X_n j}\, e^{q_{Y X_n X_n} t}$$

où la matrice $R_Y=((r_{Y_{ij}}))_{i_Y,j_Y\in E_Y}$ désigne la matrice stochastique telle que :

$\forall(i_Y,j_Y)\in E_Y^2$, $i_Y\neq j_Y$, $q_{Y_{ij}} = -q_{Y_{ii}}\, r_{Y_{ij}}$ .

$$\forall i_Y\in E_Y,\ r_{Y_{ii}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_Y \text{ est un état absorbant } (q_{Y_{ii}} = 0) \\ 0 & \text{si } i_Y \text{ est un état stable } (q_{Y_{ii}} \in ]-\infty,0[ \ . \end{cases}$$

En posant t=0, dans la relation précédente, on découvre aisément que la suite aléatoire $\mathcal{X} = \{X_n/n\in N\}$ est une chaîne de Markov homogène d'espace des états $E_Y$, de vecteur des probabilités initiales $\underline{p}_Y(0)$ et de matrice de probabilités de transition $R_Y$.

D'autre part, si : $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n \overset{ps}{=} +\infty$, alors, la suite aléatoire $\{T_n/n\in N\}$ et la chaîne de Markov sous-jacente $\mathcal{X}$ ("embedded Markov Chain" [17]), et donc le vecteur des probabilités initiales $\underline{p}_Y(0)$ et la matrice $Q_Y$, définissent parfaitement le processus de Markov $\mathcal{Y}$. En décomposant l'évènement conditionné figurant dans les probabilités de transition $p_{Y_{ij}}(t)$, $t\in R^+$, sous la forme

$$[Y(t)=j_Y]=[Y(t)=j_Y]\cap([T_1 < t]\cup[T_1 \geqslant t])$$

on montre que les matrices $P_Y$ et $Q_Y$ vérifient la relation :

$\forall(i_Y,j_Y)\in E_Y^2$,

$$p_{Y_{ij}}(t) = \delta_{i_Y j_Y}\, e^{q_{Y_{ii}} t} + \int_0^t e^{q_{Y_{ii}} s} \sum_{\substack{h_Y\in E_Y \\ h_Y\neq i_Y}} q_{Y_{ih}}\, p_{Y_{hj}}(t-s)ds \ .$$

La matrice $P_Y=((p_{Y_{ij}}))_{i_Y j_Y}$ est bien solution des systèmes (BS) et (FS) et vérifie les conditions initiales (S0). Cette méthode constitue un cas particulier de celle qui permet, sous des hypothèses analogues de mettre en évidence la chaîne de Markov associée à des processus plus généraux [45].

Presque toutes les fonctions d'échantillonnage du processus ainsi défini étant des fonctions étagées sur $R^+$, on dit parfois que $\mathcal{Y}$ est un "processus de Markov régulier" [17] et que la suite $\mathcal{X}$ est la chaîne de Markov des sauts de $\mathcal{Y}$ ("jump Markov chain" [16]). En particulier, tout processus de Markov $\mathcal{Y}$ $Q_Y$-borné est forcément régulier.

Si un système de "fiabilité" est directement descriptible à l'aide d'un processus de Markov $\mathcal{Y}$ (on dit parfois qu'un tel système a une "structure de Markov" [ 1 ]), alors, $\mathcal{Y}$ vérifie les propriétés (MP1), (MP2) et (MP3). En effet, un système de fiabilité est généralement défini (cf. chapitre A) comme un ensemble fini d'éléments pouvant présenter chacun un nombre fini d'états.

## IV.2 Dépendances d'Ordre (h , k) entre Processus de Markov

La version en temps continu de la propriété de Markov d'ordre k étant équivalente, sous des "hypothèses réalistes" [34] à celle dite simple, les relations de dépendance DP(h , k) entre processus de Markov seront présentées seulement pour tout couple $(h,k) \in \{0,1\}^2$.

### IV.2.1 Définitions

Données : Soient deux processus de Markov homogènes $\mathcal{X} = \{X(t)/t\in R^+\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y(t)/t\in R^+\}$ d'espaces des états respectifs $E_X$ et $E_Y$ supposés au plus dénombrables. Soit le processus stochastique $\mathcal{Z} = \{\underline{Z}(t)=(X(t),Y(t))/t\in R^+\}$ à valeurs dans $E_X \times E_Y$ .

Définition 1 :

Nous dirons que les deux processus de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont dépendants jusqu'à :

(i) l'ordre (0 , 0) si et seulement si :

$$P[\underline{Z}(t_{n+1})=\underline{i}_{n+1}/\bigcap_{\nu=0}^{n}[\underline{Z}(t_\nu)=\underline{i}_\nu]] = \qquad (DP(0\ ,\ 0))$$

$$P[X(t_{n+1})=i_{Xn+1}/X(t_n)=i_{Xn}]\ P[Y(t_{n+1})=i_{Yn+1}/Y(t_n)=i_{Yn}]$$

(ii) l'ordre (1 , 0) si et seulement si :

$$P[Z(t_{n+1})=\underline{i}_{n+1}/\bigcap_{\nu=0}^{n}[\underline{Z}(t_\nu)=\underline{i}_\nu]] = \qquad (DP(1\ ,\ 0))$$

$$P[X(t_{n+1})=i_{Xn+1}/\underline{Z}(t_n)=\underline{i}_n].P[Y(t_{n+1})=i_{Yn+1}/Y(t_n)=i_{Yn}]$$

(iii) l'ordre (0 , 1) si et seulement si :

$$P[\underline{Z}(t_{n+1})=\underline{i}_{n+1}/\bigcap_{\nu=0}^{n}[\underline{Z}(t_\nu)=\underline{i}_\nu]] = \qquad (DP(U\ ,\ 1))$$

$$P[X(t_{n+1})=i_{Xn+1}/X_n = i_{Xn}].P[Y(t_{n+1})=i_{Yn+1}/\underline{Z}(t_n)=\underline{i}_n]$$

(IV) l'ordre (1 , 1) si et seulement si :

$$P[\underline{Z}(t_{n+1})=\underline{i}_{n+1}/\bigcap_{\nu=0}^{n}[\underline{Z}(t_n)=i_\nu]] = \qquad (DP(1\ ,\ 1))$$

$$P[X(t_{n+1})=i_{Xn+1}/\underline{Z}(t_n)=\underline{i}_n]P[Y(t_{n+1})=i_{Yn+1}/\underline{Z}(t_n)=\underline{i}_n]$$

(toutes les fois que les probabilités conditionnelles ci-dessus sont bien définies)
pour tout $n \in N$, tout vecteur $\underline{i}_\nu=(i_{X\nu},i_{Y\nu})\in E_X \times E_Y$ , $\nu=1,2,\ldots,n$. et tout vecteur $(t_\nu)_\nu \in R^{+(n+2)}$ tel que $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$ .

