B. MALGRANGE

La classification des connexions irrégulières à une variable

Cours de l'institut Fourier, tome 17 (1982), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982__17__A1_0>

Institut Fourier
Université de Grenoble I

LA CLASSIFICATION DES CONNEXIONS IRREGULIERES A UNE VARIABLE

par B. Malgrange

1. INTRODUCTION.

Soient $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x\}$ l'espace des germes de fonctions holomorphes à l'origine, et $K = \mathcal{O}[x^{-1}]$ son corps des fractions. On notera par $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{K}$ leurs formalisés. Soit E un vectoriel de dimension finie sur K et ∂ une connexion sur E, i.e. une application $\mathbb{C}$-linéaire $E \to E$ vérifiant $\partial(\varphi e) = \frac{d\varphi}{dx} e + \varphi \partial e$ pour $\varphi \in K$, $e \in E$. Rappelons que ∂ est dit "régulier" s'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E sur K dans laquelle la matrice M de la connexion (définie par $\partial e_j = \Sigma m_{ij} e_i$) a un pôle simple. Autrement, ∂ est dit "irrégulier".

La classification dans le cas régulier est supposée connue. Je me propose ici d'exposer le cas irrégulier. Le principe de cette classification remonte au mémoire fondamental de Birkhoff [B], trop longtemps méconnu sauf par un petit nombre de spécialistes. En fait, Birkhoff traite le cas où, dans une base convenable, la partie la plus polaire de M a ses valeurs propres distinctes ; sur ce cas, voir aussi [B-J-L] . Dans le cas général, une étude détaillée se trouve dans Jurkat [J]. Je donnerai ici une version de la classification due à Deligne [D], qui s'appuie sur des remarques antérieures de [S2] et [M2]. Dans toutes ces méthodes, un ingrédient essentiel est un théorème de matrices holomorphes inversibles de Sibuya [S1], dont une variante se trouve déjà essentiellement dans [B].

Il me reste à m'excuser pour avoir si longtemps tardé à rédiger un exposé sur ces questions, et aussi pour l'impossibilité où je suis de donner la totalité des références bibliographiques sur ce sujet, références qu'il faudrait faire commencer au moins à Poincaré, voire Laplace.

Institut Fourier - B. P. 116 - 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS - Tél. (76) 54.81.45

2. CLASSIFICATION FORMELLE.

Si L est une extension finie de K , il existe $t \in L$ et p entier > 0 tels qu'on ait $t^p = x$, et $L = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] = K[t]$. La connexion ∂ supposée donnée sur E s'étend d'une manière unique à $E \underset{K}{\otimes} L = F$ par $(t\partial_t)(t^k \otimes e) = k(t^k \otimes e) + \frac{1}{p}(t^k \otimes (x\partial_x)e)$. Si $\alpha \in L \otimes dt$, on notera dans tout cet exposé par F^α un L-vectoriel de rang 1 , Lf , muni de la connexion définie par $\partial_t f = (\frac{\alpha}{dt})f$. Il est classique que F^α est isomorphe à F^β si et seulement si $\alpha - \beta$ a un pôle simple, avec le coefficient de t^{-1} entier.

Le théorème suivant est classique (Fabry, Hukuhara, Turrittin ; je ne sais pas où se trouve la première démonstration complète ; on en trouvera une dans [W] et de plus récentes dans [L] , [M1], et [R]).

THEOREME 2.1. - Soit (E,∂) un vectoriel muni d'une connexion sur $\hat{K}$. Après éventuellement une ramification $t^p = x$, on a une décomposition

$$E \underset{\hat{K}}{\otimes} \hat{L} = \underset{\alpha}{\oplus}(F^\alpha \underset{\hat{L}}{\otimes} G^\alpha) ,$$

où les F^α ont la signification donnée ci-dessus (avec L remplacé par $\hat{L}$), et où les G^α sont réguliers.

En décomposant les G^α suivant leurs facteurs indécomposables, on obtient alors les facteurs indécomposables de $E \underset{\hat{K}}{\otimes} \hat{L}$. Cette décomposition est unique au sens du théorème de Krull-Schmidt.

3. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

Soient (E,∂) et (E',∂) deux vectoriels à connexion sur K , et soit $\hat{\alpha} : (\hat{E}'\partial) \xrightarrow{\sim} (\hat{E},\partial)$ un isomorphisme des formalisés. Si E , et donc E' , est régulier on sait que α provient d'un isomorphisme $\alpha : (E',\partial) \rightarrow (E,\partial)$. Ceci n'est plus vrai en général si E n'est pas régulier ; plus précisément, on peut voir qu'il existe des $\hat{\alpha}$ qui ne se redescendent pas si et seulement si $(\mathrm{End}_K E, \partial)$ est irrégulier.

Pour obtenir une classification analytique, il faut donc faire intervenir d'autres invariants, dits "invariants analytiques" ; une première version de ces invariants ([S], [M2]) fait intervenir les développements asymptotiques sectoriels, qu'on définit de la manière suivante :

on se place au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$; on fait un éclatement réel de 0, i.e. on passe en coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times T$; on note S l'image réciproque de $\{0\} \times T$ de 0, et on fabrique un faisceau $\mathcal{A}$ sur S de la manière suivante :

soit U un ouvert de S, et $\tilde{U}$ le secteur angulaire de $\mathbb{C}$ associé, i.e. $\{(\rho, \theta) | \rho > 0, \theta \in U\}$; soit $\bar{\mathcal{A}}(U)$ l'ensemble des germes en 0 de fonctions holomorphes f dans $\tilde{U}$, admettant en 0 un développement asymptotique de Laurent (je prends ici une notation un peu différente de celle de [M2]) ; de façon plus précise, on demande qu'il existe une série formelle $\sum_{n \le n_0} a_n x^n \in \hat{K}$ telle qu'on ait, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et x voisin de 0

$$|f(x) - \sum_{n \le p} a_n x^n| \le C_p |x^{p+1}| \quad , \quad C_p > 0 \, .$$

Un théorème classique de Ritt assure que, si $U \neq S$, l'application "série de Laurent" $\bar{\mathcal{A}}(U) \to L$ est surjective (voir par ex. [W]) ; dans la suite, on notera cette application $T : f \mapsto \hat{f}$.

