YOZO MATSUSHIMA

Chapitre IV Groupes de Lie compacts et groupes de Lie semi-simples

Cours de l'institut Fourier, tome 1 (1966), p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1966__1__A4_0>

Chapitre IV

GROUPES DE LIE COMPACTS ET GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

§1. VARIETES ORIENTABLES

Soit M une variété différentiable de dimension n.

Une p-forme différentielle sur M est une application ω qui à tout point x de M fait correspondre ω_x p-forme différentielle sur $T_x(M)$. Si $x^1, \dots, x^n$ sont des coordonnées locales dans un ouvert U de M, on considère les applications $f_{i_1 \dots i_p}$ définies pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ par

$$f_{i_1 \dots i_p}(q) = \omega_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)_q \right) \qquad \text{pour } q \in U .$$

La p-forme différentielle ω est dite continue (resp. différentiable) sur U si ces fonctions sont continues (resp. différentiables).

Définition :

La variété différentiable M, de dimension n, est dite orientable si il existe une n-forme différentielle ω différentiable sur M telle que

$$\omega_x \neq 0$$

pour tout $x \in M$.

Proposition :

On suppose que la variété M est un espace homogène d'un groupe de Lie G. Si en un point x_0 , le groupe d'isotropie linéaire de G est unimodulaire, alors M est orientable.

Soit $H = \{s,;\ sx_0 = x_0\}$ et soit $\tilde{H} = \{(T_s)_* \ ;\ s \in H\}$ le groupe d'isotropie linéaire de G en x_0 ; il est unimodulaire si chaque $(T_s)_*$ a pour déterminant 1. Soit ω_0 une n-forme différentielle non nulle sur $T_{x_0}(M)$. Soit x un point de M, puisque G opère transitivement sur M, il existe $s \in G$ tel que

$$x = sx_0 \quad .$$

Soit ω_x la n-forme sur $T_x(M)$ définie par

$$\omega_x(u_1, \dots, u_n) = \omega_{x_0}\left((T_{\bar{s}^1})_* u_1, \dots, (T_{\bar{s}^1})_* u_n\right) \quad .$$

Si s' est un autre élément de G tel que

$$x = s'x_0 \quad ,$$

soit $t = \bar{s}^1 s'$ alors

$$\omega_{x_0}\left((T_{\bar{s}^1})_* u_1, \dots, (T_{\bar{s}^1})_* u_n\right) = \omega_{x_0}\left((T_t)_* (T_{\bar{s}'^1})_* u_1, \dots, (T_t)_* (T_{\bar{s}'^1})_* u_n\right)$$

mais $tx_0 = \bar{s}^1 s'x_0 = \bar{s}^1 x = x_0$, c'est-à-dire que t appartient à H donc que $(T_t)_*$ appartient à $\tilde{H}$ et qu'alors

$$\omega_{x_0}\left((T_t)_* v_1, \dots, (T_t)_* v_n\right) = \left[\omega_{x_0}(v_1, \dots, v_n)\right] \times \left[\text{dét}(T_t)_*\right]$$

donc

$$\omega_{x_0}\left((T_{\bar{s}^1})_* u_1, \ldots, (T_{\bar{s}^1})_* u_n\right) = \omega_{x_0}\left((T_{\bar{s}'^1})_* u_1, \ldots, (T_{\bar{s}'^1})_* u_n\right)$$

puisque $\tilde{H}$ est supposé unimodulaire. Donc la définition de ω_x est indépendante du choix du s tel que

$$x = sx_0 \quad .$$

On a ainsi défini une n-forme différentielle ω sur M, telle que

$$\omega_x \neq 0$$

pour tout $x \in M$ puisqu'on a choisi $\omega_{x_0} \neq 0$. On vérifie facilement que cette n-forme est différentiable sur M. Donc la variété M est orientable.

<u>Corollaire 1</u> :

<u>La variété différentiable sous-jacente d'un groupe de Lie est orientable</u>.

Ceci découle en effet de la proposition si on considère le groupe de Lie comme espace homogène de lui-même.

<u>Corollaire 2</u> :

<u>Une sphère est orientable</u>.

En effet, la sphère S^n est homéomorphe au quotient $SO(n+1)/SO(n)$. C'est un espace homogène de $SO(n+1)$ et le groupe d'isotropie d'un point est $SO(n)$. Le groupe d'isotropie linéaire est donc unimodulaire et on peut appliquer le théorème.

Orientation d'une variété différentiable orientable :

Soit M une variété différentiable orientable et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des n-formes continues sur M vérifiant $\omega_x \neq 0$ pour tout $x \in M$.

1° cas : Si M est connexe. Soient ω et θ des éléments de $\mathcal{F}$, pour tout point x, il existe un scalaire non nul $f(x)$ tel que

$$\omega_x = f(x)\theta_x$$

puisque l'espace vectoriel des n-formes sur $T_x(M)$ est de dimension 1 et puisque ω_x et θ_x sont différents de 0. On vérifie facilement que la différentiabilité de ω et θ entraîne celle de $f : x \longrightarrow f(x)$. Pour tout $x \in M$, $f(x)$ est non nul donc, puisque M est connexe, $f(x)$ est ou bien toujours positif, ou bien toujours négatif. On dit que ω et θ sont équivalents si f est positive ; ceci définit une relation d'équivalence qui partage $\mathcal{F}$ en deux classes d'équivalences. Une classe d'équivalence de $\mathcal{F}$ est par définition une orientation de M. Il y a donc pour une variété orientable M, deux orientations possibles. Si C est une orientation de M, le couple (M, C) est une variété orientée, et on dit que C est une orientation positive de (M, C) et que l'autre orientation C' est une orientation négative de (M, C) . Une n forme ω qui est dans la classe d'équivalence C est dite une n-forme différentielle positive, (ou un élément de volume) de la variété orientée (M, C) .