Définition 2 :

Nous dirons que la relation de dépendance DP(h , k) entre les deux processus de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est homogène relativement à $\mathcal{X}$ (respectivement : $\mathcal{Y}$ ) si et seulement si :

$\forall (s,t) \in R^{+2}$, $\forall j_X \in E_X$ ,

$$P[X(t+s)=j_X/\underline{Z}(s)] \overset{ps}{=} P[X(t)=j_X/\underline{Z}(0)]$$

(respectivement : $\forall\ j_Y \in E_Y$ ,

$$P[Y(t+s)=j_Y/\underline{Z}(s)] \overset{ps}{=} P[Y(t)=j_Y/\underline{Z}(0)]\ ).$$

Remarque :

De même que dans le cas d'un paramètre discret, la relation de dépendance DP(0 , 0) n'est pas équivalente à l'indépendance stochastique. Celle-ci est vérifiée si et seulement si : les processus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient la relation de dépendance DP(0 , 0) et si les variables d'états initiales X(0) et Y(0) sont mutuellement indépendantes.

### IV.2.2 Etude du Processus Stochastique $\mathcal{Z}$

Proposition 1 :

Si deux processus de Markov homogènes $\mathcal{X} = \{X(t)/t \in R^+\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y(t)/t \in R^+\}$ sont dépendants selon une relation de dépendance (homogène) DP(h , k), $(h,k) \in \{0,1\}^2$ , alors, le processus stochastique :

$\mathcal{Z} = \{\underline{Z}(t) = (X(t), Y(t))/t \in R^+\}$ forme un processus de

Markov (homogène) d'espace des états $E_X \times E_Y$ .

Démonstration :

Ce résultat constitue une conséquence immédiate de la définition IV-1-1. Nous poursuivons l'étude du processus de Markov $\mathcal{Z}$ sous l'hypothèse de l'homogénéité.

Notations :

Nous désignons dorénavant les éléments $(i_X, i_Y) \in E_X \times E_Y$ par leur rang $i_Z \in E_Z$ selon l'ordre lexicographique défini sur $E_X \times E_Y$; l'ensemble $E_Z = \{1,2,...,|E_X|.|E_Y|\}$ désigne alors l'espace supposé minimal des états du processus $\mathcal{Z} = \{Z(t)=XY(t)/t \in R^+\}$. Ainsi :

$\forall\ t \in R^+\ ,\ \forall\ (i_X, i_Y) \in E_X \times E_Y,\ [Z(t)=i_Z] = [[X(t)=i_X] \cap [Y(t)=i_Y]]$

$\Leftrightarrow i_Z \equiv i_Y \pmod{|E_Y|}$ avec $i_Z - i_Y = i_X \cdot |E_Y|$ .

En rassemblant les versions en temps continu des notations III.2.1, 2 et 3 :

. les vecteurs $\underline{p}_X = (p_{i_X})_{i_X \in E_X}$ , $\underline{p}_Y = (p_{i_Y})_{i_Y \in E_Y}$

et $\underline{p}_Z = (p_{i_Z})_{i_Z \in E_Z}$ désignent les fonctions des probabilités

d'états des processus $\mathcal{X}$ , $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ respectivement.

. les matrices de fonctions de transition $P_X = ((p_{Xij}))_{i_X j_X \in E_X}$,

$P_Y = ((p_{Yij}))_{i_Y j_Y \in E_Y}$ $P_Z = ((p_{Zij}))_{i_Z j_Z \in E_Z}$ et les fonc-

tions matricielles $P_X^{i_Y} = ((p_{Xij}^{i_Y}))_{i_X j_X \in E_X}$ , $i_Y \in E_Y$ ,

$P_Y^{i_X} = ((p_{Yij}^{i_X}))_{i_Y j_Y \in E_Y}$ , $i_X \in E_X$ , vérifient en particulier

les relations suivantes : $\forall\ (s,t) \in R^{+2}$ , $\forall\ (i_Z, j_Z) \in E_Z^2$ ,

$$(\alpha)\quad p_{Xij}^{i_Y}(t) = \sum_{j_Y \in E_Y} p_{Zij}(t)$$

$$(\beta)\quad p_{Yij}^{i_X}(t) = \sum_{j_X \in E_X} p_{Zij}(t)$$

$$(\gamma)\quad p_{Xij}(t) = \sum_{i_Y \in E_Y} p_{i_Y}^{i_X}(s)\ p_{Xij}^{i_Y}(t)$$

$$(\delta)\quad p_{Yij}(t) = \sum_{i_X \in E_X} p_{i_X}^{i_Y}(s)\ p_{Y\,ij}^{i_X}(t)$$

Toutes les probabilités conditionnelles ainsi mises en jeu sont supposées bien définies.

Proposition 2 :

Si deux processus de Markov homogènes $\mathcal{X} = \{X(t)/t \in R^+\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y(t)/t \in R^+\}$ vérifient une relation de dépendance homogène $DP(h\ ,\ k)$, $(h,k) \in \{0,1\}^2$, selon les vecteurs de fonctions matricielles $\underline{P}_X = (P_X^{i_Y})_{i_Y \in E_Y}$ et $\underline{P}_Y = (P_Y^{i_X})_{i_X \in E_X}$, alors, la matrice $P_Z$ des fonctions de transition du processus de Markov $\mathcal{Z} = \{Z(t) = XY(t)/t \in R^+\}$ est définie par la relation suivante :

$$P_Z = \underline{P}_X \overset{L}{\otimes} \underline{P}_Y$$

De plus, si la fonction $P_Z$ est une matrice de fonctions de transition standard, alors les matrices $P_X$ et $P_Y$ des fonctions de transition des processus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement sont elles-mêmes standards.