DEFINITION 3.1. - <u>On désigne par</u> $\mathcal{A}$ <u>le faisceau associé au préfaisceau</u> $U \to \bar{\mathcal{A}}(U)$

Cela posé, le premier résultat sur lequel on va s'appuyer est le théorème fondamental suivant.

THEOREME 3.2. - (Hukuhara - Turrittin). <u>Soit</u> (E, ∂) <u>un vectoriel à connexion sur</u> K . <u>Alors, pour tout</u> $\theta \in S$ <u>l'application</u>

$T : \ker(\partial, \mathcal{A}_\theta \underset{K}{\otimes} E) \to \ker(\partial, \hat{E})$ <u>est surjective</u>.

Une démonstration de ce théorème se trouve dans [W] (1).

A noter que les énoncés usuels sont en apparence plus forts, puisqu'on démontre le résultat précédent dans tout secteur d'ouverture $< \frac{\pi}{r}$, r étant l'invariant de Katz de (E, ∂) . En fait, il est connu que des arguments cohomologiques joints à la théorie formelle exposée au §2 suffisent à récupérer ce résultat à partir de (3.2). On verra des arguments de ce type au §5.

Fixons-nous maintenant un (E, ∂) . On va utiliser le résultat précédent pour étudier les vectoriels à connexion (E', ∂) munis d'un isomorphisme des formalisés $\hat{\alpha} : (\hat{E}', \partial) \xrightarrow{\sim} (\hat{E}, \partial)$ (on reprend ici le raisonnement de [M2]) ; pour cela, on applique le théorème précédent à $\hat{\alpha}$ considéré comme section horizontale de $\mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{E}', \hat{E}) = \mathrm{Hom}_K(E', E)^\wedge$; il existe donc un recouvrement $\{U_i\}$ de S tel que, dans U_i , $\hat{\alpha}$ se représente par α_i , section horizontale sur U de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \underset{K}{\otimes} E', \mathcal{A} \underset{K}{\otimes} E)$; du fait que $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}$ est inversible, on déduit facilement qu'il en est de même de α_i . Alors, $\forall (i,j)$, $\alpha_i \alpha_j^{-1} = \beta_{ij}$ est une section horizontale inversible sur $U_i \cap U_j$ de $\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \underset{K}{\otimes} E) = \mathcal{A} \underset{K}{\otimes} \mathrm{End}_K(E)$; de plus, comme $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_j$, on a $\hat{\beta}_{ij} = \mathrm{id}$.

Désignons alors par $\Lambda(E)$ le faisceau des sections inversibles de $\mathcal{A} \underset{K}{\otimes} \mathrm{End}_K(E)$; en prenant une base $e_1, \dots, e_n$ de E , $\Lambda(E)$ s'identifie au faisceau $G\ell(n, \mathcal{A})$ des matrices inversibles à coefficients dans $\mathcal{A}$. Soient $\Lambda_o(E)$ le sous-faisceau des éléments de $\Lambda(E)$ asymptotes à l'identité, et $\Lambda_o(E, \partial)$ le sous-faisceau des sections horizontales pour ∂ de $\Lambda_o(E)$. Ce qui précède donne un cocycle $\{\beta_{ij}\}$ de $\Lambda_o(E, \partial)$ pour le recouvrement $\{U_i\}$, d'où par passage au quotient une classe de cohomologie $\gamma(\hat{\alpha}) \in H^1(S, \Lambda_o(E, \partial))$; on vérifie facilement que $\gamma(\hat{\alpha})$ ne

---

(1) Je signale à ce propos que je ne sais pas si les résultats que j'ai annoncés imprudemment sans démonstration à la fin de [M1] et [M2] sont vrais en toute généralité.

dépend que de $\hat{\alpha}$, et non du recouvrement et des relèvements α_i choisis.

Disons d'autre part que $(E',\partial,\hat{\alpha})$ et $(E'',\partial,\hat{\alpha}')$ sont équivalents si l'isomorphisme $\hat{\alpha}'^{-1}\hat{\alpha} : (\hat{E}',\partial) \to (\hat{E}'',\partial)$ provient d'un isomorphisme (nécessairement unique) $(E',\partial) \to (E'',\partial)$. On a le résultat suivant :

LEMME 3.3. - $(E',\partial,\hat{\alpha})$ <u>et</u> $(E'',\partial,\hat{\alpha}')$ <u>sont équivalents si et seulement si</u> $\gamma(\hat{\alpha}) = \gamma(\hat{\alpha}')$.

Supposons qu'on ait $\gamma(\hat{\alpha}) = \gamma(\hat{\alpha}')$; quitte à raffiner les recouvrements, on peut supposer que les α_i et les α'_i sont définis sur le même recouvrement U_i et qu'il existe des $\beta_i \in \Gamma(U_i,\Lambda_o(E,\partial))$ tels qu'on ait sur $U_i \cap U_j$, $\alpha'_i\alpha'^{-1}_j = \beta_i\alpha_i\alpha_j^{-1}\beta_j^{-1}$; on a donc $\alpha'^{-1}_j\beta_j\alpha_j = \alpha'^{-1}_i\beta_i\alpha_i$; ces fonctions se recollent donc en une section globale sur S de $\mathcal{O} \otimes \mathrm{Hom}_K(E',E'')$, section qui sera nécessairement méromorphe, donc appartiendra à $\mathrm{Hom}_K(E',E'')$; d'autre part, δ sera visiblement inversible, et vérifiera en passant aux développements asymptotiques $\delta = \hat{\alpha}'^{-1}\hat{\alpha}$; donc $(E',\partial,\hat{\alpha})$ et $(E'',\partial,\hat{\alpha}')$ sont équivalents. La réciproque se démontre de façon analogue.