On écrira parfois simplement M en sous-entendant une variété orientée.

2° cas : Si M n'est pas connexe. Soient $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ les composantes connexes de M. Une orientation de M est un ensemble $C = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ où C_α est une orientation de M_α . Le couple (M, C) est une variété orientée. Une n-forme différentielle ω sur M est une n-forme positive (ou élément de

<u>volume</u>) si pour tout $\alpha \in A$ la restriction ω_α de ω à M_α est dans C_α . Soient alors $x^1, \ldots, x^n$ des coordonnées locales définies dans un ouvert U connexe, soit $f_\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à q associe

$$f_\omega(q) = \omega_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_q\right) \quad ,$$

c'est une fonction différentiable qui est ou bien toujours positive, ou bien toujours négative, dans U. Un système de coordonnées locales défini dans U (pas forcément connexe) est dit <u>positif</u> si, pour ω forme positive, la fonction f_ω correspondante est positive sur chaque composante connexe de U ; si f_ω est toujours négative, le système de coordonnées est dit négatif. Un système de coordonnées déduit d'un système positif par une permutation paire (resp. impaire) est donc un système positif (resp. négatif). Etant donnée une orientation d'une variété M, il existe toujours un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M tel que tous les systèmes de coordonnées correspondants soient positifs (il suffit en effet, étant donné un atlas quelconque, de faire une permutation impaire des coordonnées, sur toute composante connexe d'un U_α où le système donné est négatif).

<u>Remarque</u> :

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées positif défini sur U et $(y^1, \ldots, y^n)$ un système de coordonnées positif défini sur V, alors sur $U \cap V$ le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ est positif.

§2. INTEGRALE D'UNE n FORME DIFFERENTIELLE SUR UNE VARIETE ORIENTEE DE DIMENSION n.

Soit M une variété différentiable orientée. Soit θ une n-forme continue à support compact. (Le support de θ est l'ensemble des $x \in M$ tels que θ_x soit non nulle).

<u>1° cas</u> : On suppose que le support de θ est contenu dans un ouvert cubique Q, qui est contenu dans un ouvert U sur lequel il y a des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$, et qui est défini par $Q = \{q \in U \,;\, |x^i(q)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$. On suppose le système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ positif (ce qui est toujours possible moyennant une permutation sur les coordonnées) et on note ψ l'application de U dans $\mathbb{R}^n$ définie par ces coordonnées. En tout point q, on a $\theta_q = f(q)(dx^1)_q \wedge \ldots \wedge (dx^n)_q$ avec $f(q) = \theta_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_q\right)$. Par définition, <u>l'intégrale de θ sur M</u>, notée $\int_M \theta$ est égale à

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \cdots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f \circ \psi^{-1}\, du^1 \ldots du^n \quad ,$$

car cette intégrale multiple existe puisque θ est continue et ne dépend pas du choix des coordonnées locales et de l'ouvert cubique Q contenant le support de θ. En effet, soit $(y^1, \ldots, y^n)$ un système positif de coordonnées locales définies dans un ouvert U' et soit $Q' = \{q \in U' \,;\, |x^i(q)| < \epsilon',\ i = 1, \ldots, n\}$ un ouvert cubique supposé contenant le support de θ. Soit ψ' l'application de U' dans $\mathbb{R}^n$ définie par les coordonnées y^i et soit $g(q) = \theta_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_q\right)$ On définirait alors l'intégrale de θ par

$$\int_M{}' \theta = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \cdots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} g \circ \psi'^{-1}\, dv^1 \ldots dv^n \quad .$$

Soit $W = Q \cap Q'$, il contient le support de θ, et $h = \psi \circ \psi'^{-1}$ est un difféomorphisme de $\psi'(W)$ sur $\psi(W)$ (dont on notera h^i les composantes) et on a :

$$\int_M \theta = \int_{\psi(W)} f \circ \psi^{-1}\, du^1 \dots du^n = \int_{\psi'(W)} (f \circ \psi^{-1} \circ h) \left|\text{dét} \frac{\partial h^i}{\partial v^j}\right| dv^1 \dots dv^n \qquad (1)$$

Or $f \circ \psi^{-1} \circ h = f \circ \psi'^{-1}$ et d'autre part

$$g(q) = \theta_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_q \right) = \left(\text{dét} \frac{\partial h^i}{\partial v^j}\right) \theta_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_q \right)$$

$$= \left(\text{dét} \frac{\partial h^i}{\partial v^j}\right) f(q) \quad .$$

Mais puisque $(x^1, \dots, x^n)$ et $(y^1, \dots, y^n)$ sont des systèmes de coordonnées positifs, le déterminant de $\left(\frac{\partial h^i}{\partial v^j}\right)$ est égal à sa valeur absolue et d'après (1), on a

$$\int_M \theta = \int_{\psi'(W)} g \circ \psi'^{-1}\, dv^1 \dots dv^n = \int_M' \theta \quad .$$

On peut donc bien définir l'intégrale de θ de cette manière.

