LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J.-P. BENZÉCRI

Symétrie entre moment et position en mécanique quantique et relativisation du continuum spatio-temporel

Les cahiers de l'analyse des données, tome 15, n° 2 (1990), p. 209-230

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1990__15_2_209_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XV - 1990 - n°2 - pp. 209-230.

SYMÉTRIE ENTRE MOMENT ET POSITION EN MÉCANIQUE QUANTIQUE ET RELATIVISATION DU CONTINUUM SPATIO-TEMPOREL

[REL. CONT. SPAT.]

J.-P BENZÉCRI

1 Symétrie et dualité en mathématique et en physique

Dès les débuts de la mécanique quantique, les relations d'incertitude de Heisenberg ont montré entre opérateurs de position et de moment une complémentarité qui suggère de chercher une véritable symétrie. La réciprocité de la transformation intégrale de Fourier pointe dans la même direction. Il est d'ailleurs connu des mathématiciens, sans que le fait soit toutefois fréquemment rappelé ni commenté, que la transformation de Fourier peut être placée dans un groupe continu, au sein duquel un chemin la relie à l'identité. Nous parlerons, pour l'instant, de groupe de Fourier, même si nous devons, par la suite revenir sur la définition de ce groupe, qui admet des variantes.

D'un point de vue géométrique, on peut, de diverses manières, regarder l'espace-temps usuel comme un sous-espace d'un espace ambiant ayant un nombre de dimensions bien plus élevé, mais fini, sur lequel opère le groupe de Fourier; en sorte que l'espace des positions est relié continûment à l'espace des moments. Les points de l'espace ambiant sont d'ailleurs des distributions (au sens de L. Schwartz) sur l'espace usuel (comme les points usuels sont des mesures de Dirac; et les fonctions propres de l'opérateur de moment sont des exp(ipx)). Déplacer l'espace-temps au sein de l'espace ambiant par des transformations du groupe de Fourier, équivaut donc à relativiser la notion de simultanéité, les points étant étalés en distributions de support non ponctuel.

À une fonction sur l'espace usuel, il correspond une transformée sur chacun des espaces déplacés (parmi lesquels l'espace des moments porte la transformée usuelle, par intégrale de Fourier); l'ensemble de ces transformées définissant une fonction étendue à tout l'espace ambiant. On peut encore dire qu'un point de l'espace ambiant étant une distribution, la valeur d'une fonction usuelle en ce point n'est autre que la valeur de cette distibution pour la fonction considérée.

Les cahiers de l'analyse des données - 0339 - 3097/90/ 02 209 22/ $ 4.20/©Gauthier-Villars

Analytiquement, les fonctions étendues peuvent se caractériser par un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. En généralisant ce système, on définit des structures spatiales, qui ont, avec l'espace ambiant dont nous venons de parler, le même rapport qu'un espace à courbure quelconque a avec un espace à courbure constante. L'on a, sur les espaces ambiants généralisés, une connexion déterminée par le système différentiel qui en définit la structure. Il apparaît donc possible de combiner les constructions usuelles de la relativité générale avec la notion d'espace ambiant généralisé.

De tous ces objets géométriques, nous avons entrepris l'étude en partant des théories physiques et avec l'espoir d'y revenir!

D'abord, la notion de symétrie rompue étant à l'honneur en physique, on peut être tenté de conjecturer que le continuum quadridimensionnel, n'est lui-même fixé que par rupture de symétrie parmi une infinité de possibles. Ceci est d'autant plus acceptable que l'effet Einstein-Podolsky-Rosen, aujourd'hui mis en relief par les brillantes expériences d'A. Aspect, montre qu'il existe, entre des phénomènes que la distance sépare, une cohésion non fondée sur la transmission de messages.

Au niveau des partons, (contituants postulés des nucléons, mésons...), on ne parvient à mettre en œuvre la théorie chromodynamique, pour décrire les évènements produits à très hautes énergies, que par le biais de modèles non quantiques de “cordes”, où jouent un rôle essentiel les tranformations mutuelles des écarts en position et des distributions de moments (transformations à propos desquelles on utilise le terme imagé de “yo-yo”; ce jouet en offrant un exemple classique).

D'ailleurs, les systèmes de deux partons divergents, de couleurs complémentaires, considérés comme initiateurs de jets (e.g. dans le modèle de Lund), ne sont pas, à proprement parler, des systèmes correctement préparés, analogues à ceux à partir desquels s'effectuent les calculs classiques de matrice S; ce qui laisse à désirer qu'un changement de repère, plus précisément un changement de continuum quadridimensionnel au sens suggéré ci-dessus, permette de voir ces événements sous une présentation plus adéquate.

Enfin, la synthèse de la relativité générale et de la théorie des quanta, fait toujours l'objet de spéculations.

Il n'est pas utile d'énumérer sur de multiples pages les plus sublimes problèmes de la physique, en laissant entendre qu'on tient la clef de leur solution! Mais ayant consacré de longues heures à rassembler le formulaire mathématique de transformations dont nous espérons qu'elles trouveront des applications, ou du moins ont quelque analogie avec des formules qui s'imposeront, nous voulons exposer ici en termes plus précis une partie de ce à quoi nous avons fait allusion.

2 Espace des opérateurs de moment et position et groupe des translations de Fourier

Partons de l'espace des fonctions à valeur complexe d'une variable réelle x. Sur cet espace, on a un opérateur de multiplication par x, opérateur qu'on notera q; et l'opérateur de dérivation, ∂, auquel est associé l'opérateur de moment: p = -i.∂ ; les opérateurs x et p sont transmués l'un de l'autre par la transformation de Fourier. On sait que ∂ est lié à la translation; on a:

$$((1 + \varepsilon\,\partial)\, f)(x) = f(x) + \varepsilon\, f'(x) \approx f(x + \varepsilon)\ ;$$

$$(\exp(u\,\partial)\, f)(x) \approx \lim\{((1 + (u/n)\partial)^n f)(x) \mid n \to \infty\}\ ;$$

$$(\exp(u\,\partial)\, f)(x) = f(x + u).$$

Ainsi, exp(u i.p) est un opérateur de translation auquel correspond l'opérateur de multiplication par exp(a i.x) ou opérateur exp(a i.q).

Le commutateur [q, p] = q.p - p.q, n'est autre que l'opérateur de multiplication par i (où i = $\sqrt{(-1)}$). On ne peut séparer l'opérateur de multiplication par la constante i des opérateurs ∂ et i.q ; et on engendre ainsi le groupe des transformations de la forme:

$$f \to Tf\ ;\ \text{où } Tf(x) = \exp(i(a + bx))\, f(x + u);$$

Nous dirons que c'est le groupe des "translations de Fourier", parce que c'est le plus petit groupe que contienne les translations et soit stable pour la transmutation par la transformation de Fourier. Il s'en faut d'un facteur de phase que ce groupe soit commutatif.

Au niveau des transformations infinitésimales on a les trois générateurs {p, q, 1}; il est naturel que s'introduise la constante 1, parce qu'un simple changement d'origine sur la droite réelle fait passer de q à q+1; or il est naturel de partir des fonctions à valeur complexe sur la droite affine, plutôt que sur la droite réelle.

Il s'impose de généraliser à un nombre quelconque de dimensions; ce qui est facile, mais appelle l'attention sur des distinctions nécessaires pour toute application éventuelle à la physique.

En dimension *n*, prenons l'espace des fonctions à valeur complexe sur R^n (considéré comme espace affin de dimension *n*). Afin d'éviter toute confusion avec $\sqrt{(-1)}$, on notera *j* l'indice d'une coordonnée. On a les opérateurs:

q_j : multiplication par la coordonnée x_j ;

∂^j : dérivation par rapport à x_j ; $p^j = -\,i\,\partial^j$;

pour le crochet on a: $[q_j, p^{j'}] = i.\delta_j^{j'}$.