Désignons enfin par $C\ell(E,\partial)$ l'ensemble des $(E',\partial',\hat{\alpha})$ à équivalence près ; ce qui précède donne une application injective $\gamma : C\ell(E,\partial) \to H^1(S,\Lambda_o(E,\partial))$.

THEOREME 3.4. - <u>L'application</u> $\gamma : C\ell(E,\partial) \to H^1(S,\Lambda_o(E,\partial))$ <u>est bijective</u>.

Reste à démontrer la surjectivité. Elle résulte du théorème suivant.

THEOREME 3.5. - <u>L'application</u> $H^1(S,\Lambda_o(E)) \to H^1(S,\Lambda(E))$ <u>a pour image zéro</u>.

Ce résultat est dû à Sibuya [S1] ; on en trouvera une démonstration en appendice.

Montrons comment ce résultat entraîne (3.4). Soit $\beta \in H^1(S, \Lambda_o(E,\partial))$; pour un recouvrement convenable $\{U_i\}$ de S , β est représenté par des $\beta_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Lambda_o(E,\partial))$; d'après (3.5) on peut écrire $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j^{-1}$, avec $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \Lambda(E))$. Munissons alors $\mathcal{O} \underset{K}{\otimes} E|U_i$ de la connexion $\alpha_i^{-1} \partial \alpha_i \underset{\text{déf}}{=} \partial^{\alpha_i}$; sur $U_i \cap U_j$, on a $\partial^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_j}$ puisque $\partial^{\beta_{ij}} = \partial$; donc ces connexions se recollent pour donner une connexion ∂' sur E (on peut aussi s'en convaincre en prenant une base et en recollant les matrices des connexions ainsi définies). D'autre part, on a $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_j$, donc les $\hat{\alpha}_i$ définissent un isomorphisme $\hat{\alpha} : \hat{E} \to \hat{E}$; il est alors clair par construction que $\hat{\alpha}$ est un isomorphisme $(\hat{E},\partial') \to (\hat{E},\partial)$, et qu'on a $\gamma(\hat{\alpha}) = \beta$; d'où le théorème.

4. STRUCTURES DE STOKES.

On va traduire les résultats du paragraphe précédent en termes de développements asymptotiques des solutions sectorielles des équations considérées ; je suis ici Deligne [D].

Soit (E,∂) un vectoriel à connexion sur K . Soit V le faisceau localement constant sur S des sections horizontales sectorielles de E , défini ainsi : pour $\theta \in S$, V_θ est l'espace des sections horizontales de (E,∂) sur un petit secteur $\{0<|x|<\epsilon\} \cap \{|\arg x - \theta| < \epsilon\}$.

Appliquons le théorème 2.1 : après éventuellement une ramification, $t^p = x$, on peut trouver un isomorphisme formel $\hat{\lambda} : \hat{E} \underset{K}{\otimes} L \to \hat{E}_1$, avec E_1 de la forme $\underset{\alpha \in A}{\oplus} (F^\alpha \underset{L}{\otimes} G^\alpha)$; en appliquant le théorème 3.2, à $\mathrm{Hom}_L(E \underset{K}{\otimes} L, E_1)$, on obtient un isomorphisme sectoriel u_θ au voisinage de θ : $E \underset{K}{\otimes} L \to E_1$, donné par un élément inversible de $\mathcal{O}_\theta \underset{L}{\otimes} \mathrm{Hom}(E \underset{K}{\otimes} L, E_1)$, qui transformera donc V_θ en $V_{1,\theta}$ (V_1 étant le système local des sections horizontales de E_1) ; d'autre part, V_1 s'explicite immédiatement : les sections de E_1 sont de la forme

$\sum_{\alpha\in A} e^{-\int\alpha} f_\alpha$, où f_α est solution d'une équation à singularités régulières ; par u_θ , on en déduit l'allure asymptotique des sections horizontales de $(\mathbb{E},\partial)$ dans un secteur voisin de θ ; en particulier, on peut mettre un ordre partiel sur V_θ en fonction de celles des exponentielles qui interviennent dans ledit comportement asymptotique. Cela conduit à la construction suivante.

Soit I le système local suivant sur S : sur un secteur on prend les formes $\sum_{-n}^{+\infty} a_k x^{k/p} dx$ (p , n'importe quel entier > 0), modulo pôles d'ordre ≤ 1 .

Sur I , on définit l'ordre partiel suivant : pour $\theta \in S$, on a $\alpha \underset{\theta}{\leqslant} \beta$ si $e^{-\int(\alpha-\beta)}$ est à croissance lente (i.e. $0(|x|^{-N})$ pour un $N > 0$) dans un petit secteur autour de θ . A noter que, pour α et β donnés, $\alpha \neq \beta$, il existe un nombre fini de points θ de S (ou plus exactement, d'un revêtement d'ordre fini de S) tels que α et β soient incomparables au voisinage de θ ; dans ce cas, pour θ' voisin de θ d'un côté, on aura $\alpha \underset{\theta'}{<} \beta$; de l'autre côté, on aura $\beta \underset{\theta'}{<} \alpha$ (on écrit $<$ pour $\leqslant$ et $\neq$). Les demi-droites correspondantes s'appellent traditionnellement les "lignes de Stokes" relatives à (α,β) .