<u>2° cas</u> : Cas général en supposant M paracompacte. Alors on peut choisir un recouvrement ouvert localement fini $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tel que chaque Q_α soit un ouvert cubique. Soit f_α une partition de l'unité associée à ce recouvrement, alors $\theta = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \theta$, mais puisque le support de θ est compact, il est recouvert par un nombre fini de Q_α et $\theta = \sum_{i=1}^{m} f_i \theta$ où pour chaque i, $f_i \theta$ est une **n-forme** dont le support est contenue dans Q_i et dont on sait donc définir l'intégrale sur M. Par définition, <u>l'intégrale de θ</u> sur M est

$$\int_M \theta = \sum_{i=1}^{m} \int_M (f_i \theta) \quad .$$

(On peut facilement vérifier que cette définition est indépendante du choix de la décomposition de θ en somme de $f_i\,\theta$).
L'intégrale de θ sur M est une fonction linéaire de la n-forme θ : en effet, $\int_M (\theta + \eta) = \int_M \theta + \int_M \eta$ et $\int_M \lambda\theta = \lambda \int_M \theta$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ découlent de la définition.

Si ω est un élément de volume de M et si f est une fonction continue sur M à support compact, alors $f\omega$ est une n-forme continue sur M à support compact et on peut donc considérer l'intégrale $\int_M f\omega$ qui jouit des propriétés

$$\int_M (f + g)\omega = \int_M f\omega + \int_M g\omega$$

et

$$\int_M \lambda f\omega = \lambda \int_M f\omega \qquad \text{si} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

De plus, si f est toujours non négative et non identiquement nulle, l'intégrale $\int_M f\omega$ est positive.
Si M est compact, on peut considérer l'intégrale $\int_M \omega$, c'est par définition le volume de M relatif à ω, noté $V_\omega(M)$.

Soit φ un difféomorphisme de M. Si ω est une n-forme, on définit la n-forme $\varphi^*\omega$ par $(\varphi^*\omega)_x = \omega_{\varphi(x)} \circ (\varphi_*)_x$, elle est non nulle en chaque point si ω est non nulle en chaque point. On dit que φ conserve l'orientation (resp. inverse l'orientation) si la n-forme $\varphi^*\omega$ est positive (resp. négative) quand ω est un élément de volume.

Lemme :

Soit M une variété orientée, φ un difféomorphisme de M, et θ une n-forme continue sur M. Alors si φ conserve l'orientation $\int_M \varphi^*\theta = \int_M \theta$, et si φ inverse l'orientation $\int_M \varphi^*\theta = -\int_M \theta$.

En effet, il suffit de le montrer dans le cas où le support de θ est contenu dans un ouvert cubique $Q = \{q\ ;\ |x^i(q)| < \epsilon,\ i = 1, \dots, n\}$, et dans ce cas le support de $\varphi^*\theta$ est l'image réciproque par φ du support de θ et $y^1 = x^1 \circ \varphi, \dots, y^n = x^n \circ \varphi$ sont des coordonnées locales au voisinage du support de $\varphi^*\theta$ qui est contenu dans le voisinage cubique $Q' = \{p\ ;\ |x^i \circ \varphi(p)| < \epsilon,\ i = 1, \dots, n\}$ et par définition de l'intégrale, on a

$$\int_M \varphi^*\theta = \alpha \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \dots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} g \circ (\psi \circ \varphi)^{-1}\, du^1 \dots du^n$$

où

$$g(q) = (\varphi^*\theta)_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_q \right)$$

$$= \theta_{\varphi(q)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\varphi(q)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{\varphi(q)} \right)$$

et où $\alpha = +1$ (resp. -1) si $(y^1, \dots, y^n)$ est un système de coordonnées positif (resp. négatif). On a donc

$$\int_M \varphi^*\theta = \alpha \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \dots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (g \circ \varphi^{-1}) \circ \psi^{-1}\, du^1 \dots du^n = \alpha \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \dots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f \circ \psi^{-1}\, du^1 \dots du^n$$

avec $f(q) = \theta_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_q \right)$, donc

$$\int_M \varphi^*\theta = \alpha \int_M \theta \quad .$$

Or le système de coordonnées $(y^1, \ldots, y^n)$ est positif (resp. négatif) si l'application φ conserve (resp. inverse) l'orientation. D'où le lemme énoncé.

Soit f une fonction continue sur M, à support compact et soit ω une n-forme différentielle. On considère la forme $\theta = f\omega$. On a, si φ est un difféomorphisme de M,

$$(\varphi^*\theta)_x = (\varphi^* f\omega)_x = (f\omega)_{\varphi(x)} (\varphi_*)_x = f\big(\varphi(x)\big)\ \omega_{\varphi(x)} \circ (\varphi_*)_x = f\left[\varphi(x)\right] (\varphi^*\omega)_x$$

pour tout $x \in M$, donc

$$\varphi^*\theta = (f \circ \varphi)\ \varphi^*\omega \quad ,$$

donc

$$\int_M (f \circ \varphi)\ \varphi^*\omega \begin{cases} = \displaystyle\int_M f\omega & \text{si } \varphi \text{ conserve l'orientation.} \\ = - \displaystyle\int_M f\omega & \text{si } \varphi \text{ inverse l'orientation.} \end{cases}$$

Si ω est une n-forme différentiable non nulle, $\varphi^*\omega$ est de la forme $c\omega$ où c est une fonction différentiable sur M.
La fonction c est positive si φ conserve l'orientation et négative si φ inverse l'orientation. Si c est constante, alors

$$\int_M (f \circ \varphi)\ \varphi^*\omega = c \int_M (f \circ \varphi)\omega$$

et donc

$$\int_M f\omega = |c| \int_M (f \circ \varphi)\omega \quad .$$

<u>Définition</u> :

On dit qu'un difféomorphisme φ de M <u>conserve le volume</u> si $c = \pm 1$, c'est-à-dire si

$$\varphi^*\omega = \pm\ \omega \quad .$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme :

Si un difféomorphisme φ de M conserve le volume, alors pour toute fonction f continue sur M à support compact, on a

$$\int_M (f \circ \varphi)\omega = \int_M f\omega \quad .$$

§3. INTEGRALE INVARIANTE SUR UN GROUPE DE LIE

Soit G un groupe de Lie, la variété sous-jacente est une variété orientable et il existe une n-forme $\omega \neq 0$ invariante à gauche, c'est-à-dire telle que

$$L_g^* \omega = \omega \qquad \forall g \in G \quad .$$

On peut choisir une orientation de G telle que ω soit positive.