Pour les translations de Fourier, on peut reprendre la formule donnée ci-dessus, en comprenant *a* comme une constante réelle usuelle; *u*, comme un vecteur; et *b*, comme une forme linéaire. Et, de même que quand n = 1, il s'en faut d'un facteur de phase que le groupe ne soit abélien.

Au niveau infinitésimal, on a les (2n + 1) générateurs $\{p^j, q_j, 1\}$; nous dirons que ceux-ci engendrent l'algèbre MP(n); ou espace vectoriel sur R, de dimension (2n + 1), des opérateurs de Moment et Position, muni de l'opération [,]. Par transformation de Fourier portant sur une variable x_j, on met en relation les opérateurs correspondants p^j et q_j. Pour insérer dans un groupe continu toutes les transformations de Fourier, il faut considérer le groupe laissant invariante la structure de MP(n), ou un des sous-groupes de ce groupe; et aussi réaliser ce groupe par des transformations fonctionnelles.

Si l'on a en vue la physique, et aussi pour les constructions de géométrie différentielle suggérées au §1, nous jugeons nécessaire de considérer une structure plus rigide que celle correspondant au groupe entier; et proposons que l'espace affin de base soit muni d'une métrique par une forme quadratique définie de signature {s+,t-} quelconque (le cas n = 4, avec la signature {-,-,-,+} ou {+,+,+,-}, étant classique). Sous cette hypothèse, voici comment se présente, en termes géométriques la structure de MP(n).

MP(n) contient l'opérateur 1, donc une droite réelle qu'on notera Δ. Le quotient de MP(n) par Δ est un espace vectoriel sur R de dimension 2n; MP(n)/Δ est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension *n*; et de plus, on a sur cet espace vectoriel complexe une forme hermitique définie de même signature {s+,t-}, que celle de la forme quadratique réelle donnée sur l'espace de départ.

Pour structurer ainsi MP(n) on part de ses deux sous-espaces réels Q et P, engendrés respectivement par les q_j et les p^j. Si les coordonnées x_j forment un système orthonormé, la structure complexe de $MP/\Delta \approx Q \oplus P$ est définie par l'anti-involution: multiplication par $\sqrt{(-1)}$; anti-involution notée ici **I**, plutôt que i, afin d'éviter toute confusion:

$$\forall j : \quad \mathbf{I}\, q_j = p_j = \varepsilon^{jj} . p^j \quad ; \quad \mathbf{I}\, p^j = - q^j = - \varepsilon^{jj} . q_j ;$$

la forme hermitique sur MP/Δ est définie par sa restriction à Q, qui correspond à la forme quadratique donnée sur l'espace de base; les q_j ayant pour carré de norme ±1, selon la signature des $\{\varepsilon^{jj} \mid j = 1,\dots, n\}$ intervenant dans la formule:

$$\|x\|^2 = \Sigma\{\, \varepsilon^{jj} \,.\, (x_j)^2 \mid j = 1, \ldots , n\} \,.$$

Le lien entre produit hermitique $<,>$ et crochet $[,]$ est précisé dans les formules suivantes où, comme d'usage en physique, $<,>$ est linéaire en son 2-ème argument; et où un élément *r* ou *r'* de MP(n) est identifié à sa classe dans MP/Δ:

$$<q_j, q_{j'}> = <p^j, p^{j'}> = \delta_j^{j'} \,.\, \varepsilon^{jj} \quad ; \quad <q_j, p^{j'}> = - <p^j, q_{j'}> = i \,.\, \delta_j^{j'} \quad ;$$

$$[r, r'] = (1 / 2) \,.\, (<r, r'> - <r', r>) \quad ;$$

cette dernière formule étant vérifiée quand *r* et *r'* sont pris parmi les (2n + 1) générateurs $\{p^j, q_j, 1\}$ de MP(n).

Ceci posé, MP(n)/Δ peut être muni soit du groupe unitaire, U, soit du groupe unitaire spécial, SU (matrices de déterminant 1), associé à sa structure hermitique. Dans MP(n), seront admissibles les automorphismes linéaires (au sens réel) qui laissent fixe la droite réelle Δ et induisent sur le quotient MP/Δ des automorphismes du groupe choisi (U resp. SU).

Un repère $\{p'^j, q'_j, 1\}$ de MP(n) sera caractérisé par la condition que les images des $\{q'_j\}$ dans MP/Δ constituent une base orthonormée (resp. de volume 1) pour la structure hermitique et que, dans ce même quotient, $\forall\, j : p'^j = \mathbf{I}\, q'_j$. Un repère étant choisi dans MP/Δ, il lui correspond, dans MP(n) une infinité de repères: de façon précise, chacun des 2n opérateurs $\{p'^j, q'_j\}$ n'est déterminé qu'à une constante additive près. Considérons le repère initial $\{p^j, q_j, 1\}$: ajouter des constantes aux q_j revient à déplacer l'origine dans R^n ; ce qui est loisible; en revanche, décaler les p^j revient à modifier d'une constante les moments, ce qui n'est pas indifférent à la physique. On peut supposer que le zéro de l'espace des moments est fixé par la condition que dans le vide, loin du système étudié, il n'y a pas de moment...

3 Le groupe de Fourier-Poincaré

Nous montrerons que les automorphismes infinitésimaux de MP(n) (algèbre des opérateurs de moment et de position) peuvent être réalisés comme transmutations par des opérateurs différentiels sur les fonctions à valeur réelle sur l'espace de base R^n.Le groupe engendré par ces opérateurs peut être appelé groupe de Fourier-Poincaré; parce que, dans le cas de la signature usuelle {-,-,-,+}, il est une extension du groupe de Poincaré (ou groupe de Lorentz inhomogène) conçue pour englober la transformation de Fourier en la reliant continûment à l'identité. Pour plus de simplicité, nous commencerons par le cas unitaire U; et indiquerons ensuite les conditions requises pour se restreindre au groupe spécial SU.

Sans justifier notre choix (cf. Bibliographie) nous exhiberons les opérateurs différentiels appropriés (qui comprennent, à la fois, les rotations usuelles et le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique, dont on rapellera au §4 le lien avec la transformation de Fourier). Ces opérateurs étant engendrés à partir des opérateurs de moment et de position par composition et combinaison linéaire, nous précisons que le composé $r_{\circ}s$ de deux éléments, r et s, de MP(n) sera noté comme un produit ordinaire. De plus, on notera simplement $\langle r,s\rangle$ le produit scalaire hermitique considéré dans le quotient MP/Δ.

Ceci posé, on a la proposition suivante:

Soit r et s $\in$ MP(n); alors le crochet: $i[(r.s + Ir.Is), u]$, considéré comme fonction de u $\in$ MP(n) est un automorphisme infinitésimal de la structure définie au §2.