DEFINITION 4.1. - <u>Soit</u> V <u>un sytème local</u> (= un faisceau localement isomorphe à $\mathbb{C}^n$) <u>sur</u> S . <u>Une structure de Stokes, ou I-filtration de</u> V <u>est une famille de sous-faisceaux</u> V^α , <u>indexée par</u> I , <u>admettant la propriété suivante</u> :

<u>pour tout</u> $\theta \in S$, <u>il existe une décomposition</u> $V_\theta = \oplus V_{\alpha,\theta}$ <u>telle qu'on ait, pour tout</u> θ' <u>voisin de</u> θ :

$$V^\alpha_{\theta'} = \bigoplus_{\beta \leqslant_{\theta'} \alpha} V_{\beta,\theta} .$$

(Faire attention que les V^α ne sont pas des sous-faisceaux au sens usuel, car ils sont indexés par un système local et non un ensemble).

On définit $\mathrm{Gr}\,V$ par $(\mathrm{Gr}\,V)^{\alpha}_{\theta} = \oplus V^{\alpha}_{\theta} / \sum_{\beta <_{\theta} \alpha} V^{\beta}_{\theta}$; la propriété 4.1 assure que les $(\mathrm{Gr}\,V)^{\alpha}$ forment une famille indexée par I de systèmes locaux (même mise en garde que ci-dessus).

Ceci posé, soit (E,∂) un vectoriel à connexion sur K, et V le système local de ses solutions ; la construction du début de ce paragraphe fournit une structure de Stokes sur V, qu'on peut d'ailleurs se contenter d'indexer par les α qui interviennent dans la décomposition de E_1, les autres ne jouant aucun rôle.

Ce qui précède donne un foncteur Φ : (vectoriels à connexion sur K) $\to$ (systèmes locaux I filtrés), la flèche sur les "Hom" étant évidente. Le résultat est alors le suivant.

THEOREME 4.2. - Φ <u>est une équivalence de catégories</u>.

A) Montrons d'abord que Φ est pleinement fidèle. Pour cela, considérons deux vectoriels à connexions (E,∂) et (E_1,∂), et soit $F = \mathrm{Hom}_K(E,E_1)$, muni de ∂ ; posons $V = \Phi(E,\partial)$, $V_1 = \Phi(E_1,\partial)$, $W = \Phi(F,\partial)$; on vérifie immédiatement que, si l'on désigne par $\overline{V}$ le système local V où l'on a oublié la filtration, on a $\overline{W} = \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{V},\overline{V}_1)$, et que de plus W est munie de la filtration définie par le fait que W^{α} envoie V^{β} dans $V_1^{\alpha+\beta}$ pour tout β. En particulier, $\mathrm{Hom}(V,V_1)$ s'identifie aux sections de W^{o}, i.e. aux sections méromorphes horizontales de $\mathrm{Hom}_K(E,E_1)$, ce qui donne le résultat cherché.

B) Pour démontrer que Φ est essentiellement surjectif, on a besoin d'introduire un autre foncteur $\hat{\Phi}$ qu'on va définir maintenant.

LEMME 4.3. - <u>Soit</u> $(\hat{E},\partial)$ <u>un vectoriel à connexion sur</u> $\hat{K}$; <u>il existe</u> (E_1,∂) <u>sur</u> K <u>dont le formalisé soit isomorphe à</u> $(\hat{E},\partial)$.

Prenons une base de $\hat{E}$, soit $(e_1,\dots,e_n)$ et soit M la matrice de ∂ dans cette base ; le changement de base $(e_1,\dots,e_n) = (f_1,\dots,f_n)S$ transforme M en N , vérifiant

$$N = SMS^{-1} - \frac{dS}{dx}S^{-1} \quad , \text{ ou encore } \quad \frac{dS}{dx} = SM - NS \quad ;$$

dans cette situation, on dira que N est équivalente à M ; si de plus, S est de la forme id + (termes d'ordre > 0), on dira que N est strictement équivalente à M .

Le lemme est une conséquence du résultat suivant : toute N assez voisine de M , c'est-à-dire telle que $N - M$ soit d'ordre $>> 0$, est strictement équivalente à M .

Il suffit d'établir ce résultat après une ramification convenable $t^p = x$; en effet, pour redescendre à la situation initiale, il suffira de garder dans la matrice S obtenue les puissances entières de x . Le résultat se démontre alors en même temps que la réduction formelle (2.1) ; voir à ce sujet les calculs de [R].

Soit alors $(\hat{E},\partial)$ un $\hat{K}$-vectoriel à connexion, et soit (E_1,∂) sur K , muni d'un isomorphisme $\lambda_1 : (\hat{E},\partial) \xrightarrow{\sim} (\hat{E}_1,\partial)$. On pose $\hat{\Phi}(\hat{E},\partial) = \mathrm{gr}\,\Phi(E_1,\partial)$; si l'on a un autre système (E_2,∂,λ_2) , avec $\lambda_2 : (\hat{E},\partial) \xrightarrow{\sim} (\hat{E}_2,\partial)$, on a un isomorphisme bien déterminé $\mathrm{gr}\,\Phi(E_1,\partial) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\,\Phi(E_2,\partial)$ défini ainsi : dans un secteur assez petit U , $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ se représente par une section horizontale μ de $\mathcal{A}(U) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(E_1,E_2)$, d'où une flèche $V_1 \to V_2$ sur U $(V_i = \Phi(E_i,\partial))$; si l'on change μ en μ' , alors $\mu'-\mu$ est asymptote à 0 , i.e. appartient à $\underline{\mathrm{Hom}}(V_1,V_2)^{<0}$, donc induit 0 sur les gradués associés. Par suite $\hat{\Phi}(\hat{E},\partial)$ "ne dépend pas" de (E_1,∂) . On définit la flèche sur les "Hom" par le même procédé. Finalement, on obtient un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
(\text{vectoriels à connexion sur } K) & \xrightarrow{\Phi} & (\text{systèmes locaux I-filtrés}) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \text{formalisé}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{gr}} \\
(\text{vectoriels à connexion sur } \hat{K}) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & (\text{systèmes locaux I-gradués}).
\end{array}$$

C) On va démontrer d'abord le théorème suivant.