L'égalité $L_g^* \omega = \omega$ signifie que L_g conserve le volume. Donc pour toute fonction f continue sur G et à support compact, et pour tout $g \in G$, on a

$$\int_G (f \circ L_g)\omega = \int_G f\omega \quad .$$

On va chercher à quelles conditions les translations à droite conservent aussi le volume : pour tout s et tout g de G, on a $L_s \circ R_g = R_g \circ L_s$, donc

$$L_s^* R_g^* \omega = R_g^* L_s^* \omega = R_g^* \omega \quad ,$$

donc $R_g^* \omega$ est invariante à gauche. D'autre part,

$$(R_g^* \omega)_e (u_1, \ldots, u_n) = \omega_g(R_{g*} u_1, \ldots, R_{g*} u_n)$$

$$= \omega_e \left(L_{g^{-1}*} R_{g*} u_1, \ldots\right)$$

$$= \left(\text{dét Ad}(g^{-1})\right) \omega_e(u_1, \ldots, u_n)$$

et puisque $R_g^* \omega$ est invariante à gauche on a

$$(R_g)^* \omega = \left(\text{dét } Ad(g^{-1})\right) \omega \quad \forall g \in G \quad .$$

Donc R_g conserve le volume si dét $Ad(g^{-1}) = \pm 1$.

Définition :

Un groupe de Lie est dit unimodulaire si dét $Ad(g)$ est égal à ± 1 pour tout $g \in G$.

D'après ce qui précède dans un groupe de Lie unimodulaire les translations à droite conservent le volume.

Lemme :

Un groupe de Lie compact est unimodulaire.

En effet, si il existait $g \in G$ tel que

$$|\text{dét } Ad(g)| \neq 1 \quad ,$$

alors si $|\text{dét } Ad(g)| > 1$, alors $|\text{dét } Ad(g^n)| \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$, or l'application $s \longrightarrow$ dét $Ad(s)$ est continue, l'image de G par cette application est donc bornée, donc l'hypothèse est absurde. (Et si $|\text{dét } Ad(g)| < 1$, on a $|\text{dét } Ad(g^{-1})| > 1$) . Donc pour tout $g \in G$, on a

$$\text{dét } Ad(g) = \pm 1 \quad .$$

Soit G un groupe de Lie unimodulaire et soit $C_0(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact. Pour $f \in C_0(G)$, soit $I(f) = \int_G f\omega$. (ω est toujours un élément de volume invariant à gauche de G).

L'application $I : C_0(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et vérifie les propriétés suivantes :

1) $I(f) > 0$ si $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$.

2) $I(f \circ L_g) = I(f) \quad \forall\, g \in G$.

3) $I(f \circ R_g) = I(f) \quad \forall\, g \in G$.

Remarque :

Si ψ est l'application : $x \longrightarrow x^{-1}$ de G dans G, on peut montrer que $I(f \circ \psi) = I(f)$.

Par définition, $I(f)$ s'appelle l'intégrale invariante de f sur G.

Si G est compact, en choisissant $\frac{1}{V_\omega(M)}\,\omega$ au lieu de ω, on peut toujours supposer que $\int_M \omega = 1$, donc que

$$I(1) = 1 \quad .$$

Théorème (Weyl) :

Soit G un groupe de Lie compact et soit ρ une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel V (réel ou complexe). Alors il existe un produit scalaire de V invariant par G.

"Invariant par G" signifie que $\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout $g \in G$ et tous $u, v \in V$.

Démonstration :

Soit (u, v) un produit scalaire quelconque de V.
Pour u, v fixes, soit $f(g\,;\,u, v) = \big(\rho(g)u, \rho(g)v\big)$. On pose $\langle u, v \rangle = I\big(f(\ \ ;\,u, v)\big)$ où $f(\ \ ;\,u, v)$ représente la fonction

$g \longrightarrow f(g\ ;\ u,\ v)$; c'est un produit scalaire sur V. On a

$$\langle \rho(h)u,\ \rho(h)v\rangle = I\Big(f(\ \ ;\ \rho(h)u,\ \rho(h)v)\Big) .$$

Or

$$f\Big(g\ ;\ \rho(h)u;\ \rho(h)v\Big) = \Big(\rho(g)\ \rho(h)u,\ \rho(g)\ \rho(h)v\Big)$$

$$= f(gh\ ;\ u,\ v)$$ car ρ est une représentation,

donc

$$f\Big(\ \ ;\ \rho(h)u,\ \rho(h)v\Big) = f(\ \ ;\ u,\ v) \circ R_h .$$

Donc

$$\langle \rho(h)u,\ \rho(h)v\rangle = I\Big(f(\ \ ;\ u,\ v)\Big) = \langle u,\ v\rangle .$$

Le produit scalaire $\langle u,\ v\rangle$ répond donc à la question.

§4. STRUCTURE DES GROUPES DE LIE COMPACTS

Définitions :

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie.

