A. KHINTCHINE

# Metrische Kettenbruchprobleme

*Compositio Mathematica*, tome 1 (1935), p. 361-382
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__361_0>

# Metrische Kettenbruchprobleme

von

A. Khintchine

Moskau

---

## § 1. *Einleitung.*

Die metrische Theorie der Kettenbrüche ist die Gesamtheit aller Sätze, welche das Maß von Mengen aller durch eine bestimmte Eigenschaft ihrer regelmäßigen Kettenbruchentwicklung gekennzeichneten Irrationalzahlen abzuschätzen erlauben. Da es sich dabei fast ausschließlich um Eigenschaften handelt, für deren Bestehen nur der Rest der gegebenen Irrationalzahl modulo 1 von Belang ist, wollen wir uns durchweg mit Zahlen befassen, die zwischen 0 und 1 liegen; die regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer solchen Zahl hat die Gestalt

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdot_{\cdot_{\cdot}} + \cfrac{1}{a_n + \cdot_{\cdot_{\cdot}}}}},$$

oder, kürzer geschrieben,

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots];$$

die natürlichen Zahlen $a_i$ sind die *Teilnenner* der Kettenbruchentwicklung.

Das erste bekannte metrische Problem der Kettenbruchtheorie rührt von Gauß her. Bezeichnet man mit $z_n(\alpha)$ die Zahl $[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ und mit $m_n(x)$ das Maß der Menge derjenigen zwischen 0 und 1 liegenden Zahlen $\alpha$, für die

$$z_n(\alpha) < x$$

ist, so behauptete Gauß, einen Beweis für den Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

gefunden zu haben [1]). Dieser Gaußsche Beweis ist indessen unbekannt geblieben; und viele Jahrzehnte hindurch kannte man auch keinen anderen, bis 1928 Kuzmin [2]) die Gaußsche Behauptung bewies und dabei auch dem Restglied eine für die weiteren Entwicklungen äußerst wichtige Abschätzung gab; die Wichtigkeit einer solchen Abschätzung hat Gauß in einem Brief an Laplace betont; es sollte ihm jedoch nicht gelungen sein, in dieser Richtung etwas zu erreichen.

Aber noch bevor das Gaußsche Problem gelöst war, hat sich die metrische Theorie der Kettenbrüche ziemlich weit in anderen Richtungen entwickelt. Es ist hier vor allem eine Reihe von Untersuchungen zu erwähnen, in denen Borel [3]) das Problem vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt angriff, und denen sich auch ein bekannter Satz von F. Bernstein [4]) anschließt. Diese Untersuchungen beruhen auf elementaren Abschätzungen, die Borel für das Maß der Menge $E\binom{n}{k}$ der Zahlen gefunden hat, die der Bedingung $a_n = k$ genügen. Es handelt sich hauptsächlich um Aufstellung solcher asymptotischer oberer Grenzen der Teilnenner $a_n$ für $n \to \infty$, die fast allen (allen mit Ausschluß einer Menge vom Maße Null) Irrationalzahlen eigentümlich sind. Die Untersuchungen gipfeln im bekannten Satz: *ist $\varphi(n)$ eine positive zunehmende Funktion, so ist die Abschätzung*

$$a_n = O\{\varphi(n)\}$$

*fast überall richtig oder fast überall falsch, je nachdem* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ *konvergiert oder divergiert.*

In den Jahren 1923—1925 habe ich [5]) einige Abhandlungen veröffentlicht, in welchen ich das asymptotische Verhalten einiger Mittelbildungen der Teilnenner zu erforschen suchte. Ich habe

---

[1]) Für genauere Angaben vgl. F. Urban, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1923), 184—185. Es ist zu bemerken, daß Gauß seine Behauptung in wahrscheinlichkeitstheoretischer Form ausgedrückt hat. Auch in den modernen Untersuchungen wird von der Mehrzahl der Autoren diese Ausdrucksweise benutzt, so z.B. von Borel und Kuzmin. Ich ziehe es vor, von Mengenmaß statt von Wahrscheinlichkeit zu sprechen, da sich diese Ausdrucksweise, wie ich glaube, dem Gegenstand näher und direkter anpaßt; eine Wahrscheinlichkeitsaussage erhält hier nämlich ihren präzisen Sinn erst, nachdem sie mittels einer passenden Konvention auf die entsprechende metrische Aussage zurückgeführt wird.

[2]) Vgl. z.B. seinen Kongreßvortrag [Atti del congr. intern. Bologna 1928, **6**, 83].