Démonstration :

L'expression de la fonction matricielle $P_Z$ est immédiate :

$$P_Z = [[\,((p_{Xij}^{h_Y} \cdot p_{Yhk}^{i_X}))_{h_Y,k_Y \in E_Y}\,]]_{i_X,j_X \in E_X}$$

- D'une part, supposons que la matrice des fonctions de transition $P_Z$ est standard. Les processus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ jouant des rôles symétriques, montrons, par exemple, que la fonction matricielle $P_X$ vérifie forcément cette même propriété ; soit $i_Z \in E_Z$ ; il suffit d'appliquer le lemme de FATOU :

  - selon la relation $(\alpha)$ :

$$1 \geqslant \varliminf_{t \to 0^+} p_{Xii}^{i_Y}(t) \geqslant \sum_{j_Y \in E_Y} \lim_{t \to 0^+} p_{Zij}(t) = \sum_{j_Y \in E_Y} \delta_{i_Y j_Y} = 1 .$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} p_{Xii}^{i_Y}(t) = 1$$

  - selon la relation $(\gamma)$ :

$$1 \geqslant \underline{\lim}_{t \to 0^+} p_{Xii}(t) \geqslant \sum_{i_Y \in E_Y} p_{i_Y}^{i_X}(0) \lim_{t \to 0^+} p_{Xii}^{i_Y}(t) = \sum_{i_Y \in E_Y} p_{i_Y}^{i_X}(0) = 1 .$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} P_X(t) = I_{|E_X|} .$$

A défaut de condition réciproque dans le cas dénombrable,nous considérons dorénavant des processus de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ tels que $P_Z$ soit une matrice standard de fonctions de transition.

Proposition 3 :

Sous les mêmes hypothèses que la proposition 2 précédente, si les vecteurs de fonctions matricielles $\underline{P}_X$ et $\underline{P}_Y$ sont supposés dérivables à droite au point 0, $\underline{Q}_X = \left(\left[\frac{d\, P_X^{i_Y}(t)}{dt}\right]_{t=0}\right)_{i_Y \in E_Y}$ et

$\underline{Q}_Y = \left(\left[\frac{d\, P_Y^{i_X}(t)}{dt}\right]_{t=0}\right)_{i_X \in E_X}$ , alors : la matrice $Q_Z$ des générateurs

infinitéssimaux du processus de Markov $\mathcal{Z}$ est définie par :

$$Q_Z = \underline{Q}_X \overset{L}{\oplus} \underline{Q}_Y$$

De plus, si le processus de Markov $\mathcal{Z}$ est $Q_Z$-conservatif, alors, les processus de Markov $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont eux-mêmes

$$Q_X = \left[\frac{d\, P_X(t)}{dt}\right]_{t=0} \text{ - et } \quad Q_Y = \left[\frac{d\, P_Y(t)}{dt}\right]_{t=0} \text{ -conservatifs.}$$

Démonstration :

L'expression de la matrice $Q_Z$ s'écrit, de manière immédiate, à l'aide de la proposition 2 précédente et de la relation II.2.($K_9'$). Supposons que le processus de Markov $\mathcal{Z}$ est $Q_Z$-conservatif. Montrons par exemple, que le processus de Markov $\mathcal{X}$ est $Q_X$-conservatif ; il suffit, ici encore, d'appliquer le lemme de FATOU selon les relations ($\alpha$) et ($\gamma$) :

- D'une part : $\forall\ (i_X, i_Y) \in E_X \times E_Y$ , $\sum_{j_X \in E_X} q_{Xij}^{i_Y} = 0$ .

En effet : $0 \geq \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xii}^{i_Y}(t)-1}{t} + \sum_{\substack{j_X \in E_X \\ j_X \neq i_X}} \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xij}^{i_Y}(t)}{t} \geq \sum_{j_Z \in E_Z} q_{Zij}$ .

- D'autre part : $\forall\ i_X \in E_X$ , $\sum_{j_X \in E_X} q_{Xij} = 0$ .

En effet, posons : $L = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xii}(t)-1}{t} + \sum_{j_X \in E_X} \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xij}(t)}{t}$

Si L ainsi défini existe, alors, L vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \geq L \geq \sum_{i_Y \in E_Y} p_{i_Y}^{i_X}(0) \left[\lim_{t \to 0^+} \frac{p_{Xii}^{i_Y}(t)-1}{t} + \sum_{j_X \in E_X} \lim_{t \to 0^+} \frac{p_{Xij}^{i_Y}(t)}{t}\right]$$

D'où, l'existence de L et L = 0 .

De plus, $L \leq \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xii}(t)-1}{t} + \sum_{j_X \in E_X} \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{Xij}(t)}{t} \leq 0$ .

D'où le résultat.

## V. PROCESSUS STOCHASTIQUES ASSOCIES

L'objet de ce paragraphe est de compléter, en termes de processus stochastiques, l'exposé des diverses notions de dépendances positives entre variables aléatoires présentées au chapitre A. Nous respecterons les notations introduites lors de ce dernier.

## V.1 Définitions

Définition 1 :

On dit qu'une fonction f de $R^2$ dans R est totalement positive d'ordre 2 ("totally positive of order two" [2]—en abrégé : de type $TP_2$) sur $R^2$ si et seulement si :

(i) $\forall (x,y) \in R^2 , f(x,y) \geqslant 0$

(ii) $\forall (x,y) \in R^2 , \forall (x',y') \in R^2 / x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$ ,

$$f(x,y)f(x',y') \geqslant f(x,y')f(x',y).$$

Définition 2 :

On dit qu'un processus $\underline{\mathcal{X}} = \{\underline{X}(t)/t \in R^+\}$

(i) à valeurs dans $(R^n, \mathcal{B}_{R^n})$, $n \in N^*$, est séquentiellement associé sur I ("time associated" [26]) si et seulement si :

$\forall m \in N^*, \forall (t_i)_i \in I^m , A(\underline{X}(t_1), \underline{X}(t_2),\dots,\underline{X}(t_m)).$

(ii) à valeurs dans $(R, \mathcal{B}_R)$, vérifie la relation de dépendance de régression séquentielle positive [2] sur I si et seulement si :

$\forall m \in N^* : m > 1, \forall (t_i)_i \in I^m : t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,

$$PRD(X(t_m)/X(t_{m-1}),\dots,X(t_2),X(t_1))$$

où I désigne une partie non vide de $R^+$ .