1) Le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{G}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{G}$ tels que

$$[X,\ Y] = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{G}$. C'est un idéal de $\mathfrak{G}$.

2) L'algèbre dérivée $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{G}$ est le sous-espace de $\mathfrak{G}$ engendré par les éléments de la forme $[X,\ Y]$. C'est un idéal de $\mathfrak{G}$.

3) L'algèbre $\mathfrak{G}$ est dite simple si elle ne possède pas d'idéaux autres que $\{0\}$ et $\mathfrak{G}$.

4) <u>L'algèbre $\mathfrak{G}$ est dite semi-simple si il existe des algèbres $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$, simples et non abéliennes qui sont des idéaux de $\mathfrak{G}$, tels que $\mathfrak{G}$ soit la somme directe</u>

$$\mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_n \quad .$$

<u>Un groupe de Lie est dit simple (resp. semi-simple) si son algèbre de Lie est simple (resp. semi-simple)</u>.

Une forme bilinéaire φ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est dite <u>$\mathfrak{G}$-invariante</u> si $\varphi\big([X, Y], Z\big) + \varphi\big(Y, [X, Z]\big) = 0$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{G}$.

<u>Exemple</u> :

La forme bilinéaire B définie par $B(X, Y) = \text{Trace}\big(\text{ad}(X)\ \text{ad}(Y)\big)$ est $\mathfrak{G}$ invariante. On l'appelle la <u>forme de Killing</u>.

On peut montrer sans difficulté le résultat suivant :

<u>Proposition 1</u> :

<u>Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, et soit φ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{G}$. Alors</u>

1) <u>Si φ est invariante par $\text{Ad}(G)$, elle est $\mathfrak{G}$-invariante</u>.

2) <u>Réciproquement si φ est $\mathfrak{G}$-invariante et si G est connexe, alors φ est invariante par $\text{Ad}(G)$</u> .

(φ invariante par $\text{Ad}(G)$ signifie que

$$\varphi\big(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y\big) = \varphi(X, Y)$$

pour tout $g \in G$ et pour tous $X, Y \in \mathfrak{G}$).

Corollaire :

Si G est un groupe de Lie compact, alors il existe sur $\mathfrak{G}$ un produit scalaire $\mathfrak{G}$ invariant.

Car d'après le théorème du §3., il existe sur $\mathfrak{G}$ un produit scalaire invariant pour la représentation Ad .

Proposition 2 :

On suppose qu'il existe sur $\mathfrak{G}$ un produit scalaire $\mathfrak{G}$-invariant. Alors

1) Pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{G}$, le supplémentaire orthogonal

$$\mathfrak{A}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{G} \; ; \; \langle X, Y\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad Y \in \mathfrak{A}\}$$

est aussi un idéal de $\mathfrak{G}$ et

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^{\perp} \quad .$$

2) $\mathfrak{G}$ est somme directe de centre $\mathfrak{Z}$ et de son algèbre dérivée $\mathfrak{DG}$. De plus $\mathfrak{DG}$ est semi-simple.

En effet, soit $X \in \mathfrak{A}^{\perp}$ et $Y \in \mathfrak{G}$, alors pour tout $W \in \mathfrak{A}$,

$$\langle [Y, X], W\rangle = - \langle X, [Y, W]\rangle$$

puisque le produit scalaire est $\mathfrak{G}$-invariant ; or $[Y, W] \in \mathfrak{A}$ puisque $\mathfrak{A}$ est un idéal et $\langle X, [Y, W]\rangle$ est donc nul puisque $X \in \mathfrak{A}^{\perp}$; donc

$$\langle [Y, X], W\rangle = 0 \quad ,$$

donc

$$[Y, X] \in \mathfrak{A}^{\perp} \quad ,$$

donc $\mathfrak{A}$ est un idéal et

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^{\perp} \quad .$$

Soit $Z \in \mathfrak{Z}$, centre de $\mathfrak{G}$, soient $X, Y \in \mathfrak{G}$, alors

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z\rangle &= - \langle Y, [X, Z]\rangle \\ &= 0 \quad \text{car} \quad [X, Z] = 0 \quad , \end{aligned}$$

donc Z est orthogonal aux éléments de la forme $[X, Y]$, donc $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{DG}^{\perp}$.

Réciproquement, soit $Z \in \mathfrak{DG}^{\perp}$, alors $\langle [X, Y], Z \rangle = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{G}$, donc

$$\langle Y, [X, Z] \rangle = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{G}$, donc

$$[X, Z] = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{G}$, c'est-à-dire $Z \in \mathfrak{Z}$. Donc

$$\mathfrak{DG}^{\perp} \subset \mathfrak{Z} \quad .$$

Donc

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{DG}^{\perp}$$

et $\mathfrak{G}$ est la somme directe

$$\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{DG} \quad .$$

Pour la dernière assertion, on utilise le lemme suivant :

Lemme :

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$, de dimension finie). On suppose qu'il existe sur $\mathfrak{A}$ un produit scalaire $\mathfrak{A}$-invariant et que le centre de $\mathfrak{A}$ soit $\{0\}$. Alors $\mathfrak{A}$ est semi-simple.

