

# COMPOSITIO MATHEMATICA

A. KHINTCHINE

## **Eine Verschärfung des Poincaréschen “Wiederkehrrsatzes”**

*Compositio Mathematica*, tome 1 (1935), p. 177-179

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_1\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__177_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Eine Verschärfung des Poincaréschen „Wiederkehrrsatzes“

von

A. Khintchine

Moskau

---

1.  $V$  sei eine meßbare Menge vom Maße  $\mathfrak{M}(V) > 0$  in einem metrischen Raum, die sich in einem Zustande stationärer und maßinvarianter Bewegung in sich befindet. Nach Ablauf einer Zeitstrecke  $t$  geht jede Menge  $E \subset V$  in eine Menge über, die wir mit  $E_t$  bezeichnen wollen;  $x_t$  sei das entsprechende Bild des Punktes  $P$ . Ist  $E$  meßbar, so ist  $\mathfrak{M}(E_t) = \mathfrak{M}(E)$ . Setzt man in diesem Fall  $\mathfrak{M}(EE_t) = \mu(t)$ , so behauptet der Poincarésche „Wiederkehrrsatz“, daß im Falle  $\mathfrak{M}(E) > 0$  für beliebig große Werte von  $t$  immer wieder  $\mu(t) > 0$  wird; mit anderen Worten schneidet jede Menge von positivem Maß in ihrer Bewegung immer wieder ihre ursprüngliche Lage.

Die Absicht der vorliegenden Note ist, diese Behauptung in zwei verschiedenen Richtungen zu verschärfen. Erstens werde ich zeigen, daß die Werte von  $t$ , für welche  $\mu(t) > 0$  gilt, auf der Zeitachse „relativ dicht“ im Sinne von H. Bohr liegen (das soll bedeuten, daß bei genügend großem  $T$  die Strecke  $a - T$ ,  $a + T$ , was auch  $a$  sei, wenigstens einen solchen  $t$ -Wert enthält); und zweitens werde ich beweisen, daß dies auch dann zutrifft, wenn an Stelle der Ungleichung  $\mu(t) > 0$  die schärfere

$$\mu(t) > \frac{\{\mathfrak{M}(E)\}^2}{\mathfrak{M}(V)} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig})$$

gefordert wird. Der Durchschnitt der wandernden Menge  $E_t$  mit ihrer ursprünglichen Lage  $E$  hat somit nicht nur unendlich oft ein positives Maß, sondern es kann überdies behauptet werden, daß dieses Maß eine gewisse, nur von  $\mathfrak{M}(E)$  und  $\mathfrak{M}(V)$  abhängende positive Schranke übertrifft, und daß diese Erscheinung in einer „relativ dichten“ Menge von Zeitpunkten stattfindet. Es sei gleich hier bemerkt, worauf ich nicht später zurückkommen will, daß die festgestellte untere Schranke für  $\mu(t)$  nicht erhöht werden kann, so daß der Satz keine weitere Verschärfung in der

hier behandelten Richtung zuläßt; das folgt unmittelbar aus den Beispielen, die J. v. Neumann kürzlich veröffentlicht hat <sup>1)</sup> und in denen die Bewegung so beschaffen ist, daß für jede meßbare Menge  $E$

$$\mu(t) \rightarrow \frac{\{\mathfrak{M}(E)\}^2}{\mathfrak{M}(V)} \quad (t \rightarrow \infty)$$

gilt.

2. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, will ich  $\mathfrak{M}(V) = 1$  voraussetzen und der Kürze halber  $\mathfrak{M}(E) = \lambda$  setzen. Aus der Spektraltheorie der Phasenraumbewegungen werde ich nur die (von M. H. Stone und B. O. Koopman herrührende) Grundtatsache als bekannt voraussetzen, daß  $\mu(t)$  in der Form