THEOREME 4.4. - $\hat{\Phi}$ <u>est une équivalence de catégories</u>.

Le fait que $\hat{\Phi}$ est pleinement fidèle se voit facilement, par le même type d'arguments que pour Φ. Reste à démontrer que $\hat{\Phi}$ est essentiellement surjectif.

Soit alors V un système local I-gradué ; si les $\alpha \in I$ pour lesquels $V^{\alpha} \neq 0$ sont non ramifiés, le résultat est immédiat ; il suffit de prendre $E = \oplus(F^{\alpha} \otimes_K G^{\alpha})$, les F^{α} ayant la même signification qu'au théorème 2.1, et les G^{α} étant à singularité régulière de monodromie égale à celle de V^{α}.

Dans le cas général, soit p tel que, après le changement de variable $t^p = x$, les α pour lesquels $V^{\alpha} \neq 0$ soient non ramifiés ; soit T le revêtement de degré p de S et π la projection $T \to S$; alors par le résultat précédent $\pi^*(V)$ est représenté par un vectoriel à connexion $(\hat{F}, \partial_t)$ sur $\hat{K}[t] = \hat{L}$. Comme $\hat{\Phi}$ est pleinement fidèle, l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(T/S) = \mathrm{Gal}(\hat{L}/\hat{K})$ donne alors une action de $\mathrm{Gal}(\hat{L}/\hat{K})$ sur $(\hat{F}, \partial)$; on voit facilement qu'il suffit d'en prendre les invariants pour représenter V. D'où le théorème 4.4.

D) Montrons finalement que Φ est essentiellement surjectif ; pour cela, il suffit de remarquer ceci ; soit V un système local I-gradué ; par (4.3) et (4.4) on peut déjà supposer qu'il existe un (E_1, ∂) sur K, avec $V_1 = \Phi(E_1, \partial)$, tel que $\mathrm{gr}\, V_1$ soit isomorphe à $\mathrm{gr}\, V$. Par suite, il suffit de voir que Φ est une bijection entre $C\ell(E_1, \partial)$ (notations du théorème 3.4) et les systèmes locaux I-filtrés V' munis d'un isomorphisme $\mathrm{gr}\, V' \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, V_1$. Or, lesdits systèmes se classent par $H^1(S, \underline{\mathrm{Aut}}_o(V_1))$, en désignant par $\underline{\mathrm{Aut}}_o(V_1)$ le faisceau des automorphismes de V_1 qui induisent l'identité sur le gradué associé. D'autre part, $\underline{\mathrm{Aut}}^o(V_1)$ est le faisceau des sections de $W = \Phi(\mathrm{End}_K(E_1), \partial)$ qui sont de la forme $\mathrm{id} + \lambda$, avec $\lambda \in W^{<0}$; ce faisceau est donc égal à $\Lambda_o(E_1, \partial)$ et on conclut par le théorème 3.4.

5. UN EXEMPLE.

Pour rendre les constructions précédentes plus concrètes, et aussi pour préparer un exposé ultérieur, on va regarder explicitement la classification des vectoriels à connexion sur $\underset{0}{K}$ qui sont formellement isomorphes à $E = \oplus F^{\alpha} \underset{K}{\otimes} G^{\alpha}$, $\alpha \in A \subset I$, $\alpha = \sum_{-r}^{0} a_k(\alpha) x^{k-1} dx$ ($r \geq 1$ donné), et G^{α} à singularité régulière ; on supposera que les $a_{-r}(\alpha)$ sont distincts pour les divers α . On s'inspirera ici de la méthode de [B-J-L] ; une méthode différente se trouve dans Birkhoff [B] ; cette dernière a été étendue au cas général par Jurkat [J].

Soit $V = \Phi(E)$; on a ici une décomposition $V = \oplus V_{\alpha}$, $V_{\alpha} = \Phi(F^{\alpha} \otimes G^{\alpha})$, c'est-à-dire un relèvement canonique $\operatorname{gr} V \to V$. Soit W un système local A-filtré, muni d'un isomorphisme $\hat{\lambda} : \operatorname{gr} W \to \operatorname{gr} V$.

Les lignes de Stokes sont ici les demi-droites sur lesquelles on a $\operatorname{Re}[(a_{-r}(\alpha) - a_{-r}(\beta))x^{-r}] = 0$; pour chaque paire (α, β) , $\alpha \neq \beta$, on a donc deux $2r$ telles demi-droites, faisant chacune avec la précédente un angle $\frac{\pi}{r}$; on les notera $D^{k}_{\alpha\beta}$, $k = 1, \ldots, 2r$. On n'exclut pas le cas où deux telles lignes, correspondant à des paires distinctes, sont confondues. On appellera "bon" un intervalle ouvert $U \subset S$ (ou le secteur correspondant) qui possède la propriété suivante : pour toute paire (α, β) , U rencontre une et une seule des demi-droites $D^{1}_{\alpha\beta}, \ldots, D^{2r}_{\alpha\beta}$.

Il existe évidemment de bons intervalles (prendre n'importe quel intervalle de longueur $\frac{\pi}{r}$ dont les extrémités n'appartiennent à aucune ligne de Stokes).

LEMME 5.1. - <u>Sur tout bon intervalle</u> U , <u>l'isomorphisme</u> $\hat{\lambda} : \operatorname{gr} W \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} V$ <u>se relève d'une manière et d'une seule en un isomorphisme</u> $\lambda(U) : W|U \xrightarrow{\sim} V|U$.

L'unicité de $\lambda(U)$ est évidente : en effet, puisque une des droites $D^{k}_{\alpha\beta}$ rencontre U , quelle que soit la paire (α, β) , $\alpha \neq \beta$, α et β sont globalement incomparables sur U ; il en résulte que le seul automorphisme de $V|U$ qui induise l'identité sur $\operatorname{gr} V$ est l'identité.