On sait qu'il est équivalent de montrer que

$$\forall\, u \in MP : \langle u, i[(r.s + Ir.Is), u]\rangle \text{ est imaginaire pur ;}$$

nous ferons donc des calculs de commutateurs et de produits scalaires hermitiques, en nous souvenant des formules du §2.

$$\begin{aligned}[(r.s), u] &= r.s.u - u.r.s = r.s.u - r.u.s + r.u.s - u.r.s \\ &= (r\,.\,[s,u]) + ([r,u]\,.\,s) = [s,u]\, r + [r,u]\, s \\ &= (1/2)\,((\langle s,u\rangle - \langle u,s\rangle)\, r + (\langle r,u\rangle - \langle u,r\rangle)\, s)\ ;\end{aligned}$$

d'où pour le produit scalaire hermitique:

$$\begin{aligned}\langle u,[(r.s), u]\rangle &= (1/2)\,((\langle s,u\rangle - \langle u,s\rangle)\langle u,r\rangle + (\langle r,u\rangle - \langle u,r\rangle)\langle u,s\rangle) \\ &= re(\langle s,u\rangle \langle u,r\rangle) - (\langle u,s\rangle \langle u,r\rangle)\ ;\end{aligned}$$

on a de même avec Ir et Is (en tenant compte de ce que $\langle u,Iv\rangle = i\,\langle u,v\rangle$):

$$\begin{aligned}\langle u,[(Ir.Is), u]\rangle &= re(\langle Is,u\rangle \langle u,Ir\rangle) - (\langle u,Is\rangle \langle u,Ir\rangle)\ ; \\ &= re(\langle s,u\rangle \langle u,r\rangle) + (\langle u,s\rangle \langle u,r\rangle)\ ;\end{aligned}$$

$$\langle u, i[(r.s + Ir.Is), u]\rangle = 2i\,.\,re(\langle s,u\rangle \langle u,r\rangle)\ ,$$

qui est bien imaginaire pur, CQFD.

En fonction de la base $\{p^j, q_j, 1\}$ de MP(n) on peut écrire un ensemble de transformations infinitésimales engendrant toutes les transformations unitaires de MP/Δ : il suffit de poser:

$$\forall\, j, j' \;:\; \sigma_{jj'} = i\,(q_j \,.\, q_{j'} + \varepsilon^{jj}\,\varepsilon^{j'j'}\,p^j \,.\, p^{j'}) \qquad ;$$

$$\forall\, j \neq j' : \rho_{jj'} = i\,(\varepsilon^{jj}\,q_j \,.\, p^{j'} - \varepsilon^{j'j'}\,p^j \,.\, q_{j'}) \qquad ;$$

dans ces formules, les ρ sont des rotations usuelles de l'espace de base dans le plan (j, j') (ou, éventuellement, des rotations hyperboliques, si ε^{jj} et $\varepsilon^{j'j'}$ sont opposés); les σ correspondent proprement aux transformations de Fourier; en particulier, si j = j', le groupe à un paramètre engendré par σ_{jj} contient la transformée de Fourier en x_j, à une correction de phase près (cf. §4).

Pour se restreindre à SU, il suffit de ne pas prendre tous les σ_{jj}, mais seulement leurs combinaisons linéaires $\Sigma\{z^j\,\sigma_{jj}\}$ où les coefficients z^j satisfont à la condition $\Sigma\{z^j\,\varepsilon^{jj}\} = 0$.

Pour obtenir le groupe de tous les automorphismes de la structure de MP(n) (et non seulement ceux de la structure hermitique de MP/Δ) on adjoint, aux générateurs ρ et σ, les $\{i.p^j, i.q_j, i\}$, c'est-à-dire les translations de Fourier infinitésimales: on a ainsi un système de générateurs pour le groupe de Fourier Poincaré: ce groupe a une dimension de plus que le groupe hermitique inhomogène, parce que les opérateurs de moment et de position ne commutent pas, ce qui oblige à introduire les changements de phase (multiplication par i).

4 Le modèle de l'oscillateur harmonique

Au point où nous sommes parvenu, il semble préférable de nous arrêter à l'exemple n = 1; lequel s'explique complètement par les calculs classiques faits pour l'oscillateur harmonique. On considère l'espace de Hilbert $L^2(R)$ des fonctions de carré sommable à valeur complexe sur la droite réelle; et on reprend, sans indice *j*, les notations déjà adoptées:

$$p = -i\,\partial \qquad ; \quad f(x) \div\!\!\longrightarrow -i\,.\,\partial f(x)\,/\,\partial x = -i\,.\,f'(x) \;;$$

$$q = x \qquad ; \quad f(x) \div\!\!\longrightarrow x\,.\,f(x)\,;$$

$$\sigma = i\,(p^2 + q^2) \qquad ; \quad f(x) \div\!\!\longrightarrow i\,.\,(x^2.\,f(x) - f''(x))\,.$$

On considère classiquement sur $L^2(R)$ le système de base suivant:

$$\{N_n H_n(x) \exp(-x^2/2) \mid n = 0, 1, \dots\} = \{u_n(x) \mid n = 0, 1, \dots\} ;$$

où: $N_n = (\pi^{1/2}. 2^n. n!)^{-1/2}$; et où H_n est le polynôme d'Hermite de degré *n*:

$$H_n(x) = (-1)^n . \exp(x^2)\, \partial^n \exp(-x^2) / \partial x^n .$$

Les fonctions $\{u_n(x)\}$ sont les fonctions propres de l'opérateur d'énergie **E** de l'oscillateur harmonique:

$$\mathbf{E} = (p^2 + q^2) / 2 ; \quad \mathbf{E}\, u_n = (n + (1/2)) . u_n \quad ;$$

on définit les opérateurs usuels d'annihilation et de création:

$$a = (1/\sqrt{(2)})\, (q + i.p) = (1/\sqrt{(2)})\, (x - \partial) ;$$

$$a^* = (1/\sqrt{(2)})\, (q - i.p) = (1/\sqrt{(2)})\, (x + \partial) ;$$

$$a\, u_{n+1} = (n + 1)^{1/2}\, u_n \ ; \ a^*\, u_n = (n + 1)^{1/2}\, u_{n+1} \ ;$$

d'où, en particulier:

$$(a)^n\, u_n = (n!)^{1/2}\, u_0 \quad ; \ (a^*)^n\, u_0 = (n!)^{1/2}\, u_n \quad .$$

Sur $L^2(R)$, on définit un groupe d'automorphismes $\{T(\alpha)\}$ qui, dans la base $\{u_n\}$, est diagonalisé suivant la formule:

$$T(\alpha) : \quad u_n \longrightarrow \exp(n . i . \alpha)\, u_n \quad ;$$

le groupe $\{T(\alpha)\}$ est cyclique d'ordre 2π ; il a pour générateur infinitésimal t :

$$t = \sigma - i = i . (2E - 1) = i . (x^2 - \partial^2 - 1) ; \qquad T(\alpha) = \exp(\alpha . t / 2) .$$

On peut montrer que le groupe T contient la transformation de Fourier **F** ; on a en effet, avec les opérateurs d'annihilation et de création:

$$T(\alpha) . a . T(-\alpha) = \exp(-i .\alpha)\, a \quad ; \quad T(\alpha) . a^* . T(-\alpha) = \exp(i .\alpha)\, a \quad ;$$

d'où, pour les opérateurs q et p les relations de transmutation:

$$T(\alpha) . q . T(-\alpha) = \cos\alpha . q + \sin\alpha . p ;$$

$$T(\alpha) . p . T(-\alpha) = -\sin\alpha . q + \cos\alpha . p ;$$

ces relations ont pour cas particulier:

$$T(\pi/2) . q . T(-\pi/2) = p \quad ; \quad T(\pi/2) . p . T(-\pi/2) = -q \quad ;$$

Or, avec la tranformation intégrale de Fourier, **F**, définie par:

$$\mathbf{F}f(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_R f(x) \exp(-i.u.x)\, dx \quad ,$$

on a les relations de commutations

$$\mathbf{F} . p = q . \mathbf{F} \ ; \ \mathbf{F} . q = -p . \mathbf{F} \ ; \ \mathbf{F} . a^* = -i\, a^* . \mathbf{F} \ ;$$

de ces relations et de la formule usuelle relative à la loi normale $\mathbf{F}u_0 = u_0$, on déduit que $\mathbf{F} = T(-\pi/2)$.