Définition 3 :

On dit que n processus stochastiques réels : $\mathcal{X}_i = \{X_i(t)/t \in R^+\}$, $i=1,2,..,n$, sont :

(i) associés entre eux si et seulement si :

$\forall t \in R^+ , A(X_1(t),X_2(t),\dots,X_n(t)).$

(ii) <u>dépendants selon une relation de dépendance de quadrant positive</u> si et seulement si :

$$\forall\ t \in R^{+}\ ,\ PQD(X_1(t),\ X_2(t),\ldots,X_n(t)).$$

<u>Remarque</u> :

Si n processus stochastiques sont associés entre eux, alors, ils sont dépendants selon une relation de dépendance de quadrant positive (Cf. proposition A.III.3.3).

<u>Application</u> : Si un vecteur aléatoire $\underline{X}$ suit une loi de Laplace-Gauss $N_m(\underline{\mu},\Gamma)$ de vecteur moyenne $\underline{\mu}$, $\underline{\mu} \in R^m$ , et de matrice de covariances $\Gamma_X$ , $\Gamma_X \in \mathcal{M}(m)$, telle que tout terme non-diagonal de la matrice inverse $\Gamma_X^{-1}$ soit négatif, alors toute application partielle d'ordre 2 est une application de type TP2 et les variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots,X_m$ vérifient la relation d'association [2]. D'où, le cas particulier évoqué au paragraphe A-III-3-3.

V.2 <u>Processus de Markov Associés</u>

Les deux résultats suivants constituent des conséquences immédiates du critère A.III.2.(A03) de l'association et de la proposition A.III.3.2 respectivement.

<u>Proposition</u> : [26]

Les variables aléatoires réelles positives $T_1,T_2,\ldots,T_n$ sont associées si et seulement si le processus stochastique : $\{(1_{]t\ ,+\infty[} \circ T_i)_i\ /t \in R^{+}\}$ est séquentiellement associé.

<u>Théorème 1</u> [2] :

Tout processus stochastique qui vérifie la relation de dépendance de régression séquentielle positive sur I est séquentiellement associé sur I , $I \subset R^{+}$ .

Théorème 2 [2] :

Etant donné un processus stochastique réel $\mathcal{X} = \{X(t)/t \in R^+\}$, si pour tout $n \in N^*$, $n > 1$, et tout vecteur $(t_i)_i \in R^{+n}$ les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ admettent une densité de probabilité conjointe dont toute application partielle d'ordre 2 est de type $TP_2$ , alors, le processus $\mathcal{X}$ vérifie la relation de régression séquentielle positive sur $R^+$ .

Corollaire [2] :

Si un processus de Markov $\mathcal{X} = \{X(t)/t \in R^+\}$ d'espace des états $E_X$ a des probabilités de transition telles que : pour tout $t \in R^+$ , l'application définie par :

$$(i,j) \in E_X^2 \longmapsto p_{Xij}(t) = P[X(t)=j/X(0)=i]$$

est de type $TP_2$ sur $E^2$, alors, le processus $\mathcal{X}$ est séquentiellement associé sur $R^+$ .

En effet : $\forall (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in R^{+n}/t_1<t_2<\ldots<t_n$ ; $\forall (i_1,i_2,\ldots,i_n) \in E_X^n$ ,

$$P\left[\bigcap_{\nu=1}^{n} [X(t_\nu)=i_\nu]\right] = P[X(t_1)=i_1] \prod_{\nu=2}^{n} P[X(t_\nu)=i_\nu/X(t_{\nu-1})=i_{\nu-1}].$$

Le produit de deux fonctions de type $TP_2$ étant une fonction de type $TP_2$ , on déduit aisément le résultat annoncé des théorèmes 1 et 2 précédents.

Exemple :

Un processus de Markov homogène d'espace des états $E_X = \{0,1\}$ est séquentiellement associé si ses probabilités de transition vérifient la relation suivante : $\forall\, t \in R^+$ , $p_{01}(t) + p_{10}(t) \leqslant 1$ . Ainsi, tout processus de vie et de mort [19] à deux états est séquentiellement associé.

## Annexe XA : (cf. chapitre A-§II)

### Vérification du théorème A-II-2-2

Données : Soit un système N-performant cohérent $(C,\Phi)$ d'ordre n. Soit M une partie propre non vide de C et essentielle au système $(C,\Phi)$.

Condition Nécessaire : Supposons que M constitue un sous-ensemble modulaire du système cohérent $(C,\Phi)$ dont le module $(M,\mu)$ correspondant est défini par la relation A-II-2-(M1) :

$$\forall\ \underline{x} \in S^n \ , \quad \Phi(\underline{x}) = \psi(\mu(\underline{x}_M),\ \underline{x}_{\overline{M}})$$

Soit : $\underline{x}_M \in S_M$ tel que : $\mu(\underline{x}_M) = j$ où $j \in S$ .

$$\Rightarrow \forall\ \underline{x}_{\overline{M}} \in S_{\overline{M}} \ , \ \Phi(\underline{x}_M,\underline{x}_{\overline{M}}) = \psi(\mu(\underline{x}_M),\ \underline{x}_{\overline{M}}) = \psi(j_1,\underline{x}_{\overline{M}}) \ .$$

$$\Rightarrow \forall\ \underline{x}_{\overline{M}} \in S_{\overline{M}} \ , \ \Phi(\underline{x}_M,\underline{x}_{\overline{M}}) = \psi(\mu(\underline{j}_M),\ \underline{x}_{\overline{M}}) = \Phi(\underline{j}_M,\underline{x}_{\overline{M}}) \ .$$

car le système cohérent $(M,\mu)$ vérifie, en particulier l'axiome A-II-2-(C2). Ainsi, selon la définition de la relation d'équivalence "$=_\Phi$", le module $(M,\mu)$ vérifie la relation A-II-2-(M4).