En effet, ou bien $\mathfrak{A}$ est simple, ou bien on peut trouver dans $\mathfrak{A}$ un idéal minimal $\mathfrak{A}_1$. Alors d'après la première partie de la proposition, on a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_1^{\perp} \quad .$$

L'algèbre $\mathfrak{A}_1$ est simple car si elle contenait un idéal $\mathfrak{J}$, ce serait un idéal de $\mathfrak{A}$ (car si $z \in \mathfrak{A}$, $z = x + y$ où $x \in \mathfrak{A}_1$ et $y \in \mathfrak{A}_1^{\perp}$, et si $t \in \mathfrak{J}$, alors

$$[t, z] = [t, x] + [t, y]$$

qui appartient à $\mathfrak{J}$ car $[t, x] \in \mathfrak{J}$ et $[t, y] = 0$ puisqu'il appartient à $\mathfrak{A}_1$ et à $\mathfrak{A}_1^{\perp}$) et $\mathfrak{A}_1$ ne serait pas minimal. D'autre part, $\mathfrak{A}_1$ n'est pas abélienne, sinon elle serait contenue dans le centre de $\mathfrak{A}$ (car si $[x, y] = 0$ pour $x, y \in \mathfrak{A}_1$, alors pour tout $z \in \mathfrak{A}$, $z = y + y'$ où $y \in \mathfrak{A}_1$ et $y' \in \mathfrak{A}_1^{\perp}$

donc

$$[x, z] = [x, y] + [x, y'] = 0$$

et x appartient au centre de $\mathfrak{A}$) ; or le centre de $\mathfrak{A}$ est vide. On considère maintenant $\mathfrak{A}_1^{\perp}$, ou bien c'est une algèbre simple, ou bien elle possède un idéal minimal $\mathfrak{A}_2$ qui est simple et non abélien, et ainsi de suite, la dimension de $\mathfrak{A}$ étant finie, on peut mettre $\mathfrak{A}$ sous la forme $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_k$ où les $\mathfrak{A}_i$ sont des idéaux simples et non abéliens ; c'est-à-dire que $\mathfrak{A}$ est semi-simple. c.q.f.d.

Alors si on considère l'algèbre $\mathfrak{DG}$, le produit scalaire est $\mathfrak{G}$-invariant donc en particulier $\mathfrak{DG}$-invariant. D'autre part, le centre de $\mathfrak{DG}$ est $\{0\}$: en effet le centre de $\mathfrak{DG}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{Z} + \mathfrak{DG}$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{Z} = \mathfrak{DG}^{\perp}$, donc le centre de $\mathfrak{DG}$ est contenu dans $\mathfrak{DG} \cap \mathfrak{DG}^{\perp} = \{0\}$. Le lemme dit que $\mathfrak{DG}$ est semi-simple.

De la proposition 2 et du corollaire de la proposition 1, résulte le théorème suivant :

Théorème 1 :

Soit G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{G}$ est égale à la somme directe de son centre $\mathfrak{Z}$ et de son algèbre dérivée $\mathfrak{DG}$. De plus $\mathfrak{DG}$ est semi-simple.

Corollaire :

Soit G un groupe de Lie compact, alors pour que G soit semi-simple, il faut et il suffit que le centre de G soit fini.

En effet d'après le théorème, pour que $\mathfrak{G}$ soit semi-simple, il faut et il suffit que $\mathfrak{Z}$ soit $\{0\}$. Alors le centre de G est discret et donc fini.

Soit G un groupe de Lie compact et connexe. Soit θ une p-forme différentielle sur G. On définit l'<u>intégrale invariante</u> $I(\theta)$ de θ de la façon suivante : pour $x \in G$ et $u = u_1, \dots, u_p \in \left(T_x(G)\right)^p$, soit $f(g\ ;\ x\ ;\ u) = (L_g^* \theta)_x (u_1, \dots, u_p)$, <u>alors par définition</u> :

$$\left(I(\theta)\right)_x (u_1, \dots, u_p) = I\left(f(\quad ;\ x\ ;\ u_1, \dots, u_p)\right) .$$

Alors $\left(I(\theta)\right)_x$ est une p-forme alternée sur $T_x(G)$ et $x \longrightarrow \left(I(\theta)\right)_x$ définit une p-forme différentiable $I(\theta)$ sur G.

<u>Propriétés</u> :

1) $I(\theta)$ est invariante à gauche, en effet

$$\begin{aligned}\left(L_h^* I(\theta)\right)_x (u) &= \left(I(\theta)\right)_{hx} (L_{h*} u)\\ &= I\left(f(\quad ;\ hx\ ;\ L_{h*} u)\right)\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}f(g\ ;\ hx\ ;\ L_{h*} u) &= (L_g^* \theta)_{hx} (L_{h*} u)\\ &= (L_h^* L_g^* \theta)_x (u)\\ &= (L_{gh}^* \theta)_x (u)\\ &= f(R_h g\ ;\ x\ ;\ u)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(L_h^* I(\theta)\right)_x (u) &= I\left(f(\quad ;\ x\ ;\ u) \circ R_h\right)\\ &= I\left(f(\quad ;\ x\ ;\ u)\right)\\ &= \left(I(\theta)\right)_x (u) .\end{aligned}$$

2) $I(d\theta) = d\, I(\theta)$, ceci résulte du fait que $d\, L_g^* \theta = L_g^* d\theta$.

3) Soit $C : [0, 1] \longrightarrow G$ un lacet de G, et soit θ une 1-forme fermée sur G, alors $\int_C \theta = \int_C I(\theta)$.