Cette formule permet d'attribuer au groupe cyclique $\{T(\alpha) \mid \alpha \in (0, 2\pi)\}$ d'automorphismes de $L^2(R)$, le nom de groupe de Fourier (plus exactement de groupe de Fourier homogène à 1 dimension). Parce que le générateur infinitésimal t est relié à l'oscillateur harmonique par la formule $t = i\,(2E-1)$, on peut dire que l'oscillateur harmonique réalise, dans le temps α, la transformation $\exp(i\alpha/2).T(\alpha)$; et, en particulier, réalise, à un facteur de phase près, la transformation de Fourier en un temps $(-\pi/2)$, (huitième de la période de son niveau fondamental).

En adjoignant au groupe de Fourier homogène les translations de Fourier (cf. §2), on obtient le groupe de Fourier inhomogène; (qui est un cas particulier du groupe de Fourier Poincaré considéré au §3; à ceci près, toutefois, qu'il n'y a pas de déplacements; et que, si l'on prétendait se restreindre à SU, le groupe s'évanouirait!). Nous donnerons sans démonstration la formule de composition du groupe de Fourier inhomogène.

Le groupe est de dimension 4 ; une transformation peut s'écrire sous la forme:

$$\exp(X.\partial + U.i.x + \Omega.i)\ T(\alpha),$$

où $\{X, U, \Omega, \alpha\}$ sont des nombres réels, Ω et α étant définis à $2k\pi$ près; on a:

$$(\exp(X.\partial + U.i.x + \Omega.i)\ T(\alpha)) . (\exp(X'.\partial + U'.i.x + \Omega'.i)\ T(\alpha')) =$$

$$\exp((X+X'\cos\alpha+U'\sin\alpha)\partial + (U-X'\sin\alpha+U'\cos\alpha)ix + (\Omega+\Omega'+A)i)\ T(\alpha+\alpha') \ ;$$

où la phase A est donnée par la formule:

$$A = (1/2).(X.(-X'\sin\alpha+U'\cos\alpha) - U.(X'\cos\alpha+U'\sin\alpha)) \ ;$$

ainsi, le groupe de Fourier inhomogène peut être regardé comme une extension du groupe des rotations du plan complexe (groupe unitaire inhomogène de dimension 1) par le groupe des nombres complexes de module 1; cette extension étant nécessaire parce que p et q ne commutent pas.

5 Transformation des masses ponctuelles sur la droite; espace de Fourier-Möbius; équations des points généralisés

La valeur pour x=a d'une fonction f s'écrit, classiquement, comme la valeur de la distribution de Dirac:

$$f(a) = \int_R f(x)\ {}^c\delta(x-a)\ dx\ ;$$

dans cette formule, l'indication d'une fonction complexe conjuguée n'a été portée que pour montrer que l'expression est invariante par une transformation unitaire de l'espace des fonctions sur R, telle qu'une transformation du groupe de Fourier. Ainsi on peut écrire:

$$(T(\alpha)f)(a) = \int_R (T(\alpha)f)(x)\ {}^c\delta(x-a)\ dx$$

$$= \int_R f(x)\ {}^c(T(-\alpha)\delta_a)(x)\ dx\ ;$$

où, pour passer de la première à la deuxième expression de la valeur en a de la fonction $T(\alpha)f$, on substitue, dans l'expression intégrale d'un produit scalaire hermitique, sa transformée par $T(-\alpha)$ à chacune des deux fonctions $T(\alpha)f$ et $\delta_a = \delta(x-a)$. Dans le cas particulier de la transformation de Fourier ($\alpha = -\pi/2$) on a:

$$\mathbf{F}f(a) = \int_R f(x)\ {}^c(T(\pi/2)\ \delta_a)(x)\ dx = \int_R f(x)\ \exp(-iax)\ dx\ .$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par une fonction et toutes ses transformées par le groupe de Fourier n'est autre que l'ensemble des produits hermitiques de cette fonction avec toutes les transformées, par ce même groupe, de masses ponctuelles (mesures de Dirac). De même que les mesures de Dirac s'identifient aux points usuels de la droite R, l'ensemble de leurs transformées par le groupe de Fourier inhomogène constitue un espace, contenant R, et auquel se trouve étendue toute fonction sur R. Avant de passer au cas d'un espace de base multidimensionnel, on considère en détail le cas n = 1.

De même que δ_a est fonction propre de l'opérateur q pour la valeur propre a, $T(\alpha)\delta_a$ est fonction propre de l'opérateur transmué de (q-a) par $T(\alpha)$; on a:

$$0 = T(\alpha)\ (q-a)\ T(-\alpha)\ T(\alpha)\ \delta_a = (\cos\alpha.x - i.\sin\alpha.\partial - a)\ T(\alpha)\delta_a\ ;$$

d'où, pour $T(\alpha)\delta_a$, considérée comme fonction de x, une équation différentielle linéaire dont la solution générale est ce que nous appellerons une “onde quadratique”:

$$k_a \exp(-(i/2) \cot\alpha\, (x - (a / \cos\alpha))^2) ;$$

il suffit de déterminer k_a pour a=0, car on passe de $T(\alpha)\delta$ à $T(\alpha)\delta_a$ par une translation de Fourier (cf. *infra*).

Afin de calculer la constante k_0 convenable, plaçons-nous dans $L^2(R)$, rapporté à la base orthonormée des fonctions $u_n(x)$ (cf. §4). On a la formule (classique pour tout système orthonormé complet réel):

$$\delta_a(x) = \delta(x-a) = \Sigma\{ u_n(a)\, u_n(x) \mid n = 0, 1, \ldots \} \;;$$

la fonction $u_0(x)$ étant invariante par $T(\alpha)$, le coefficient de $u_0(x)$, dans la décomposition de $T(\alpha)\delta_a$, doit être $u_0(a)$, comme dans celui de δ_a; d'où, si a=0, la relation intégrale:

$$k_0 \int_R \exp(-(i\, x^2 \cot\alpha) / 2) \exp(-x^2 / 2)\, dx = 1 .$$

L'intégrale se calcule en partant de la formule bien connue en statistisque:

$$\int_R \exp(-u.x^2 / 2)\, dx = \sqrt{}(2\pi / u) ;$$

classique pour *u* réel positif, la formule s'étend, par prolongement analytique, à *u* complexe, pourvu que soit positive la partie réelle de *u*, ce qui assure la convergence de l'intégrale: on choisit pour $\sqrt{}(2\pi / u)$ la détermination qui est réelle positive pour *u* réel positif. On a donc:

$$\int_R \exp(- (1 + i.\cot\alpha)\, x^2 / 2) = (2\pi / (1 + i.\cot\alpha))^{1/2} = k_0{}^1 \;;$$

$$k_0 = (2\pi\, |\sin\alpha|)^{-1/2} \exp(i.((\mathrm{signe}(\alpha).\pi/4) - (\alpha/2))) \;;$$

cette formule vaut pour $\alpha \in\,)-\pi/2, \pi/2($; et $\alpha/2 \in\,)-\pi/4, \pi/4($; plus généralement, pour α quelconque (i.e. non congru à $\pi/2$ mod π, cas singulier de la transformation de Fourier, l'argument de la constante est déterminé par les deux conditions d'appartenir à $(-\pi/4,+\pi/4)$ et d'être congru à $\alpha/2$ mod $\pi/4$. On vérifie que, quand $\alpha \to -\pi/2$, $T(\alpha)\delta(x)$ tend vers la fonction constante $(2\pi)^{-1/2}$.

Tout point généralisé peut s'écrire: $\exp(i.\Omega)\ T(\alpha)\ \delta_a$; dans la suite, on notera:

$$(\alpha, a, \Omega) = \exp(i.\Omega)\ T(\alpha)\ \delta_a\ ;$$

cette écriture est, de plus, unique, si α est assujéti à être dans l'intervalle $(0, \pi)$; entre $\alpha=\pi$ et $\alpha=0$, on a l'identification:

$$\exp(i.\Omega)\ T(\pi)\ \delta_a = \exp(i.\Omega)\ \delta_{-a}\ ;$$

formule qui résulte de celle valant pour toute fonction f: $(T(\pi)f)(x) = f(-x)$.