<u>Condition Suffisante</u> : Supposons que le sous-ensemble M de C soit tel que :

$$\forall\ \underline{x}_M \in S_M, \quad \exists\, j \in S_M : \underline{x}_M = {}_{\Phi}\underline{j}_M .$$

(i) Considérons le système multiperformant $(M,\mu)$ défini par :

$$\forall\ \underline{x}_M \in S_M , \quad \mu(\underline{x}_M) = j \qquad \text{si} : \underline{x}_M = {}_{\Phi}\underline{j}_M \quad \text{où} \quad j \in S .$$

Notons que M étant une partie essentielle au système $(C,\Phi)$, on définit bien ainsi une application $\mu$ de $S_M$ dans S. Celle-ci est, de plus, non décroissante de $S_M$ dans S.

En effet, raisonnement par l'absurde :

Supposons que : $\exists\ \underline{x}_M \in S_M, \quad \exists\ \underline{y}_M \in S_M$ tels que :

$$\underline{x}_M \leqslant \underline{y}_M \quad \text{et} \quad \mu(\underline{x}_M) > \mu(\underline{y}_M) .$$

Posons : $\mu(\underline{x}_M) = j$ et $\mu(\underline{y}_M) = \ell$ où $(j,\ell) \in S^2$ .

M désignant une partie essentielle au système $(C,\Phi)$, on a, en particulier

$$\underline{x}_{C\bar{M}} \in S_{\bar{M}} \text{ tel que : } \begin{cases} \Phi(\underline{j}_M, \underline{x}_{0\bar{M}}) = j . \\ \ell < j \Rightarrow (\ell_M, x_{0\bar{M}}) < j . \end{cases}$$

Or, par définition de l'application $\mu$ :

$$\underline{x}_M = {}_{\Phi}\underline{j}_M \quad \text{et} \quad \underline{y}_M = {}_{\Phi}\underline{\ell}_M .$$

D'où, en particulier :

$$\Phi(\underline{x}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) = \Phi(\underline{j}_M, \underline{x}_{0\bar{M}}) \quad \text{et} \quad \Phi(\underline{y}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) = \Phi(\underline{\ell}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) \ .$$

Ainsi, sous de telles hypothèses, on aurait :

$$(\underline{x}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) \leqslant (\underline{y}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) \quad \text{et} \quad \Phi(\underline{x}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) > \Phi(\underline{y}_M,\underline{x}_{0\bar{M}}) \ .$$

Une telle relation serait contradictoire avec la propriété de cohérence du système $(C,\Phi)$. (cf. axiome A-II-2-(C1)).

L'application $\mu$ est donc non décroissante de $S_M$ dans $S$ et vérifie, de plus, par définition, l'axiome A-II-2-(C2).

Le système $(M,\mu)$ est donc cohérent.

(ii) Considérons le système $(c',\psi)$ défini par :

$$C' = \{C_M\} \cup \bar{M}$$

et : $\forall\ \underline{x} \in S \times S_{\bar{M}}$, $\underline{x} = (\underline{j}_M, \underline{x}_{\bar{M}})$, $\psi(\underline{x}) = \Phi(\underline{j}_M, x_{\bar{M}})$ .

- D'une part : pour tout $j \in S$,

$$\psi(\underline{j}) = \Phi(\underline{j}_M,\underline{j}_{\bar{M}}) = j$$

- D'autre part : soit $\underline{x} = (j,\underline{x}_{\bar{M}}) \in S \times S_{\bar{M}}$ , $\underline{y} = (\ell,\underline{y}_{\bar{M}}) \in S \times S_{\bar{M}}$ ,

$$\underline{x} \leqslant \underline{y} \Rightarrow (\underline{j}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) \leqslant (\underline{\ell}_M, \underline{y}_{\overline{M}}) ,$$

$$\Rightarrow \Phi(\underline{j}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) \leqslant \Phi(\underline{\ell}_M, \underline{y}_{\overline{M}}) ,$$

$$\Rightarrow \psi(\underline{x}) \leqslant \psi(\underline{y}) ,$$

Ainsi, le système $(C,\Phi)$ étant cohérent, le système $(C',\psi)$ est lui-même un système cohérent.

(iii) Afin de prouver que le système cohérent $(M,\mu)$ constitue un module du système $(C,\Phi)$, il suffit de montrer que les fonctions de structure $\Phi$, $\psi$ et $\mu$ vérifient la relation A-III-2(M1):

Soit $\underline{x} \in S^n$, $\underline{x} = (\underline{x}_M, \underline{x}_{\overline{M}})$.

Par hypothèse, $\underline{x}_M \in S_M \Rightarrow \exists ! \; j \in S : \underline{x}_M = {}_{\Phi}\underline{j}_M$ .

Ainsi : $\Phi(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}_M, \underline{x}_{\overline{M}}) = \Phi(\underline{j}_M, \underline{x}_{\overline{M}})$

$= \psi(j_1, x_{\overline{M}})$ (par définition de $\psi$)

$= \psi(\mu(\underline{x}_M), \underline{x}_{\overline{M}})$ .

D'où, le résultat. On notera, de plus, que :

- l'élément $C_M$ est essentiel au système cohérent $(C',\psi)$.
- pour tout sous-ensemble modulaire M du système cohérent $(C,\Phi)$, les fonctions $\mu$ et $\psi$ correspondantes sont définies de manière unique.

Annexe XB : (cf. chapitre B-§II)

## Vérification des Diverses Propriétés des Produits de Kronecker Généralisés.

Etant donné l'analogie des deux formes généralisées, nous vérifions, de manière explicite, les propriétés du produit de Kronecker L-généralisé et mentionnons seulement celles du produit de Kronecker C-généralisé.