Pour démontrer l'existence, prenons un intervalle ouvert $U_1 \subset U$ et un relèvement $\lambda(U_1) : W|U \to V|U$ de $\hat{\lambda}$ (cela existe par le théorème 3.2), et soit θ une extrémité de U_1 ; si $\theta \notin U$, c'est terminé ; sinon il y a deux cas à considérer.

<u>1er cas</u>.

θ n'appartient pas à une ligne de Stokes. On va voir qu'alors λ se prolonge au-delà de θ, ce qui permet par connexité d'atteindre la prochaine ligne de Stokes.

Soit en effet, U_2 un petit intervalle autour de θ, ne rencontrant aucune ligne de Stokes, et prenons un relèvement $\lambda(U_2)$: $W|U_2 \xrightarrow{\sim} V|U_2$ de $\hat{\lambda}$. Numérotons $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ l'ordre des α dans U_2, avec $p = \operatorname{card} A$.

Soit e_α une base de V_α sur $U_1 \cup U_2$; posons $f_\alpha = \lambda(U_1)^{-1} e_\alpha$, $g_\alpha = \lambda(U_2^{-1}) e_\alpha$; sur $U_1 \cap U_2$ on a les relations $f_{\alpha_i} = g_{\alpha_i} + \sum_{j<i} g_{\alpha_j} m_{ji}$, m_{ij} des matrices constantes ; il en résulte que, sur U_2, on a encore $f_{\alpha_i} \in W^{\alpha_i}$, d'où le résultat cherché.

<u>2e cas</u>.

θ appartient à une ligne de Stokes ; soit encore U_2 un petit intervalle autour de θ, ne rencontrant pas d'autre ligne de Stokes ; on va voir qu'on peut trouver un autre relèvement $\lambda'(U_1)$ de $\hat{\lambda}$ qui se prolonge à $U_1 \cup U_2$. En combinant avec le 1er cas, on obtiendra finalement le résultat.

Notons encore $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ l'ordre des α sur U_1 au voisinage de θ. En un point $\theta' \in S$, l'ordre des α est donné par $\operatorname{Re}(a_{-r}(\alpha) x^{-r})$, $\arg x = \theta'$, les α distincts pour lesquels cette expression est égale étant incomparables en θ' ; il résulte de là qu'il existe dans $\{1,\ldots,p\}$ des intervalles disjoints $I_1,\ldots,I_s$ tels que pour θ' voisin de θ,

$\theta' \notin U_1$, l'ordre des α_i soit le suivant :

i) dans chaque intervalle I_j , l'ordre initial (= dans U_1 , près de θ), est inversé ;

ii) toutes les autres relations d'ordre sont conservées.

Choisissons alors un relèvement $\lambda(U_2) : W|U_2 \xrightarrow{\sim} V|U_2$, et soient f_α, g_α définis comme dans le premier cas. Sur $U_1 \cap U_2$, on a encore

(5.2) $f_{\alpha_i} = g_{\alpha_i} + \sum_{j<i} g_{\alpha_j} m_{ji}$;

on modifie le relèvement $\lambda(U_1)$ en $\lambda'(U_1)$ de la manière suivante.
Si $i \notin I_1 \cup \ldots \cup I_s$, on prend $\lambda'^{-1}(U_1) e_{\alpha_i} \underset{\text{déf}}{=} f'_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}$.
Si i appartient à I_k , on prend :

(5.3) $f'_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} + \sum_{j<i,\, j\in I_k} f_{\alpha_j} n_{ji}$.

Ceci donne bien un relèvement de $\hat{\lambda}$ sur U_1 quels que soient les n_{ij} choisis, car U_1 ne rencontre par hypothèse aucune ligne de Stokes relative aux paires (i,j) appartenant au même intervalle I_k . Maintenant, en combinant (5.2) et (5.3), on vérifie qu'il existe un unique choix des n_{ij} pour lequel on a encore, sur U_2 : $f'_{\alpha_i} \in W^{\alpha_i}$, $i = 1,\ldots,p$. Ceci démontre le lemme.

On dira qu'un recouvrement de S par des intervalles ouverts $\{U_1,\ldots,U_{2r}\}$ est "bon" s'il possède les propriétés suivantes :

i) les U_i sont bons ;

ii) U_i rencontre seulement U_{i-1} et U_{i+1} (on pose $U_{2r+1} = U_1$) ;

iii) $U_i \cap U_{i+1}$ ne contient aucune ligne de Stokes.

On peut toujours trouver de bons recouvrements (prendre le recouvrement fermé de S par les $[\theta_o + k\pi/r\ ,\ \theta_o + (k+1)\pi/r]$, θ_o étant choisi distinct des directions de Stokes modulo $\frac{\pi}{r}$, et élargir un peu les intervalles précédents). Pour chaque U_i , il existe un relèvement unique $\lambda(U_i)$: $W|U_i \to V|U_i$ de $\hat{\lambda}$. Il est clair alors que la structure de Stokes est donnée par le choix des $\lambda(U_i)\lambda^{-1}(U_{i+1})$; ceux-ci sont des automorphismes de $V|U_i \cap U_j$ induisant l'identité sur le gradué associé ; sous cette seule restriction, leur choix est arbitraire. Pour $r \geq 2$, $U_i \cap U_j$ est un secteur ; par rapport à la décomposition $V = \oplus V_\alpha$, $\lambda(U_i)\lambda^{-1}(U_{i+1})$ s'exprime par une matrice triangulaire stricte par rapport à l'ordre des α dans $U_i \cap U_{i+1}$; si $r = 1$, je laisse le lecteur adapter. Finalement, en prenant des bases des V_α sur $U_i \cap U_{i+1}$ on obtient un isomorphisme $C\ell(E,\partial) \simeq \mathbb{C}^N$, avec $N = r \sum_{\alpha \neq \beta} \dim V_\alpha \cdot \dim V_\beta$.