De façon précise, on a pour $(\alpha, a, 0) = T(\alpha)\ \delta_a$:

$$\begin{aligned} T(\alpha)\ \delta_a &= T(\alpha) \exp(-i.a.p)\ \delta = T(\alpha) \exp(-i.a.p)\ T(-\alpha)\ T(\alpha)\ \delta \\ &= \exp(-i.a\ (T(\alpha)\ p\ T(-\alpha))\ T(\alpha)\ \delta \\ &= \exp(-i.a.\cos\alpha\ p + i.a.\sin\alpha\ q)\ \ T(\alpha)\ \delta \\ &= \exp(-i.\cos\alpha.\sin\alpha.a^2/2)\ \exp(\ i.a.\sin\alpha\ q)\ \exp(-i.a.\cos\alpha\ p)\ T(\alpha)\ \delta \\ &= k_0.\exp(-(i/2).\cot\alpha.(x^2 + a^2) + \ (i.a.x / \sin\alpha)) \\ &= k_0.\exp(-(i/2).(\cot\alpha.(x - (a / \cos\alpha))^2 - tg\alpha.a^2))\ , \end{aligned}$$

où k_0 a la valeur calculée ci-dessus.

L'ensemble des couples (α, a) pour $\alpha \in (0,\pi)$, $a \in R$, avec l'identification $(\pi,a)\approx(0,-a)$, est, topologiquement, une bande de Möbius. L'ensemble des points généralisés est donc, topologiquement, le produit du cercle $\{\exp(i.\Omega) \mid \Omega\in (0,2\pi)\}$ par une bande de Möbius; et c'est pourquoi nous l'appellons "variété de Fourier-Möbius": FM(1). Mais si la base, quotient de la variété des points généralisés par le groupe invariant $\{\exp(i.\Omega)\}$, est intrinsèquement définie, il n'en est pas de même de la section $\{T(\alpha)\ \delta_a\}$, correspondant à $\Omega=0$; car elle dépend du repère choisi dans MP (cf. §2).

On appellera "plaque" de FM(1) l'ensemble, de dimension 2, des points généralisés ayant une même valeur de la coordonnée α:

$$\text{plaque } `\alpha' = \{(\alpha, a, \Omega) \mid a \in R\ ;\ \Omega \in (0, 2\pi)\};$$

de même, une "feuille" sera l'une quelconque des transformées de R par le groupe de Fourier inhomogène, toutes les feuilles d'une même plaque se déduisant les unes des autres par des tranlations de Fourier. Ainsi, pour une feuille de la plaque $\alpha = 0$, on a:

$$\text{feuille}(0, v, \Omega) = \{\exp(i.(\Omega + v.a))\, \delta_a \mid a \in R\}$$

$$= \{(0, a, \Omega + v.a) \mid a \in R\} \;;$$

où v est un paramètre réel et Ω un angle. La feuille la plus générale sera:

$$\text{feuille}(\alpha, v, \Omega) = \{T(\alpha) \exp(i.(\Omega + v.a))\, \delta_a \mid a \in R\}$$

$$= \{(\alpha, a, \Omega + v.a) \mid a \in R\} \quad ;$$

chaque plaque α contient une double infinité de feuilles, paramétrée par $v \in R$ et l'angle $\Omega \in (0, 2\pi)$.

À toute fonction f sur R, est associée une "fonction étendue", notée $\sim f$, définie sur l'espace de Fourier-Möbius, FM(1), tout entier; $\sim f$ peut être présentée comme une fonction de 3 variables réelles, suivant la formule:

$$\sim f(\alpha, a, \Omega) = \exp(-i.\Omega)\, (T(\alpha)f)(a) = \exp(-i.\Omega) <\delta_a, T(\alpha)f> ;$$

la fonction étendue $\sim f$ est complètement déterminée non seulement par ses valeurs sur la droite R, identifiée à l'ensemble des triplets $(\alpha, a, \Omega) = (0, a, 0)$, mais aussi par ses valeurs sur une feuille quelconque de FM(1).

Sur FM(1), l'ensemble des fonctions étendues, $\sim f$, peut être caractérisé par une équation aux dérivées partielles du 2-ème ordre. Convenons de noter:

$$\partial/\partial\alpha = \partial_\alpha \;;\quad \partial/\partial a = \partial_a \;;\quad \partial/\partial\Omega = \partial_\Omega \quad ; \text{etc...}$$

on a pour expression de ∂_α :

$$\partial_\alpha \sim f(\alpha, a, 0) = \partial_\alpha\, (T(\alpha)f)(a) = \partial_\varepsilon\, (T(\varepsilon).T(\alpha)f)(a)$$

$$= (-i/2)\, (1 + (\partial_a)^2 - a^2) \sim f(\alpha, a, 0) \;;$$

puisque $\partial_\Omega = -i$, et $(\partial_\Omega)^2 = -1$, on peut encore écrire:

$$\partial_\alpha \sim f = (-i/2)\, ((\partial_a)^2 + (a^2 - 1).(\partial_\Omega)^2) \sim f \;;$$

on voit donc qu'en tout point de MP(1) la dérivée partielle transversalement à la plaque, ∂_α, est (pour $\sim f$) le produit par $\sqrt{(-1)}$ d'un opérateur différentiel d'ordre 2 (à coefficients constants) calculé tangentiellement à la plaque; parce que $\partial_\Omega = -i$, toute dérivée partielle (de $\sim f$) peut , comme ∂_α, s'écrire sous cette forme.

L'expression en fonction de x, donnée ci-dessus pour les points généralisés, a l'inconvénient d'être singulière au voisinage des points ordinaires, qui sont des mesures de Dirac. La représentation donnée ci-après, utilisant la transformation de Fourier, est non singulière; elle a, de plus, l'avantage de donner une forme utile à l'équation aux dérivées partielles des fonctions étendues. Un point, dans le nouveau paramétrage, est désigné par un triplet de nombres entre crochets, l'équivalence avec le paramétrage précédent étant ainsi définie:

$$[a, ß, c] = (+ß/2, a, c+(ß/4)) \quad ; \quad \text{e.g. : } [a, 0, 0] = \delta_a \; ;$$

en résulte, pour la transformée de Fourier l'expression:

$$\mathbf{F}[a, ß, c](v) =$$

$$(2\pi)^{-1/2} (\cos 2ß)^{-1/2} \exp(+i.((1/2).\mathrm{tg}2ß.(v^2+ a^2) - (a.v / \cos 2ß) + c)) \quad ; \text{ d'où :}$$

$$\sim f([a, ß, c]) = \int \{{}^c\mathbf{F}[a, ß, c](v) \,.\, \mathbf{F}f(v)\, dv \mid v \in R\} \; ;$$

et, pour la dérivée partielle de la fonction étendue $\sim f([a, ß, c])$:

$$\partial_ß \sim f([a, ß, c]) = \int \{\partial_ß\, {}^c\mathbf{F}[a, ß, c](v) \,.\, \mathbf{F}f(v)\, dp \mid v \in R\} \; ;$$

enfin, compte tenu de ce que $\partial_c \sim f = -i \,.\, \sim f$, le système différentiel du second ordre, auquel satisfont les fonctions étendues sur FM(1), s'écrit:

$$\partial_a = i\, \partial_{ac} \quad ; \quad \partial_c = i\, \partial_{cc} \quad ; \quad \partial_ß = i\, (\partial_{aa} + a^2.\partial_{cc})$$

6 Transformation de Fourier-Poincaré des masses ponctuelles sur R^n et espace de Fourier-Möbius FM(n)

On retrouve, en partant de R^n, tous les objets géométriques considérés aux §§4 & 5; mais la structure en est plus complexe, parce que, en bref, au groupe cyclique $\{T(\alpha)\}$, se substitue un groupe unitaire.