En effet, on suppose que ω est un élément de volume tel que

$$V_\omega(G) = 1 \quad .$$

Alors par définition

$$\int_C I(\theta) = \int_0^1 \left[(I(\theta))_{C(t)} \; \dot{C}(t) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\int_G (L_g^* \, \theta)_{C(t)} \; \dot{C}(t) \omega \right] dt$$

$$= \int_G \left[\int_0^1 (L_g^* \, \theta)_{C(t)} \; \dot{C}(t) dt \right] \omega$$

$$= \int_G \left[\int_C L_g^* \, \theta \right] \omega$$

$$= \int_C L_g^* \, \theta$$

$$= \int_{L_g \circ C} \theta$$

puisque G est connexe, il existe une courbe $t \longrightarrow g_t$ dans G telles que

$$g_0 = e \quad \text{et} \quad g_1 = g \quad ,$$

et les courbes $C_t = L_{g_t} \circ C$ sont des lacets tels que

$$C_0 = C \quad \text{et} \quad C_1 = L_g \circ C \quad ,$$

donc C et $L_g \circ C$ sont homotopes, et puisque θ est fermée, $\int_{L_g \circ C} \theta = \int_C \theta$, donc

$$\int_C I(\theta) = \int_C \theta$$

c.q.f.d.

Si de plus, G est semi-simple, θ étant toujours une 1-forme fermée, alors $I(\theta) = \theta$.

En effet, soit $\eta = I(\theta)$ et soient $X, Y \in \mathfrak{G}$, alors

$$d\eta(X, Y) = X\big(\eta(Y)\big) - Y\big(\eta(X)\big) - \eta([X, Y])$$

mais $\eta(Y)$ et $\eta(X)$ sont constants car η, X et Y sont invariant à gauche, donc

$$X\big(\eta(Y)\big) = Y\big(\eta(X)\big) = 0$$

et donc

$$d\eta(X, Y) = -\eta([X, Y]) \quad .$$

Or $d\eta = dI(\theta) = I(d\theta) = 0$, puisque θ est fermée, donc η est nulle sur les éléments de la forme $[X, Y]$. Mais puisque G est semi-simple, $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ et donc tout élément de $\mathfrak{G}$ est de la forme $\sum_i \left[X_i, Y_i\right]$ et $\eta(W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{G}$. Donc

$$\eta_e(W_e) = 0$$

pour tout $W_e \in T_e(G)$ donc

$$\eta_e = 0 \quad \text{et} \quad \eta = I(\theta) = 0$$

car η est invariante à gauche.

Alors $\int_C \theta$ est nul car $\int_C \theta = \int_C I(\theta)$. C'est-à-dire que θ est une forme exacte. (C'est-à-dire qu'il existe une fonction f telle que

$$\theta = df \quad).$$

On peut donc énoncer :

<u>Théorème 2</u> :

<u>Soit G un groupe de Lie compact, connexe et semi-simple et soit θ une 1-forme fermée dans G. Alors θ est une forme exacte.</u>

Soit toujours G un groupe de Lie compact, connexe et semi-simple. Soit $\mathcal{Z}_1$ l'ensemble des 1-formes fermées θ et $\mathcal{B}_1$ l'ensemble des formes exactes df. D'après le théorème 2, on a

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{Z}_1 \quad .$$

D'une manière générale (pour une variété M), on a toujours $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{Z}_1$. Soit $H^1(M) = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{B}_1}$ le groupe d'homotopie. Soit $b_1(M)$ la dimension de $H^1(M)$, on l'appelle le <u>premier nombre de Betti de M</u>. Soit $\pi(M)$ le groupe fondamental de M et soit $D\pi(M)$ le groupe des commutateurs de $\pi(M)$. Alors (théorème de Rham) le rang du quotient $\pi(M)/D\pi(M)$ est égal à $b_1(M)$.

Dans le cas du groupe de Lie G, compact et connexe, le groupe fondamental est abélien, donc

$$b_1(M) = \text{rang de } \pi(G)$$

car $D\pi(G) = \{1\}$. De plus, si G est semi-simple $\mathcal{B}_1 = \mathcal{Z}_1$ donc

$$b_1(G) = 0 = \text{rang de } \pi(G)$$

ce qui entraîne que $\pi(G)$ est fini :

<u>Théorème 3</u> :

<u>Si G est un groupe de Lie compact, connexe et semi-simple, alors son groupe fondamental $\pi(G)$ est fini.</u>

<u>Remarque</u> :

Le revêtement universel $\tilde{G}$ de G est aussi compact (car le groupe fondamental est fini et si G est un groupe de Lie, $\tilde{G}$ est un groupe de Lie).

Proposition 3 :

Soit G un groupe de Lie compact, alors $B(X, X) \leq 0$ pour tout $X \in \mathfrak{G}$ et $B(X, X) = 0$ si et seulement si $X \in \mathfrak{z}$.
(B est la forme de Killing).

En effet, si G est compact, il existe un produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ tel que

$$\langle \mathrm{ad}(X) Y, Z \rangle = - \langle Y, \mathrm{ad}(X) Z \rangle$$

pour tous X, Y, Z dans $\mathfrak{G}$. C'est-à-dire que ${}^t\mathrm{ad}(X) = - \mathrm{ad}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{G}$, c'est-à-dire que la matrice $\mathrm{ad}(X)$ est antisymétrique ; alors les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ sont imaginaires pures et comme

$$B(X, X) = \mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}(X)^2$$

$$= \sum_i \lambda_i^2$$

où λ_i sont les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$, $B(X, X)$ est négatif ou nul. Alors $B(X, X) = 0$ si et seulement si les valeurs propres sont nulles. C'est-à-dire, puisque la matrice est antisymétrique si et seulement si $\mathrm{ad}(X) = 0$, c'est-à-dire

$$[X, Y] = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{G}$, c'est-à-dire $X \in \mathfrak{z}$, centre de $\mathfrak{G}$.

Proposition 4 :

Si la forme de Killing de $\mathfrak{G}$ est non dégénérée, alors toute dérivation D de $\mathfrak{G}$ est une dérivation intérieure.