[3]) Siehe z.B. in Traité du calcul des probabilités, t. II, fasc. I, chap. IV.

[4]) Math. Ann. **71** (1912), 417.

[5]) Vgl. z.B. Math. Ann. **92** (1924), 115.

bewiesen, daß das geometrische Mittel der $n$ ersten Teilnenner für fast alle Zahlen bei $n \to \infty$ beschränkt bleibt; noch präziser: es gibt eine absolute Konstante $\gamma$ von der Beschaffenheit, daß fast überall

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \gamma$$

ist. Ferner habe ich einiges über das Verhalten der arithmetischen Mittel festgestellt. Ich vermutete aber schon damals, daß für diese Mittelbildungen viel präzisere Gesetze gelten; nur waren die von mir benutzten Hilfsmittel unzureichend, um diese Vermutungen zu begründen.

In den verflossenen zehn Jahren sind aber von zwei verschiedenen Seiten her neue Methoden ersonnen worden, welche den Problemkreis mit wesentlich kräftigeren Hilfsmitteln anzugreifen erlaubten. Es sind dies erstens die Ergebnisse der Kuzminschen Arbeit und zweitens einige neue Methoden, die inzwischen in der Wahrscheinlichkeitstheorie entstanden waren. Diese neuen Hilfsmittel führen, wie ich in dieser Abhandlung zu zeigen beabsichtige, zu einer vollständigen Lösung fast aller in meinen früheren Arbeiten aufgeworfenen Fragen. Es entsteht dabei eine Reihe von metrischen Sätzen, die, wenn sie auch nicht sehr tief liegen, wie ich glaube, einfach, elegant und zum Teil unerwartet erscheinen. Es läßt sich z.B. beweisen, daß der Ausdruck $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ fast überall gegen eine gewisse absolute Konstante konvergiert, und ähnliches gilt auch von vielen anderen Mittelbildungen.

## § 2. *Verallgemeinerung der Abschätzungen von Borel und Kuzmin.*

Ehe wir zum eigentlichen Ziele der vorliegenden Untersuchung übergehen, müssen wir die elementaren Borelschen Abschätzungen sowie die von Kuzmin bewiesene verschärfte Gaußsche Behauptung in einer gewissen Richtung verallgemeinern.

Wir bezeichnen allgemein mit $E\binom{n_1, n_2, \ldots, n_k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ die Menge der zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen, die den Bedingungen

$$a_{n_1} = r_1, \; a_{n_2} = r_2, \; \ldots, \; a_{n_k} = r_k$$

genügen. $\mathfrak{M}E$ soll allgemein das Maß der Menge $E$ bedeuten. Die elementare Grundlage aller folgenden Abschätzungen bildet der

Hilfssatz I. — *Es ist*

$$\frac{\mathfrak{M} E\binom{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}{r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}}}{\mathfrak{M} E\binom{n_1, n_2, \ldots, n_k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}} < \frac{C}{r_{k+1}^2};$$

*dabei ist $C$ eine positive absolute Konstante, und die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ sind sämtlich voneinander verschieden.*

Vorbemerkung: Für den Fall, wo $n_{k+1}$ größer als jedes $n_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ ist, hat diese Abschätzung Borel gegeben; wir brauchen aber für das Folgende den allgemeinen Fall.

Beweis: Ist

$$r_1, r_2, \ldots, r_t$$

eine Reihe von $t$ natürlichen Zahlen, so setze man für $s < t$

$$[r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}] = \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}},$$

$$[r_{s+1}, r_{s+2}, \ldots, r_t] = x_s, \quad [r_{s+1}, r_{s+2}, \ldots, r_t + 1] = x'_s.$$

Die Menge $E\binom{1, 2, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_t}$ ist nichts anderes als das Intervall mit den Endpunkten $[r_1, r_2, \ldots, r_t]$ und $[r_1, r_2, \ldots, r_t + 1]$, die auch in der Form

$$\frac{p_{s-1}(r_s + x_s) + p_{s-2}}{q_{s-1}(r_s + x_s) + q_{s-2}} \text{ bzw. } \frac{p_{s-1}(r_s + x'_s) + p_{s-2}}{q_{s-1}(r_s + x'_s) + q_{s-2}}$$

geschrieben werden können; folglich ist

$$\mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_t} = \left| \frac{p_{s-1}(r_s + x_s) + p_{s-2}}{q_{s-1}(r_s + x_s) + q_{s-2}} - \frac{p_{s-1}(r_s + x'_s) + p_{s-2}}{q_{s-1}(r_s + x'_s) + q_{s-2}} \right| =$$