Reprenons le langage et les notations des §§2 & 3. On suppose R^n muni d'une forme quadratique définie, $\|.\|$, dont la signature peut être positive (cas euclidien) ou hyperbolique quelconque. L'algèbre des opérateurs de moment et de position MP(n) (et le groupe des translations de Fourier qu'elle engendre) sont définis indépendamment de $\|.\|$, mais la structure complexe de MP/Δ en dépend; et *a fortiori*, la norme hermitique définie pour MP/Δ .

Soit T une transformation du groupe de Fourier-Poincaré; notons:

$$\{T.p^j.T^{-1},\ T.q_j.T^{-1},\ 1\} = \{p'^j,\ q'_j,\ 1\} \ ;$$

$$L(\{p^j\}) = P \ ; \ L(\{q_j\}) = Q \ ; \ L(\{p'^j\}) = P' \ ; \ L(\{q'_j\}) = Q' \ ;$$

(où L({.}) désigne le sous-espace vectoriel sur R engendré par {.}).

Dans MP/Δ, l'image de P' est un sous-espace (réel) assujetti aux seules conditions que son intersection avec son transformé par **I** (transformé qui n'est autre que l'image de Q' dans MP/Δ) soit réduite à {0}, et que soit non dégénérée (en tant que forme réelle) la restriction à P'de la norme hermitique de MP/Δ. Par P', l'image de Q' dans MP/Δ est déterminée; et Q' lui-même est déterminé à une translation de Fourier près; de même, Q' détermine P' à une translation de Fourier près.

On se propose de montrer que Q' détermine Tδ à une phase près. Soient T et S deux transformations du groupe de Fourier-Poincaré telles que:

$$T.Q.T^{-1} = S.Q.S^{-1} = Q' \ ; \quad \text{on a alors :}$$

$$(T^{-1}.S).Q.(S^{-1}.T) = Q \quad ; \quad \text{soit, en notant } T^{-1}.S = Z,$$

$$\forall\, j : Z.q_j.Z^{-1} = q'_j \in Q \quad ;$$

la transmutation par $Z = T^{-1}.S$ (ou par son inverse $(S^{-1}.T)$) induit donc, sur MP/$\Delta \approx C^n$, un automorphisme réel, Zr, respectant la norme $\|.\|$, i.e. un automorphisme orthogonal, dont le déterminant est de module 1; et on a:

$$\forall\, j : q'_j = q_j \,.\, Zr \ ,$$

formule où q_j et q'_j sont des applications de R^n dans R, et Zr est un automorphisme de R^n. Sur $L^2(R^n)$ on a les deux automorphismes:

$$Z : f \to Zf \ ; \quad \text{et} \quad Z^r : f \to f.Zr \ ; \quad \text{qui satisfont à :}$$

$$\forall\, j : \ Z.q_j.Z^{-1} = Z^r.q_j.(Z^r)^{-1} = q'_j \quad ;$$

Z et Z^r ne diffèrent donc que par une translation de Fourier respectant les q_j, i.e., en notant $U^J.q_J$ une combinaison linéaire quelconque des q_j:

$$Z = Z^r.\ \exp(i.U^J.q_J + i.\Omega)\ ;$$

$$\forall f : Zf = (f \times \exp(i.U^J.x_J + i.\Omega)).Zr\ \ ;$$

(i.e. on multiplie f par une exponentielle, et la fonction obtenue est composée avec Zr).

Sur la mesure de Dirac δ, l'effet de la multiplication par l'exponentielle se réduit à un changement de phase Ω; de même la composition avec Zr est sans effet, parce que Zr respecte l'élément de volume, donc:

$$Z\,\delta = \exp(i.\Omega)\,\delta\ ; \qquad S\,\delta = (T.Z)\,\delta = \exp(i.\Omega)\,T\,\delta\ \ .$$

La forme même de T δ peut être déterminée aisément à partir de Q', mais, cette fois, à une constante complexe près (i.e. phase et module); on en effet:

$$\forall\, j : q_j\,\delta = 0 \ \ \Rightarrow\ \ T.q_j.T^{-1}.T\,\delta = q'_j\,(T\,\delta) = 0\ \ ;$$

parce que q'_j est dans MP(n), $q'_j\,(T\,\delta) = 0$, est une équations différentielle linéaire du premier ordre pour Tδ, et le système de ces équations détermine Tδ à une constante près. En général, comme on l'a vu au §5 dans le cas où n=1, Tδ est une onde quadratique (cf. §7), i.e. l'exponentielle d'un polynôme inhomogène du 2-ème degré en les x_j, à coefficients imaginaires purs; mais il y a des cas limites, dont les plus simples sont ceux vus au §5 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$, et qu'on retrouve si Q' a une intersection non vide avec Q ou P.

Il apparaît maintenant que l'espace de Fourier-Möbius FM(n), ou espace ambiant à R^n comprenant les points généralisés, i.e. les transformés de δ par le groupe de Fourier-Poincaré, est un espace fibré en cercles, ayant pour base la sous-grassmannienne (réelle) de MP(n), ensemble des sous-espaces de dimension n qui peuvent être un sous-espace Q' = $T.Q.T^{-1}$; car le point généralisé, par le système d'équations auquel il satisfait, détermine Q'; et Q' détermine le point généralisé, à une phase près.

Dans le cas n=1, MP(1) est un espace vectoriel de dimension 3 sur R, avec une droite distinguée Δ; Q' est la droite portant le transmué q' de q; Q' peut être une droite quelconque de MP(1), passant par l'origine, exceptée la droite Δ; l'ensemble des droites Q' est donc un espace projectif privé d'un point; ce qui concorde avec le fait que, topologiquement, on a, pour base de l'espace des points généralisés, une bande de Möbius.

Pour MP(n), comme pour MP(1) on définit des plaques et des feuilles. La feuille type est l'ensemble des fonctions de Dirac δ_a, ou points de R^n ; la plaque type est l'ensemble des mesures de Dirac affectées d'une phase quelconque:

$$\text{feuille type:} \quad \{\delta_a \mid a \in R^n\} \quad ;$$

$$\text{plaque type:} \quad \{\exp(i\Omega)\, \delta_a \mid a \in R^n, \Omega \in (0, 2\pi)\} \; ;$$

une plaque quelconque est définie comme l'image de la plaque type par un transformation T du groupe de Fourier-Poincaré; de même une feuille quelconque est une image de la feuille type. Tout point généralisé appartient à une plaque unique qui est aussi l'ensemble des ses transformés par une translation de Fourier quelconque; on a:

$$\text{plaque}(T\delta) = T\, \{\exp(i\Omega)\, \delta_a \mid a \in R^n, \Omega \in (0, 2\pi)\} \; ;$$

une feuille de cette plaque peut être définie à partir d'une forme linéaire U sur R^n et d'une phase Ω:

$$\text{feuille} = T\{\exp(iUa + i\Omega)\, \delta_a \mid a \in R^n\} \; ;$$

on peut encore définir une feuille de FM(n) passant par $T\delta$ comme l'ensemble des transformés de ce point par les translations de Fourier engendrées par les translations infinitésimales d'un sous-espace de dimension *n* de MP(n), assujetti à la seule condition d'être supplémentaire du sous-espace de dimension n+1 engendré par Δ et $Q'=T.Q.T^{-1}$.

7 Équations paramétriqes des ondes quadratiques

Comme au §5 pour FM(1), nous considérerons des équations de deux formes: d'une part en fonction de x; et d'autre part après transformation de Fourier, afin d'avoir un paramétrage régulier au voisinage de l'espace de base.