(K'1) s'obtient directement en décomposant ligne par ligne le produit de Kronecker L-généralisé de deux vecteurs de matrices $\underline{A} \in [\mathcal{M}(m\text{x}n)]^p$ et $\underline{B} \in [\mathcal{M}(p\text{x}q)]^m$ .

$$\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B} = \sum_{i=1}^{mp} (\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B})_{i.}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} A_{ij.} \otimes B_{ji.} \ .$$

On vérifie, de même, que pour tout vecteur de matrices $\underline{A} \in [\mathcal{M}(m\text{x}n)]^q$ et tout vecteur de matrices $\underline{B} \in [\mathcal{M}(p\text{x}q)]^n$ ,

$$\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B} = \sum_{j=1}^{nq} (\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B})_{.j} \ .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} (A_{i.j} \otimes B_{j.i}) \ .$$

(K'2) constitue une conséquence immédiate de la relation précédente (K'1) et de la propriété correspondante (K2) du produit de Kronecker (simple) :
Soit : $\underline{A} \in [\mathcal{M}(m\text{x}n)]^p$ , $\underline{B} \in [\mathcal{M}(p\text{x}q)]^m$ ,

$$\underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{A} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} B_{ji.} \otimes A_{ij.}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} U_{pxm} (A_{ij.} \otimes B_{ji.}) U_{nxq}$$

$$= U_{pxm} (\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{B}) U_{nxq} \quad .$$

On vérifie, de même, que : $\forall \underline{A} \in [\mathcal{M}(mxn)]^q$ , $\forall \underline{B} \in [\mathcal{M}(pxq)]^n$ ,

$$\underline{B} \overset{C}{\otimes} \underline{A} = U_{pxm} (\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{B}) U_{nxq} \; .$$

(K'3) constitue une conséquence immédiate de la relation (K'1) et de la propriété (K3) correspondante du produit de Kronecker simple :
soit : $\underline{A} \in [\mathcal{M}(mxn)]^p$ , $\underline{B} \in [\mathcal{M}(mxn)]^p$ , $\underline{C} \in [\mathcal{M}(pxq)]^m$ , $\underline{D} \in [\mathcal{M}(pxq)]^m$ ,

$$(\underline{A} + \underline{B}) \overset{L}{\otimes} (\underline{C} + \underline{D}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} (A_j + B_j)_{i.} \otimes (C_i + D_i)_{j.}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (A_{ji.} + B_{ji.}) \otimes (C_{ij.} + D_{ij.})$$

$$= (\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{C}) + (\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{D}) + (\underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{C}) + (\underline{B} \overset{L}{\otimes} \underline{D}).$$

De même : $\forall \underline{A} \in [\mathcal{M}(mxn)]^q$ , $\forall \underline{B} \in [\mathcal{M}(mxn)]^q$ , $\forall \underline{C} \in [\mathcal{M}(pxq)]^n$, $\forall D \in [\mathcal{M}(pxq)]^n$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \overset{C}{\otimes} (\underline{C} + \underline{D}) = (\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{C}) + (\underline{A} \overset{C}{\otimes} \underline{D}) + (\underline{B} \overset{C}{\otimes} \underline{C}) + (\underline{B} \overset{C}{\otimes} \underline{D}).$$

(K'4) La règle du produit mixte est fausse en général pour le produit de Kronecker L-généralisé et est seulement vérifiée dans les deux cas suivants :
Soit $A \in \mathcal{M}(m)$, $\underline{B} \in [\mathcal{M}(pxq)]^m$ , $\underline{C} \in [\mathcal{M}(qxr)]^m$ ,

(i) $(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})(\underline{A} \overset{L}{\otimes} \underline{C}) = [[\delta_{ij}\ B_i]]_{ij}\ [[a_{ij}\ C_i]]_{ij}$

$= [[a_{ij}\ B_i\ C_i]]_{ij} = A \overset{L}{\otimes} (\underline{B} \circ \underline{C})$ .

(ii) constitue une conséquence immédiate du résultat précédert et de la relation (K'2) :

$$(\underline{B} \overset{L}{\otimes} I_m)(\underline{C} \overset{L}{\otimes} A) = U_{p\times m}(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})\ U_{m\times q}\ U_{q\times m}\ (A \overset{L}{\otimes} \underline{C})\ U_{m\times q}$$

$$= U_{p\times m}\ [A \overset{L}{\otimes} (\underline{B} \circ \underline{C})]\ U_{m\times q}$$

$$= (\underline{B} \circ \underline{C}) \overset{L}{\otimes} A\ .$$

On vérifie, de manière tout à fait analogue, que :

$\forall\ A \in \mathcal{M}(m)$, $\forall\ \underline{B} \in [\mathcal{M}(p\times q)]^m$ , $\forall\ \underline{C} \in [\mathcal{M}(q\times r)]^m$ ,

(i') $(A \overset{C}{\otimes} \underline{B})(I_m \overset{C}{\otimes} \underline{C}) = A \overset{C}{\otimes} (\underline{B} \circ \underline{C})$

(ii') $(\underline{B} \overset{C}{\otimes} A)(\underline{C} \overset{C}{\otimes} I_m) = (\underline{B} \circ \underline{C}) \overset{C}{\otimes} A$ .