On vérifie immédiatement que N est l'irrégularité au sens de [M1] de $(\mathrm{End}_K E, \partial)$; cette propriété s'étend au cas général, traité dans [J].

Remarque 5.4. - Si l'on change le recouvrement (et les bases des V_α), on obtient un automorphisme de $\mathbb{C}^N$ dont on peut voir qu'il est polynomial. Donc, en fait, $C\ell(E,\partial)$ est muni naturellement d'une structure d'espace affine de dimension N . Comme cela servira dans l'exposé ultérieur promis, je vais esquisser la démonstration. Il suffit de voir ceci : soit U' un bon ouvert et $\lambda(U')$: $W|U' \to V|U'$ le relèvement de $\hat{\lambda}$ donné par (5.1). Alors, pour tout i tel que $U' \cap U_i \neq 0$, $\lambda(U')\lambda(U_i)^{-1}$ a, dans une base de V , des coefficients polynomiaux par rapport à ceux des $\lambda(U_i)\lambda^{-1}(U_{i+1})$. Le seul cas non trivial est celui où, pour un i , on a $U' \subset U_i \cup U_{i+1}$, $U' \not\subset U_i$, $U' \not\subset U_{i+1}$ (sinon, il est facile de voir qu'on a, pour un j : $U' \subset U_j$ ou $U' \supset U_j$) ; on écrit alors les équations analogues à (5.2) et (5.3) pour $\lambda(U')\lambda(U_i)^{-1}$ et $\lambda(U')\lambda(U_{i+1})^{-1}$, et les relations entre elles, données par les coefficients de $\lambda(U_i)\lambda^{-1}(U_{i+1})$; on conclut facilement du fait que les équations obtenues ont une solution unique pour tout choix de $\lambda(U_i)\lambda^{-1}(U_{i+1})$.

6. REMARQUES SUR UN PROBLEME DE MODULES.

On va garder l'exemple du § 5 (ce qu'on va dire se généraliserait en utilisant [J]. Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0, et T une variété analytique complexe ; notons Z la section nulle $T \times \{0\}$ de $T \times D$, et K le faisceau des fonctions méromorphes de $T \times D$ avec pôles dans Z. On appellera "famille de vectoriels à connexion sur D, paramétrée par T" un K-module libre de type fini L muni d'une dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ (x la variable de D). En travaillant avec le complété formel de K le long de Z, on définit de même "les familles formelles de vectoriels à connexion, paramétrées par T". On appelle "famille de vectoriels à connexion sur D, munie d'un isomorphisme formel avec E" une famille $(L, \frac{\partial}{\partial x})$ dont le formalisé $(\hat{L}, \frac{\partial}{\partial x})$ le long de Z est isomorphe à la famille constante par rapport à T définie par $(\hat{E}, \partial)$. On peut se demander s'il existe un espace des modules pour ces familles, dont la base serait $C\ell(E,\partial)_{an}$, i.e. $C\ell(E,\partial)$, muni de la structure analytique affine qui vient d'être définie.

On peut voir que la réponse est positive ; comme le problème a un intérêt limité, je n'en dirai que quelques mots. Tout d'abord, pour voir que $C\ell(E,\partial)_{an}$ est un espace de modules grossiers, il suffit de voir que toute famille de ce type donne lieu canoniquement à une application analytique $T \to C\ell(E,\partial)_{an}$; ceci se voit en utilisant un théorème de Sibuya [S3] qui "met des paramètres" dans (3.2). Pour fabriquer une famille universelle au-dessus de $C\ell(E,\partial)_{an}$, il faut essentiellement mettre des paramètres dans (3.5), ce qui ne présente pas de difficulté, et utiliser le théorème de Grauert qui nous dira qu'un fibré vectoriel sur $\mathbb{C}^N \times D$ est trivial.

On peut d'autre part essayer "d'algébriser" le problème précédent : soit $\mathcal{C}$ la catégorie des modules libres sur $\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}]$, munis d'une dérivation ∂ qui soit régulière à l'infini ; soit Ψ le foncteur $(\mathcal{C}) \to$ (vectoriels à connexion sur K) qui à tout E de $\mathcal{C}$ associe

$E \underset{\mathbb{C}[x,\frac{1}{x}]}{\otimes} K$. On voit que Ψ est une équivalence de catégories de la manière suivante ; tout d'abord le fait qu'elle est pleinement fidèle résulte de ce qu'une section horizontale analytique de $\mathrm{Hom}_K(\psi(E), \psi(F))$ au voisinage de zéro se prolonge en une fonction méromorphe à l'infini (à cause de l'hypothèse "singularités régulières"). La surjectivité se démontre ensuite par le procédé usuel (étendre un (E, ∂) sur K à $\mathbb{C}$ en prolongeant à $\mathbb{C}^*$ le système local des solutions, et compenser à l'infini par une singularité régulière).

On pourrait alors se poser un problème de modules algébrique analogue au précédent pour les familles de (C) formellement isomorphes à l'origine à la famille constante $(\hat{E}, \partial)$; je ne donnerai pas d'énoncé précis, car l'exemple suivant montre qu'il n'existe aucune structure algébrique sur $C\ell(E, \partial)_{an}$ qui en fasse un module (même grossier) pour ces familles.

On prend $(E(\beta,\gamma), \partial) = (K^2, \partial)$ la famille dépendant de $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ dont la matrice de connexion est $\frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{x}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $(\alpha, \delta$ fixés) ; pour β, γ donnés, il existe un et un seul isomorphisme formel donné par $S = \mathrm{Id} + (\text{termes d'ordre} \geq 1)$ avec $(E(0,0), \partial)$. D'autre part, $C\ell(E(0,0), \partial) = \mathbb{C}^2$; on a donc une application analytique $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ donnée par $(\beta, \gamma) \mapsto$ la classe de $(E(\beta, \gamma), \partial)$. Il se trouve que l'on peut ici faire explicitement le calcul de cette application [J-L-P], [M-R] ; on trouve entre autres qu'en général l'image réciproque d'un point de $\mathbb{C}^2$ est dénombrable ; donc cette application n'est pas "algébrisable".