De façon précise, un point généralisé $T\delta$ a pour équation une "onde quadratique":

$$N \exp(-i\, b^{JJ} x_J x_J - i\, u^J x_J - i\, c) \; ;$$

formule où b^{JJ} est un tenseur symétrique réel; $b^{JJ} x_J x_J$ s'interprète suivant la convention de sommation d'Einstein; u^J est une forme linéaire réelle; c est un réel; et la constante de normalisation N est donnée par:

$$N = (2\pi)^{-n/2} \det (1 + 4.(b.\varepsilon)^2)^{1/4} \quad ;$$

où par b.ε on désigne l'endomorphisme de R^n dont les coefficients sont $b^{jj'} \varepsilon_{j'j'}$. Les points d'une plaque sont obtenus pour une matrice b^{JJ} déterminée.

Quant à la forme de N, nous donnerons seulement une démonstration particulière valant dans le cas d'une signature positive: la démonstration générale donnée pour le second paramétrage s'appliquant également ici, à des variantes minimes près.

L'expression donnée pour N étant invariante, il suffit de vérifier qu'elle est exacte dans le cas où les coordonnées de base sont choisies pour que la transmutation par T (composée au besoin avec un déplacement réel) induise sur MP/Δ une transformation diagonale (ce qui est toujours possible si la signature est {n+}); c'est-à-dire dans le cas où T effectue, sur chaque axe, une transformation du groupe de Fourier à une variable; or on retrouve alors (sur chaque axe) le résultat du §5:

$$N(\alpha) = (2\pi\ |\sin\alpha|)^{-1/2} = (2\pi)^{-1/2} (1 + \cot\alpha^2)^{1/4} \quad \text{; d'où, sur MP/}\Delta :$$

$$N = \Pi\{N_j\} = \Pi\{(2\pi)^{-1/2} (1 + 4.(b^{jj}.\varepsilon_{jj})^2)^{1/4} \mid j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Afin d'obtenir un paramétrage régulier au voisinage de R^n, une plaque étant caractérisée par un matrice symétrique $ß_{JJ}$, on posera, pour un point $[a_J, ß_{JJ}, c]$, l'équation:

$$\mathbf{F}[a_J, ß_{JJ}, c](v^J) =$$

$$(2\pi)^{-n/2} (\det(\cos 2ß))^{-1/2} \exp(i.((1/2).tg2ß.(v^2 + a^2) - (a.v / \cos 2ß) + c)) \quad ;$$

on donne un sens à cette expression en utilisant le tenseur diagonal de signature, ε_{JJ} ou ε^{JJ}, pour élever ou abaisser librement les indices; ainsi: $ß_J{}^J = ß_{JJ} . \varepsilon^{JJ}$; ce qui permet de calculer des séries entières en ß, donc les fonctions cos2ß, $(\cos 2ß)^{-1}$, tg2ß, etc...; et aussi des formes quadratiques, e.g. :

$$a.v / \cos 2ß = v^J (1/\cos 2ß)_J{}^J a_J \ ; \qquad tg2ß \,.\, a^2 = (tg2ß)^{JJ} a_J a_J \ ;$$

si l'on se restreint au groupe spécial, $ß_J{}^J$ doit être de trace nulle.

Afin d'établir que cette formule fournit en effet un paramétrage de FM(n) valant pour un voisinage de l'espace de base R^n (ou plaque $ß_{JJ}$=0), on considère la transformation infinitésimale associée à une matrice symétrique **ß**:

$$\sigma(\beta) = i.\beta\,(p^2 - \partial_{pp}) = i.\Sigma\{\beta_{jj'}\,(p^j p^{j'} - \varepsilon^{jj}\,\varepsilon^{j'j'}\,\partial_{pj}\,\partial_{pj'}) \mid j, j' \in J\} \quad ;$$

et on entreprend de montrer que, pour t réel (contenu dans un voisinage *Vois* de zéro assez petit pour assurer la convergence des développements en série), $[a_J,\ t.\beta_{JJ},\ c]$ n'est autre que l'image de $[a_J,\ 0,\ c]$ par la transformation $\exp(t.\sigma(\beta))$ du groupe de Fourier. En d'autres termes, on considère les sous-groupes à un paramètre du groupe de Fourier.

On doit vérifier que:

$$\forall\, t \in \text{Vois} : \qquad \exp(t.\sigma(\beta))\,\mathbf{F}[a_J,\, 0,\, 0] = \mathbf{F}[a_J,\, t.\beta_{JJ},\, 0] \quad ;$$

ici, les points généralisés sont regardés comme des fonctions de la variable vectorielle p, tandis que t, a et ß sont des paramètres. La formule étant vraie pour t=0, il suffit de montrer que les deux membres ont même dérivée par rapport à t. On doit donc montrer que:

$$\sigma(\beta)\,\mathbf{F}[a_J,\, \beta_{JJ},\, 0] = \partial_\beta\,\mathbf{F}[a_J,\, \beta_{JJ},\, 0]\;.\;\beta \quad ;$$

formule où ß est mis pour t.ß .

Formellement, la démonstration diffère peu de celle du cas n=1, parce que, dans les séries entières, la variable ß=t.ß reste proportionnelle à elle-même, en sorte que la commutativité est respectée entre sin2ß, tg2ß, ∂ß, etc... Il faut seulement se garder de calculer sans s'assurer de la validité des formules usuelles qu'on applique. On se bornera à rappeler deux points.

Soit Δ une application linéaire, la différentielle $\partial\det(\Delta)$ de son déterminant n'est autre que $\det(\Delta).\mathrm{trace}(\Delta^{-1}.\partial\Delta)$: en effet, on a:

$$\Delta + \partial\Delta = \Delta\,.\,(1 + \Delta^{-1}.\partial\Delta) \quad ; \quad \text{d'où :}$$

$$\det(\Delta + \partial\Delta) = \det(\Delta).\det(1 + \Delta^{-1}.\partial\Delta) \approx \det(\Delta).\,(1 + \mathrm{trace}(\Delta^{-1}.\partial\Delta)) \;.$$

Quant à la différenciation des séries entières matricielles, l'importance de la commutativité apparaît assez bien sur l'exemple de la différenciation de Δ^3 :

$$\partial\Delta^3 \approx \partial\Delta.\Delta.\Delta + \Delta.\partial\Delta.\Delta + \Delta.\Delta.\partial\Delta\,,$$

expression qui n'équivaut sûrement à $3.\Delta^2.\partial\Delta$ que si Δ et $\partial\Delta$ commutent. De Δ^3, on passe aisément à Δ^n et à toute série entière.

Dans les calculs de dérivées, on écrira uniquement des dérivées logarithmiques, la fonction $\mathbf{F}[a,\, \beta,\, 0]$, notée en bref F, étant partout en facteur.