$$= \frac{|x_s - x'_s|}{[q_{s-1}(r_s + x_s) + q_{s-2}][q_{s-1}(r_s + x'_s) + q_{s-2}]};$$

daraus ergibt sich

$$\frac{|x_s - x'_s|}{q_{s-1}^2 (r_s + 2)^2} < \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_t} < \frac{|x_s - x'_s|}{q_{s-1}^2 r_s^2},$$

$$\mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots, r_t} = \sum_{r_s = 1}^{\infty} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_t} > C' \frac{|x_s - x'_s|}{q_{s-1}^2},$$

$$(1) \qquad \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_t} < \frac{1}{C' r_s^2} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, t}{r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots, r_t},$$

wo $C'$ eine positive absolute Konstante bedeutet. Damit ist unser

Hilfssatz für den Spezialfall bewiesen, daß die Zahlengruppe $n_1$, $n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$, von der Reihenfolge abgesehen, mit dem Abschnitt $1, 2, \ldots, k, k+1$ der natürlichen Zahlenreihe zusammenfällt. Um daraus einen Beweis für den allgemeinen Fall zu erhalten, hat man nur für $t$ die größte der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ zu wählen, $s = n_{k+1}$ zu setzen und die Ungleichung (1) über alle diejenigen $r_i$ in den Grenzen $(1, \infty)$ zu summieren, deren Index $i$ der Zahlengruppe $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$ nicht angehört.

Nun wenden wir uns zu den Methoden und Ergebnissen von Kuzmin. Die in der Einleitung erklärte Funktion $m_n(x)$ genügt, wie es schon Gauß bekannt war, der Funktionalgleichung

$$m_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ m_{n-1}\left(\frac{1}{\nu}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{\nu+x}\right) \right\},$$

aus der man leicht die Existenz von $m_n'(x)$ und die Funktionalgleichung

$$m_n'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+x)^2} m_{n-1}'\left(\frac{1}{\nu+x}\right)$$

erschließt. Der Kuzminsche Beweis der Gaußschen Behauptung beruht auf folgendem Hilfssatz: *Ist*

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

*eine Folge von in* $(0, 1)$ *definierten reellen Funktionen, die der Funktionalgleichung*

$$(2) \qquad f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+x)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{\nu+x}\right) \qquad (n \geqq 1, \ 0 \leqq x \leqq 1)$$

*genügen, und ist im geschlossenen Intervall* $(0, 1)$

$$0 < f_0(x) < M, \quad |f_0'(x)| < \mu,$$

*so gilt daselbst*

$$(3) \qquad f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \Theta A e^{-\alpha\sqrt{n}},$$

*wo* $a = \frac{1}{\lg 2}\int_0^1 f_0(z)dz$, $|\Theta| < 1$ *und* $A$ *und* $\alpha$ *nur von* $M$ *und* $\mu$ *abhängende positive Konstanten sind.*

Setzt man $f_n(x) = m_n'(x)$, so ist $f_0(x) \equiv 1$ und folglich $a = \frac{1}{\lg 2}$ und $A$ und $\alpha$ absolut konstant. Aus (3) ergibt sich dann durch Integration sofort die Gaußsche Behauptung.

Nun sei eine Reihe von $k$ natürlichen Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ beliebig aber fest gegeben. Man bezeichne mit $\varphi_n(x)$ das Maß der Menge der Zahlen $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, die den Bedingungen

$$a_1 = r_1, \ldots, a_k = r_k, z_{k+n}(\alpha) < x$$

genügen; man sieht sofort ein, daß die Folge der Funktionen

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

der Funktionalgleichung

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\nu}\right) - \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\nu + x}\right) \right\} \qquad (n \geqq 1, 0 \leqq x \leqq 1)$$

genügt; denn damit $z_{k+n} < x$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $z_{k+n-1}$ zwischen $\frac{1}{\nu}$ und $\frac{1}{\nu + x}$ eingeschlossen ist, wo $\nu$ eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Daraus folgt aber, daß die Funktionen $\varphi_n'(x)$ der Funktionalgleichung (2) genügen.