APPENDICE.

Démonstration du théorème 3.5. - Soit $\mathcal{A}'$ le sous-espace de $\mathcal{A}$ formé des f dont le développement asymptotique est sans pôle ; soit $G\ell^o(n, \mathcal{A}')$ le sous-faisceau de groupe de $G\ell(n, \mathcal{A}')$ formé des matrices asymptotiques à l'identité. En prenant une base $e_1, \ldots, e_n$ de E, il suffit évidemment de démontrer l'assertion suivante.

PROPOSITION A.1. - <u>L'application</u> $H^1(S, G\ell^o(n,\mathcal{a}')) \to H^1(S, G\ell(n,\mathcal{a}'))$ <u>a pour image</u> 0 .

On va d'abord trivialiser la situation "en C^∞" ; soit $\Gamma^{\mathbb{R}}$ le faisceau sur S défini ainsi : les éléments de $\Gamma^{\mathbb{R}}_\theta$ sont représentés par des matrices d'ordre n dans un petit secteur fermé $\{|\arg x - \theta| \leq \epsilon\ ,\ |r| \leq \epsilon\} \cup \{0\}$ de la forme $\mathrm{id} + M$, M étant de classe C^∞ (par rapport à $\mathrm{Re}\, x$ et $\mathrm{Im}\, x$) et plate en 0 , i.e. toutes ses dérivées par rapport à $\mathrm{Re}\, x$ et $\mathrm{Im}\, x$ sont nulles en 0 ; c'est encore un faisceau des groupes sur $\mathbb{R}$.

LEMME A.2. - $H^1(S, \Gamma^{\mathbb{R}}) = 0$.

Considérons l'application "coordonnées polaires" $S \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ définie par $(\theta, r) \mapsto re^{i\theta}$; par l'image réciproque de cette application, $\Gamma^{\mathbb{R}}$ devient la restriction à S du faisceau des matrices de classe C^∞ sur $S \times \mathbb{R}_+$, tangentes d'ordre ∞ à l'identité sur S . Les éléments de $H^1(S, \Gamma^{\mathbb{R}})$ classent donc les fibrés vectoriels C^∞ sur $S \times \mathbb{R}_+$ au voisinage de S , formellement triviaux le long de S . Une telle trivialisation se prolonge à E , ce qui donne le résultat cherché.

Prenons alors un recouvrement $\{U_i\}$ de S , et soit $\{\beta_{ij}\}$ un cocycle de $G\ell^o(n,\mathcal{a}')$ dans ce recouvrement ; le lemme précédent montre qu'il existe des $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \Gamma^{\mathbb{R}})$ tels qu'on ait $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j^{-1}$, ou encore $\alpha_i = \beta_{ij} \alpha_j$, d'où $\alpha_i^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \alpha_i = \alpha_j^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \alpha_j$; soit γ la valeur commune de ces expressions ; c'est une matrice de classe C^∞ au voisinage de 0 , et nulle d'ordre infini en 0 .

Il est alors bien connu qu'il existe une matrice δ de classe C^∞ au voisinage de 0 , avec $\delta(0) = \mathrm{id}$, et telle qu'on ait $\delta^{-1} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{x}} = \gamma$;

posons $\alpha'_i = \alpha_i \delta^{-1}$; les α'_i sont holomorphes, $\alpha'_i(0) = \mathrm{id}$, et $\beta_{ij} = \alpha'_i \alpha'^{-1}_j$. D'où la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[B] G.D. BIRKHOFF, The generalized Riemann problem for linear differential equations... Proc. Amer. Acad. Arts. Sc. 49 (1913), pp. 531-568.

[B-J-L] W. BALSER, W.B. JURKAT, D.A. LUTZ, Birkhoff invariants and Stokes multipliers for meromorphic linear differential equations, J. Math. Anal. Appl. 71 (1979), pp. 48-94.

[D] P. DELIGNE, lettres à B. Malgrange (8.1977 et 4.1978).

[J] W. JURKAT, Meromorphe Differenzialgleichungen, Spring. Lect. Notes, n° 637 (1978).

[J-L-P] W. JURKAT, D.A. LUTZ, A. PEYERHIMHOFF, Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations, I, J. Math. Anal. Appl. 53 (1976), pp. 438-470.

[L] A.H.M. LEVELT, Jorkan decomposition of a class of singular differential operators, Arkiv för Mat. 13.1 (1975), pp. 1-27.

[M1] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, L'Ens. Math. 20 (1974), pp. 147-176.

[M2] B. MALGRANGE, Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-1977 (reproduit dans Springer Lect. Notes n° 712, 1979, pp. 77-86).

[M-R] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Problèmes de modules pour des équations différentielles linéaires du premier ordre, à paraître aux Publ. sc. , I.H.E.S.

[R] P. ROBBA, Lemme de Hensel pour des opérateurs différentiels, L'Ens. Math. 26, fasc. 3.4 (1980), pp. 279-311.

[S1] Y. SIBUYA, Linear differential equations in the complex domain ; problems of analytic continuation, Kinokuniya, Tokyo (1976) (en japonais).

[S2] Y. SIBUYA, Stokes phenomena, Bull. Amer. Math. Soc. 83-5 (1977), pp. 1075-1077.

[S3] Y. SIBUYA, Perturbation of linear ordinary differential equations at irregular singular points, Funk. Ekvacioj 11 (1968), pp. 235-246.

[W] W. WASOW, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publ. (1965).

(mai 1982)