Dans la dérivation par rapport à ß, on dérive d'abord un déterminant:

$$\partial_{\beta}\,(\det(\cos 2\beta))^{-1/2}.\beta \;=\; \det(\cos 2\beta)^{-1/2}.\mathrm{trace}(\cos 2\beta^{1/2}.\sin 2\beta.\cos 2\beta^{\;3/2}.\beta)\ ;$$

soit, pour la dérivée logarithmique: trace(tg2ß.ß). Reste à dériver l'onde quadratique proprement dite. Par exemple, la dérivée logarithmique de $\exp(i.((1/2).\mathrm{tg}2\beta.(v^2+a^2))$ s'écrit (avec sommation des indices répétés):

$$i\ .\ (\cos 2\beta^{-2}.\beta)_{jj'}\ .\ (v^j v^{j'} + a^j a^{j'})\qquad ;$$

au total pour la dérivée logarithmique $\partial_\beta F.\beta\,/\,F$ on écrira:

$$\mathrm{trace}(\mathrm{tg}2\beta.\dot{\beta}) + i\ .\ (\cos 2\beta^{-2}.\beta)_{JJ}\ .\ (v^J v^J + a^J a^J)\ \ -\ 2i\ (\sin 2\beta.\cos 2\beta^{-2}.\beta)_{JJ}\ .a^J v^J\ .$$

L'opérateur $\sigma(\beta)$ comprend d'abord une simple multiplication par une forme quadratique en p; puis un polynôme homogène de degré 2 en les dérivations. On a:

$$\partial_{pj}\,F = F.\ i\ .\ (\mathrm{tg}2\beta_{jj'}.v^{j'} - \cos\beta_{jj'}.a^{j'})\quad ;\quad \text{d'où}\ :$$

$$\partial_{pj'}\partial_{pj}\,F = F\ (i.\mathrm{tg}2\beta_{jj'}\ -\ (\mathrm{tg}2\beta_{jj''}.v^{j''} - \cos\beta^{-1}{}_{jj''}.a^{j''}).(\mathrm{tg}2\beta_{j'j''}.v^{j''} - \cos\beta^{-1}{}_{j'j''}.a^{j''}));$$

$$(\sigma(\beta)\ F)\ /\ F =\ i\ \beta_{jj'}\,v^j v^{j'} + \mathrm{tg}2\beta_{jj'}.\beta^{jj'} + i\ (\mathrm{tg}2\beta^2.\beta)_{jj'}\,v^j v^{j'} + \ldots$$

$$i\ (\cos 2\beta^{-2}.\beta)_{jj'}\,a^j a^{j'}\ -\ 2i\ (\sin 2\beta.\cos 2\beta^{-2})_{jj'}\,a^j v^{j'}\ ;$$

où (compte tenu de l'identité $\mathrm{tg}^2+1 = 1/\cos^2$) on reconnaît l'expression de $(\partial_\beta F.\beta\,/\,F)$ donnée ci-dessus; ce qui achève la démonstration.

8 Système différentiel du second ordre pour les fonctions ~*f* étendues à l'espace de Fourier-Möbius FM(n)

Notre propos est de généraliser à FM(n) les résultats énoncés au §5 pour FM(1). Une fonction *f* sur R^n s'étend en une fonction ~*f* sur FM(n) suivant la formule:

$$\sim\! f(T\delta)\ =\ \langle\delta, T^{-1}f\rangle\ =\ \langle T\delta, f\rangle\ ;$$

une transformée T*f* de *f*, considérée comme fonction sur R^n, s'identifie à la restriction de ~*f* à la feuille de FM(n), image par T^{-1} de la feuille type $\{\delta_a\}$:

$$Tf(a) = \langle\delta_a, Tf\rangle = \langle T^{-1}\delta_a, f\rangle = \sim\! f(T^{-1}\delta_a)\ .$$

Soit $m \in FM(n)$, T une transformation du groupe de Fourier-Lorentz et f une fonction usuelle; on a:

$$\sim\!f(Tm) = \langle Tm, f\rangle = \langle m, T^{-1}f\rangle \ ;$$

$$\sim\!f.T = \sim\!(T^{-1} f)\ ;$$

Ainsi, l'étude de la fonction étendue $\sim\!f$ au voisinage du point généralisé Tm se ramène à celle d'une autre fonction étendue $\sim\!(T^{-1} f)$ (obtenue à partir de la transformée de f par T^{-1}) au voisinage du point m. Le système différentiel auquel satisfont les fonctions étendues a donc même structure en tout point, pourvu que l'on choisisse des coordonnées locales convenables.

On se placera donc sur FM(n) au voisinage de δ ou plus généralement d'un point δ_a de la feuille de base R^n. En prenant le paramétrage en [a, ß, c], on a:

$$\mathbf{F}[a_J, ß_{JJ}, c](v^J) =$$

$$(2\pi)^{-n/2}\ (\det(\cos 2ß))^{-1/2} \exp(i.((1/2).\mathrm{tg}2ß.(v^2 + a^2) - (a.v / \cos 2ß) + c))\ ;$$

$$\partial_ß \sim\!f([a, ß, c]) = \partial_ß \int\{{}^c\mathbf{F}[a, ß, c](v)\ \mathbf{F}f(v)\ dv \mid v \in R^n\}\ ;$$

pour ß=0, la dérivée de cos2ß est nulle et tg2ß ≈ 2ß; on a donc:

$$\partial_ß \sim\!f([a, 0, 0]) = (2\pi)^{-n/2} \int -i\ (v^2 + a^2)\ \mathbf{F}f(v)\ dv\ ;$$

$$\partial_ß^{jj'} \sim\!f([a, 0, 0]) = i\ (\partial_a^{\,j}\partial_a^{\,j'} - a_j a_{j'} \varepsilon^{ij}\varepsilon^{j'j'})\ f = i\ (\partial_a^{\,j}\partial_a^{\,j'} + a_j a_{j'} \varepsilon^{ij}\varepsilon^{j'j'}\partial_c\partial_c)\ f.$$

Ainsi se trouve suggérée l'étude de l'objet géométrique suivant, généralisant l'espace de Fourier-Möbius FM(n).

Sur une variété M, fibrée en cercles (dont la direction tangente est notée Δ), on a un feuilletage (analogue de celui défini par les plaques de FM(n)) tel que l'espace tangent à M en tout point m est identifié à un espace de polynômes inhomogènes de degré 2, la direction Δ correspondant aux constantes et l'espace tangent à la plaque aux formes linéaires. Ainsi, tout vecteur tangent t à M en m est identifié à un tenseur d'ordre 2, d(t) sur l'espace tangent en m à la plaque.

Sur M, est définie une classe de fonctions (analogues des $\sim\!f$) caractérisée par la propriété qu'en tout point, (dans un système de coordonnées locales convenable associé au point), toute dérivée partielle d'ordre 1, ∂_t, est égale au produit par $\sqrt{(-1)}$ de la dérivée du second ordre, $\partial_{d(t)}$, calculée dans la direction de la plaque.

Sur un tel objet, on définit une connexion en procédant par analogie avec les constructions classiquement effectuées sur les variétés riemanniennes.

Dans le cas présent, en bref, la courbure se révèle par le terme en a^2 de la formule: $\partial_{\beta} = i\ (\partial_{aa} + a^2.\partial_{cc})$. Nous nous réservons de revenir sur l'étude de cette connexion.

Bibliographie

Freeman J. Dyson: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, A Lecture-Note and Reprint Volume*; Benjamin, (1966).

Ce volume nous a fait connaître la représentation du groupe unitaire comme extension du groupe orthogonal usuel (à 3 variables) par des opérateurs différentiels du second ordre; représentation utilisée par J. P. Elliott pour une symétrie approchée en physique nucléaire, notamment dans:

J. P. Elliott: Collective motion in the nuclear shell model; I. Classification schemes for states of mixed configurations, in *Proc. Royal Society (London)* **A245**, 128 (1958). (Cet article est reproduit dans le livre de F. J. Dyson.)

J. P. Elliott: Collective motion in the nuclear shell model; II., in *Proc. Royal Society (London)* **A245**, 562 (1958).

J. P. Elliott & M. Harvey: *Proc. Royal Society (London)* **A272**, 557 (1963).

On trouve dans la littérature mathématique des références à des travaux que nous n'avons pu consulter, sur la *Représentation du groupe symplectique qui contient la transformation de Fourier*. Il s'agit manifestement du même objet, sans la restriction d'unitarité qui semble convenir en physique.

À notre connaissance, la définition d'un espace étendu (espace de Fourier-Möbius selon la terminolgie proposée ici) et de la structure différentielle associée aux fonctions étendues, apparaît pour la première fois dans le présent article. La connexion associée à ce type de structure fait l'objet d'un travail non publié:

J.-P. Benzécri: *Connexion associée à une classe d'équations aux dérivées partielles*.