Conformément à toute généralisation, de telles opérations "perdent" donc diverses propriétés, et non des moindres, par rapport au produit de Kronecker simple. Notons que l'on retrouve, à l'aide de ces relations, le résultat classique suivant : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ , $\forall\ A \in [\mathcal{M}(m)]^p$ ,

$$(\underline{A} \overset{L}{\otimes} I_p)^k = \underline{A}^{\circ k} \overset{L}{\otimes} I_p$$

$$(I_p \overset{L}{\otimes} \underline{A})^k = I_p \overset{L}{\otimes} \underline{A}^{\circ k}\ .$$

(K'5) constitue une conséquence immédiate de la propriété précédente :

soit : $A \in \mathcal{M}(m)$ , $\underline{B} = (B_i)_i \in [\mathcal{M}(p)]^m$ ,

$$\text{dét}(A \overset{L}{\otimes} \underline{B}) = \text{dét}[(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})(A \otimes I_p)]$$

$$= \text{dét}(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})(A \otimes I_p)]$$

$$= [\text{dét}(A)]^p \prod_{j=1}^{m} \text{dét}(B_j) = \text{dét}(A^p) \prod_{j=1}^{m} \det(B_j)$$

On vérifie de même, que :

$$\text{dét}(A \overset{C}{\otimes} \underline{B}) = \text{dét}(\underline{B} \overset{C}{\otimes} A) = \text{dét}(A^p).\text{dét}(\prod_{j=1}^{m} B_j) \ .$$

(K'6) constitue aussi une conséquence de la relation (K'4). Notons, tout d'abord, que : selon la relation (K'5) précédente, $A \overset{L}{\otimes} \underline{B}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}(mp)$ si et seulement si : $A \in \mathcal{M}(m)$ est une matrice inversible et $\underline{B} = (B_j)_j \in [\mathcal{M}(p)]^m$ est un vecteur de matrices inversible au sens du produit $\circ$ .

$$(A \overset{L}{\otimes} \underline{B})^{-1} = [(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})(A \otimes I_p)]^{-1}$$

$$= (A \otimes I_p)^{-1}(I_m \overset{L}{\otimes} \underline{B})^{-1}$$

$$= (A^{-1} \otimes I_p)(I_m \overset{C}{\otimes} \underline{B}^{-1})$$

$$= A^{-1} \overset{C}{\otimes} \underline{B}^{-1} \ .$$

(K'8) Soit f une fonction analytique scalaire à valeurs matricielles ; on peut donc écrire f sous la forme :

$$\forall \ \underline{A} \in [\mathcal{M}(m\text{x}n)]^p \ ,$$

$$f(\underline{A} \overset{L}{\otimes} I_p) = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \ (\underline{A} \overset{L}{\otimes} I_p)^j \quad \text{(par définition de f)}$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \ (\underline{A}^{\circ j} \overset{L}{\otimes} I_p)$$

$$= (\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \ \underline{A}^{\circ j}) \overset{L}{\otimes} I_p$$

$$= (\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \ A_i^j \ ) \overset{L}{\otimes} I_p = f(\underline{A}) \overset{L}{\otimes} I_p \ .$$

D'où le résultat.

(K'9) Soit : $\underline{A} \in [\mathcal{M}(m)]^p$ , $\underline{B} \in [\mathcal{M}(p)]^m$

$$\frac{d(\underline{A}(t) \overset{L}{\otimes} \underline{B}(t))}{dt} = [[\,((\frac{d(a^h_{ij}(t)\ b^i_{hk}(t))}{dt}))_{hk}\,]]_{ij}$$

$$= [[\,((\frac{da^h_{ij}(t)}{dt}.b^i_{hk}(t) + a^h_{ij}(t)\frac{db^i_{hk}(t)}{dt}))_{hk}\,]]_{ij}$$

$$= \frac{d\ \underline{A}(t)}{dt} \overset{L}{\otimes} \underline{B}(t) + \underline{A}(t) \overset{L}{\otimes} \frac{d\ \underline{B}(t)}{dt}$$

<u>Remarque</u> : Les relations (K'4) à (K'8) exigent évidemment des vecteurs de matrices de dimensions finies.

# BIBLIOGRAPHIE

[ 1 ] BARLOW R.E. and PROSHAN F., "Mathematical Theory of Reliability", (1965), JOHN WILEY and Sons, New-York.

[ 2 ] BARLOW R.E. and PROSHAN F., "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", Vol.1 : "Probability Models", (1975), HOLT, RINEHART and WINSTON, New-York.

[ 3 ] BARNETT S., "Matrix Differential Equations and Kronecker Products", (January 1973), SIAM, Journal on Applied Mathematics, Vol.24, N°1, pp. 1-5.

[ 4 ] BELLMAN R. "An Introduction to Matrix Analysis", (1960), MAC GRAW HILL book Company, New-York.

[ 5 ] BIRNBAUM Z.W., "On the Importance of Different Components of a Multicomponent System", (1969), Multivariate Analysis II, Pr KRISHNAIAH Editor, ACADEMIC PRESS, pp. 581-592.

[ 6 ] BIRNBAUM Z.W. and ESARY J.D., "Modules of Binary Coherent Systems", (June 1965), SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.13, n°2, pp. 444-462.

[ 7 ] BIRNBAUM Z.W., ESARY J.D. and MARSHALL A.W., "A Stochastic Characterization of Wear Out for Components and Systems", (1966), The Annals of Mathematical Statistics, Vol.37, pp. 816-825.

[ 8 ] BIRNBAUM Z.W., ESARY J.D. and SAUNDERS S.C., "Multicomponent Systems and Structures and Their Reliability", (February 1961), Technometrics, Vol.3, N°1, pp. 55-77.

[ 9 ] BODIN L.D., "Approximations to System Reliability Using a Modular Decomposition", (May 1970), Technometrics, Vol.12, N°2, pp. 335-344.

[10] BREWER J.W., "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", (September 1978), IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.CAS_25, N°9, pp. 772-781.

[11] BRINDLEY E.C. and THOMPSON W.A., "Dependence and Aging Aspects of Multivariate Survival", (December 1972), Journal of the American Statistical Association, Vol.67, pp. 822-830.

[12] BRYSON M.C. and SIDDIQUI M.M., "Some Criteria for Aging", (1969), Journal of the American Statistical Association, Vol.64, pp. 1472-1483.

[13] BUCHANAN W.B. and SINGPURWALLA N.D., "Some Stochastic Characterizations of Multivariate Survival", (1977), The Theory and Applications of Reliability with Emphasis on Bayesian and Non Parametric Methods, Vol.I, ACADEMIC PRESS, pp. 329-348.

[14] BUZACOTT J.A. "Markov Approach to Finding Failure Times of Repairable Systems", (1970), IEEE Transactions on Reliability, Vol.R-19, pp. 128-134.