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \, dF(x) \quad (1)$$

dargestellt werden kann, wo  $F(x)$  eine nicht abnehmende Funktion mit  $F(+\infty) - F(-\infty) = \mu(0) = \lambda$  bedeutet <sup>2)</sup>. Ich setze  $F(+0) - F(-0) = \bar{\mu}$  und will zunächst beweisen, daß

$$\frac{1}{2T} \int_{a-T}^{a+T} \mu(t) \, dt \rightarrow \bar{\mu} \quad (T \rightarrow \infty) \quad (2)$$

gleichmäßig in bezug auf  $a$  ( $-\infty < a < +\infty$ ) gilt. Setzt man  $\varepsilon(x) = 0$  für  $x < 0$ ,  $\varepsilon(x) = 1$  für  $x \geq 0$ ,  $F(x) - \bar{\mu}\varepsilon(x) = F^*(x)$ , so ist  $F^*(x)$  eine nicht abnehmende Funktion mit  $F^*(+0) - F^*(-0) = 0$ , und wegen (1) ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2T} \int_{a-T}^{a+T} \mu(t) \, dt - \bar{\mu} \right| &= \left| \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) \int_{a-T}^{a+T} \cos tx \, dt - \bar{\mu} \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos ax \frac{\sin Tx}{Tx} dF(x) - \bar{\mu} \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos ax \frac{\sin Tx}{Tx} dF^*(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\delta}^{+\delta} dF^*(x) + \frac{1}{T\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} dF^*(x) = \\ &= F^*(+\delta) - F^*(-\delta) + \frac{1}{T\delta} (\lambda - \bar{\mu}), \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> J. v. NEUMANN, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik [Ann. of Math. (2) 33 (1932), 587—642].

<sup>2)</sup> Für einen kurzen Beweis vgl. z.B. meine Note: The method of spectral reduction in classical dynamics [Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 19 (1933), 567—573].

womit die Behauptung bewiesen ist, da  $\delta > 0$  beliebig klein gewählt werden kann.

3. Nun soll bewiesen werden, daß  $\bar{\mu} \geq \lambda^2$  ist. Es sei  $\varphi(x) = 1$  oder 0, jenachdem  $x \in E$  oder nicht. Offenbar ist für alle  $t, u, v$

$$\int_V \varphi(x_t) dx = \lambda, \quad \int_V \varphi(x_u) \varphi(x_v) dx = \mathfrak{M}(E_u E_v) = \mathfrak{M}(E E_{u-v}) = \mu(u-v),$$

und folglich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_V \left\{ \int_0^T [\varphi(x_t) - \lambda] dt \right\}^2 dx = \\ &= \int_V \left\{ \int_0^T \int_0^T [\varphi(x_u) - \lambda][\varphi(x_v) - \lambda] du dv \right\} dx = \\ &= \int_0^T \int_0^T \left\{ \int_V [\varphi(x_u) - \lambda][\varphi(x_v) - \lambda] dx \right\} du dv = \\ &= \int_0^T \int_0^T \{ \mu(u-v) - \lambda^2 \} du dv, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mu(u-v) du dv \geq \lambda^2; \quad (3)$$

nun ist aber wegen (2)

$$\int_0^T \int_0^T \mu(u-v) du dv = \int_0^T du \int_{u-T}^u \mu(z) dz = \bar{\mu} T^2 + o(T^2),$$

und folglich wegen (3), da  $T$  beliebig gross gewählt werden kann,

$$\bar{\mu} \geq \lambda^2, \quad (4)$$

wie behauptet.

4. Aus den Ergebnissen der Nummern 2 und 3 folgt nun unmittelbar die angekündigte Verschärfung; denn für gegebenes  $\varepsilon$  und genügend großes  $T$  ist nach (2) und (4)

$$\frac{1}{2T} \int_{a-T}^{a+T} \mu(t) dt > \bar{\mu} - \varepsilon \geq \lambda^2 - \varepsilon$$

gleichmäßig in bezug auf  $a$ . Und daher müssen auf der Strecke  $a - T, a + T$  solche  $t$ -Werte vorhanden sein, für die

$$\mu(t) \geq \lambda^2 - \varepsilon$$

ausfällt; das war aber gerade unsere Behauptung.