Es ist aber $\varphi_0(x)$ einfach die Länge des Intervalls mit den Endpunkten $[r_1, r_2, \ldots, r_k] = \frac{p_k}{q_k}$ und $[r_1, r_2, \ldots, r_k + x]$. Somit hat man

$$\varphi_0(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}x}{q_k + q_{k-1}x} \right| = \frac{x}{q_k(q_k + q_{k-1}x)}. \tag{4}$$

Setzt man

$$\frac{\varphi_n(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ r_1, r_2, \ldots, r_k \end{pmatrix}} = \chi_n(x),$$

so genügt die Funktionenfolge $\chi_n'(x)$ offenbar ebenfalls der Funktionalgleichung (2); ferner ist wegen (4)

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})x}{q_k + q_{k-1}x},$$

da bekanntlich

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ r_1, r_2, \ldots, r_k \end{pmatrix} = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}$$

ist. Endlich ist

$$\chi_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^2}$$

und

$$\chi_0''(x) = -\frac{2q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^3}.$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ hat man demnach

$$\tfrac{1}{2} < |\chi_0'(x)| < 2$$

und

$$|\chi_0''(x)| < 4.$$

Auf die Folge $\chi_n'(x)$ kann somit der Kuzminsche Hilfssatz mit absolut konstanten $A$ und $\alpha$ angewandt werden (von Wichtigkeit ist, daß $A$ und $\alpha$ von $r_1, r_2, \ldots, r_k$ unabhängig gewählt werden können). Es ist somit

$$\chi_n'(x) = \frac{1}{(1+x)\lg 2} + \Theta A e^{-\alpha\sqrt{n}},$$

woraus nach Integration

$$\chi_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} + \Theta' A e^{-\alpha\sqrt{n}} \qquad (|\Theta'| < 1) \tag{5}$$

folgt.

Aus der Definition von $\varphi_n(x)$ folgt nun offenbar, daß

$$\mathfrak{M}E\binom{1,\,2,\,\ldots,\,k,\,k+n-1}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_k,\,r} = \varphi_n\left(\frac{1}{r}\right) - \varphi_n\left(\frac{1}{r+1}\right)$$

ist. Wegen (5) ergibt das

$$\mathfrak{M}E\binom{1,\,2,\,\ldots,\,k,\,k+n-1}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_k,\,r} = \left\{\chi_n\left(\frac{1}{r}\right) - \chi_n\left(\frac{1}{r+1}\right)\right\}\mathfrak{M}E\binom{1,\,2,\,\ldots,\,k}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_k} =$$

$$= \left\{\frac{\lg\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2} + 2\Theta'' A e^{-\alpha\sqrt{n}}\right\}\mathfrak{M}E\binom{1,\,2,\,\ldots,\,k}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_k}.$$

Indem wir diese Ungleichung über einige von den $r_i$ in den Grenzen $(1, \infty)$ summieren und die Ergebnisse miteinander addieren, kommen wir offenbar zu folgendem

Hilfssatz 2. — *Es gibt zwei positive absolute Konstanten $B$ und $\beta$ von der Beschaffenheit, daß für $n_1 < n_2 < \ldots < n_t < n_{t+1}$ und beliebige $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$*

$$\left|\frac{\mathfrak{M}E\binom{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_t,\,n_{t+1}}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_t,\,r}}{\mathfrak{M}E\binom{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_t}{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_t}} - \frac{\lg\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2}\right| < B e^{-\beta\sqrt{n_{t+1}-n_t}}$$

*ist* [6]).

---

[6]) In wahrscheinlichkeitstheoretischer Fassung bedeutet offenbar dieser Satz, daß die Wahrscheinlichkeit der Gleichung $a_{n_{t+1}} = r$ bei beliebig vorgegebenen

§ 3. *Mittelbildungen mit beschränkten Grenzwerten.*

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der verschiedenen Mittelwerte der Teilnenner. Ist $f(r)$ eine nichtnegative, für alle ganzen positiven Werte des Arguments definierte Funktion von $r$, so soll uns das Verhalten von

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}{n}$$

für große $n$ beschäftigen. Die Spezialfälle $f(r)=r$ bzw. $f(r)=\lg r$ liefern das arithmetische bzw. geometrische Mittel der Teilnenner. Für das erstere wird die Untersuchung (die im folgenden Paragraphen durchgeführt werden soll) dadurch wesentlich erschwert, daß der „Erwartungswert" $\int\limits_0^1 a_n d\alpha$ für jedes $n$ unendlich ist. Für das geometrische Mittel erhält man hingegen ein endgültiges Ergebnis; wir beweisen nämlich den folgenden allgemeinen

Satz: — *Ist für* $r\to\infty$ $f(r)=O(r^{1-\delta})$ $(\delta>0$ *konstant), so ist fast überall*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)=\sum_{r=1}^{\infty}f(r)\frac{\lg\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2}.$$

(Die Konvergenz der rechtsstehenden Reihe ist natürlich durch $f(r)=O(r^{1-\delta})$ gesichert.)