[15] CHATTERJEE P., "Fault Tree Analysis : Reliability Theory and Systems Safety Analysis", (November 1974), ORC 74-34, Operations Research Center, University of California, Berkeley.

[16] CHUNG K.L., "Markov Chains with Stationnary Transition Probabilities", Second Edition, (1967), SPRINGER VERLAG, Berlin.

[17] CINLAR E., "Introduction to Stochastic Processes", (1975), PRENTICE HALL Inc., New Jersey.

[18] CORRAZA M., "Contributions à l'Etude de la Fiabilité des Systèmes", (Février 1974), Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université Paul Sabatier, Toulouse.

[19] COX D.R. and MILLER H.D., "The Theory of Stochastic Processes", (1965), METHUEN books, London.

[20] EL NEVEIHI, PROSHAN F. and SETHURAMAN J., "Multistate Coherent Systems", (1978), Journal of Applied Probability, Vol.15, pp. 675-688.

[21] ESARY J.D. and MARSHALL A.W., "System Structure and the Existence of a System Life", (November 1964), Technometrics, Vol.6, N°4, pp. 459-463.

[22] ESARY J.D. and MARSHALL A.W., "Coherent Life Functions", (June 1970), SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.18, N°4, pp. 810-814.

[23] ESARY J.D. and MARSHALL A.W., "Multivariate Distributions with Exponential Minimums", (1974), The Annals of Statistics, Vol.2, N°1, pp. 84-98.

[24] ESARY J.D. MARSHALL A.W. and PROSHAN F., "Some Reliability Applications of the Hazard Transforms, (June 1970), SIAM, Journal on Applied Mathematics, Vol.18, N°4, pp. 849-860.

[25] ESARY J.D. and PROSHAN F., "Coherent Structures and Non Identical Components", (May 1963), Technometrics, Vol.5, N°2, pp. 191-209.

[26] ESARY J.D. and PROSHAN F., "A Reliability Bound for Systems of Maintained Interdependent Components", (March 1970), Journal of the American Statistical Association, Vol.65, N°29, pp. 329-338,

[27] ESARY J.D. and PROSHAN F., "Relationships Among some Concepts of Bivariate Dependence", (1972), The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 43, N°2, pp. 651-655.

[28] ESARY J.D., PROSHAN F. and WALKUP A.W., "Association of Random Variables with Applications", (1967), The Annals of Mathematical Statistics, Vol.38, pp. 1466-1474.

[29] FUSSEL J.B., POWERS G.J. and BENNETTS R.G., "Fault Tree Analysis - A State of the Art Discussion", (April 1974), IEEE Transactions on Reliability, Vol.R-23, N°2, pp. 51-55.

[30] GANTMACHER F.R., "Theorie des Matrices", (1966), Editions DUNOD, Paris.

[31] GNEDENKO B., BELAIEV Y. and SOLOVIEV A., "Méthodes Mathématiques en Théorie de la Fiabilité", (1972), Editions MIR, Moscou.

[32] GONDRAN M. et PAGES A., "Fiabilité des Systèmes", (1980), Collection des Etudes et Recherches-EDF, Editions EYROLLES, Paris.

[33] HARRIS R., "A Multivariate Definition for Increasing Hazard Rate Distribution Functions", (1970), The Annals of Mathematical Statistics, Vol.41, pp. 713-717.

[34] HENZE E., MASSE J.C. and THEODORESCU R., "On Multiple Markov Chains", (1977), Journal of Multivariate Analysis, Vol.7, pp. 589-593.

[35] HIRSH W.M., MEISNER M. and BOLL C., "Cannibalization in Multicomponent Systems and the Theory of Reliability", (1968), Naval Research Logistic Quartely, Vol.15, pp. 331-359.

[36] KEMENY J. and SNELL J.L., "Finite Markov Chains", (1960), D. VAN NOSTRAND Company, Inc., Princeton.

[37] LANGBERG N., PROSHAN F. and QUINZI A.J., "Converting Dependent Models into Independent Ones with Applications in Reliability", (1977), The Theory and Applications of Reliability with Emphasis on Bayesian and Non Parametric Methods, Vol.I, ACADEMIC PRESS, pp. 259-276.

[38] LEMMANN E.L., "Some Concepts of Dependence", (1966), The Annals of Mathematical Statistics, Vol.37, pp. 1137-1153.

[39] MARSHALL A.W. and OLKIN I., "A Multivariate Exponential Distribution", (March 1967), Journal of the American Statistical Association, Vol.62, N°1, pp. 30-44.

[40] MAZARS N. "Des Algorithmes d'Analyse des Arbres d'Evènements" (à paraître) Note de la Direction des Etudes et Recherches - E.D.F.

[41] NATVIG B., "Improved Bounds for the Availability and Unavailability in a Fixed Time Interval for Systems of Maintained Interdependent Components", (March 1980), Advances in Applied Probability, Vol.12, pp. 200-221.

[42] NIJENHUIS A. and WILF H.S. "Combinatorial Algorithms" (1978) ACADEMIC PRESS - New-York - (Chapter 15).

[43] PANDE P.K., SPECTOR M.E. and CHATTERJEE P., "Computerized Fault Tree Analysis : TREEL and MICSUP", (April 1975), ORC 75-3, Operations Research Center, University of California, Berkeley.

[44] PAPAZOGLOU I.A., "Markovian Reliability under Uncertainty", Sc. D. Thesis, (September 1977), M.I.T. Nuclear Engeeneering Department.

[45] PYKE R., "Markov Renewal Processes : Definitions and Preliminary Properties", (1961), The Annals of Mathematical Statistics, Vol.32, pp. 1231-1242.

[46] QUEYSANNE, "Algèbre", (1966), Collection U, Editions A. COLIN, Paris.

[47] RENYI A., "Calcul des Probabilités", (1966), Editions DUNOD, Paris.

[48] ROSENTHAL A., "A Computer Scientist Look at Reliability Computations", (1975), Reliability and Fault Tree Analysis, SIAM Conference Volume, pp. 133-152.

[49] STYAN G.P.H., "Hadamard Products and Multivariate Statistics Analysis", (1973), Linear Algebra and its Applications", Vol.6, pp. 217-240.