(C'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathfrak{G}$ tel que

$$DY = (\mathrm{ad}\, A) Y = [A, Y]$$

pour tout $Y \in \mathfrak{G}$).

En effet, soit D une dérivation de $\mathfrak{G}$, et pour $X \in \mathfrak{G}$ soit $\psi(X) = \mathrm{Tr}(D \circ \mathrm{ad}\, X)$. Alors ψ est une forme linéaire sur $\mathfrak{G}$ et puisque B est non dégénérée, il existe un A unique dans $\mathfrak{G}$ tel que

$$\psi(X) = B(A, X) \qquad (1) \quad .$$

Soit alors $D' = D - \mathrm{ad}\, A$, c'est une dérivation de $\mathfrak{G}$, donc on a

$$D'[X, Y] = [D'X, Y] + [X, D'Y]$$

pour tous X, Y dans $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire

$$D' \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}(D'X) + \mathrm{ad}\, X \circ D' \qquad (2)$$

pour tout X dans $\mathfrak{G}$. D'autre part, pour X et Y dans $\mathfrak{G}$, on a

$$\begin{aligned} B(D'X, Y) &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}(D'X) \circ \mathrm{ad}\, Y\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(D' \circ \mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}X \circ D' \circ \mathrm{ad}Y\right) \quad \text{d'après (2)} \\ &= \mathrm{Tr}\left(D \circ \mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}A \circ \mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y\right) \\ &\quad - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}X \circ D \circ \mathrm{ad}Y\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}A \circ \mathrm{ad}Y\right) \end{aligned}$$

or la trace d'un produit de matrices ne change pas si on permute circulairement les termes du produit, donc

$$\begin{aligned} B(D'X, Y) &= \mathrm{Tr}\left(D \circ \mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}A \circ \mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y\right) \\ &\quad - \mathrm{Tr}\left(D \circ \mathrm{ad}Y \circ \mathrm{ad}X\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}A \circ \mathrm{ad}Y \circ \mathrm{ad}X\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(D \circ \mathrm{ad}[X, Y]\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}A \circ \mathrm{ad}[X, Y]\right) \\ &= \psi\left([X, Y]\right) - B\left(A, [X, Y]\right) \\ &= 0 \quad \text{d'après (1)} \quad . \end{aligned}$$

Puisque B est non dégénérée, la nullité de $B(D'X, Y)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{G}$ entraîne que $D' = 0$, c'est-à-dire que $D = \mathrm{ad}\, A$.

Remarque :

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathfrak{G}$ est semi-simple.

2) La forme de Killing de $\mathfrak{G}$ est non dégénérée.

3) $\mathfrak{G}$ ne possède pas d'idéaux abéliens non triviaux.

Proposition 5 :

Si G est connexe et si toute dérivation de $\mathfrak{G}$ est intérieure alors Ad(G) est un sous-groupe fermé de GL($\mathfrak{G}$) .

En effet, l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe fermé de GL($\mathfrak{G}$) , c'est l'ensemble des $\sigma \in$ GL($\mathfrak{G}$) vérifiant

$$[\sigma X, \sigma Y] = [X, Y] \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{G} \quad .$$

Et Ad(G) est la composante connexe de ce sous-groupe contenant 1. Car Ad(G) contient alors ad($\mathfrak{G}$) qui est l'ensemble des dérivations.

Théorème 4 :

Soit G un groupe de Lie connexe, alors une condition nécessaire et suffisante pour que G soit compact et semi-simple est que la forme de Killing de $\mathfrak{G}$ soit définie négative.

Cette condition est en effet nécessaire d'après la proposition 3.

Réciproquement, si la forme de Killing est définie négative, alors d'après la proposition 4, toute dérivation de $\mathfrak{G}$ est intérieure et donc d'après la proposition 5, Ad(G) est un sous-groupe fermé de GL($\mathfrak{G}$), donc Ad(G) est compact. Alors G est compact et semi-simple.

Soit G compact et connexe et soit $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\mathfrak{G} + \mathfrak{Z}$. Soit Z la composante connexe du centre de G contenant e. Alors Z est compact et Z est le sous-groupe de Lie de G correspondant à $\mathfrak{Z}$. Soit S le sous-groupe de Lie de G correspondant à $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$. Soit $X \in \mathfrak{D}\mathfrak{G}$. On voit que ad X est de la forme

$$\mathrm{ad}\, X = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}\, X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{ad}_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ désigne la représentation adjointe de $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$. On a alors

$$B_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}(X, X) = B(X, X) \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{D}\mathfrak{G} ,$$

$B_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ désignant la forme de Killing de $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$. Or, on sait que $B(X, X) \leq 0$ et $B(X, X) = 0 \Longleftrightarrow X \in \mathfrak{Z}$ et donc $B_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ est définie négative. Par suite S est compact et donc fermé dans G. Puisque $\mathfrak{D}\mathfrak{G} \cap \mathfrak{Z} = \{0\}$, on voit que $S \cap Z$ est fini. Soit $G' = S \times Z$ et soit φ l'application de G' dans G définie par $\varphi(s, t) = s \cdot t$ $(s \in S,\ t \in Z)$. On voit facilement que φ est un homomorphisme de G' <u>sur</u> G, et le noyau de φ est le sous-groupe N de G' des éléments de la forme (s, s^{-1}) où $s \in S \cap Z$, donc N est fini.

<u>Conclusion</u> :

Tout groupe de Lie compact connexe est un groupe quotient d'un produit direct d'un groupe compact, semi-simple et connexe et d'un tore par un sous-groupe distingué fini.