Beweis: — Die Funktion $f_n(r)$ sei durch

$$f_n(r)=f(r)\quad\text{für } r\leqq n^{1+\delta},$$
$$f_n(r)=0\quad\text{für } r>n^{1+\delta}$$

definiert, und man setze

$$u_k=\int\limits_0^1 f_k(a_k)d\alpha,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}\{f_k(a_k)-u_k\}.$$

Der erste Schritt des Beweises wird in einer Abschätzung von $\int\limits_0^1 s_n^2 d\alpha$ nach oben bestehen. Offenbar ist

---

$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_t}$ bis auf ein Restglied von der Ordnung $e^{-\beta\sqrt{n_{t+1}-n_t}}$ denselben Wert hat wie die unbedingte Wahrscheinlichkeit derselben Gleichung. Mit anderen Worten sind zwei genügend weit voneinander entfernte Teilnenner, als zufällige Variable aufgefaßt, „fast unabhängig". Auf dieser Quasi-Unabhängigkeit der Teilnenner beruht die Möglichkeit, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung stammende Methoden anzuwenden, wie das in den beiden folgenden Paragraphen tatsächlich geschieht.

$$\int_0^1 s_n^2\,d\alpha = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \{f_k(a_k)-u_k\}^2 d\alpha + \\ + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\int_0^1 \{f_i(a_i)f_k(a_k)-u_iu_k\}\,d\alpha =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} g_{ik}, \tag{6}$$

wo allgemein

$$b_k = \int_0^1 \{f_k(a_k)-u_k\}^2 d\alpha, \quad g_{ik} = \int_0^1 \{f_i(a_i)f_k(a_k)-u_iu_k\}\,d\alpha$$

gesetzt ist.

Nun hat man für $k > i$

$$g_{ik} = \int_0^1 f_i(a_i)f_k(a_k)\,d\alpha - u_iu_k = \\ = \sum_{r=1}^{i^{1+\delta}}\sum_{s=1}^{k^{1+\delta}} f_i(r)f_k(s)\,\mathfrak{M}E\binom{i,\,k}{r,\,s} - u_iu_k. \tag{7}$$

Hierin ist nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{M}E\binom{i,\,k}{r,\,s} < \frac{C}{s^2}\,\mathfrak{M}E\binom{i}{r}, \tag{8}$$

und nach Hilfssatz 2

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{i,\,k}{r,\,s} - \frac{\lg\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2}\,\mathfrak{M}E\binom{i}{r}\right| < Be^{-\beta\sqrt{k-i}}\,\mathfrak{M}E\binom{i}{r}; \tag{9}$$

da aber nach demselben Hilfssatz

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{k}{s} - \frac{\lg\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2}\right| < Be^{-\beta\sqrt{k}}$$

ist, so folgt aus (9)

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{i,\,k}{r,\,s} - \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\mathfrak{M}E\binom{k}{s}\right| < 2Be^{-\beta\sqrt{k-i}}\,\mathfrak{M}E\binom{i}{r}. \tag{10}$$

Indem wir für $s \leqq e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}$ (10) und für $s > e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}$ (8) anwenden, erhalten wir aus (7)

$$g_{ik} < \sum_{r=1}^{i^{1+\delta}} f_i(r)\,\mathfrak{M}E\binom{i}{r}\left\{\sum_{s=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}} f_k(s)\left[\mathfrak{M}E\binom{k}{s} + 2Be^{-\beta\sqrt{k-i}}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{s<e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}} C\frac{f_k(s)}{s^2}\right\} - u_iu_k.$$

Beachten wir nun, daß einerseits $\sum_{s=1}^{\infty} f_k(s)\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} = u_k$ und andererseits nach Voraussetzung $f(s) < C_1 s^{1-\delta}$ ist [7]), so ergibt sich

$$g_{ik} < \sum_{r=1}^{i^{1+\delta}} f_i(r)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r} \left\{ u_k + 2\,B e^{-\beta\sqrt{k-i}} C_1 \sum_{s=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}} s^{1-\delta} + C\,C_1 \sum_{s=e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}}^{\infty} s^{-1-\delta} \right\} - u_i u_k$$

$$< 2\,B C_1 u_i e^{-\beta\sqrt{k-i}}\, e^{(2-\delta)\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}} + C\,C_1 u_i \left\{ e^{-(1+\delta)\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}} + \int_{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k-i}}}^{\infty} s^{-1-\delta}\, ds \right\}$$

$$< C_2 u_i e^{-\frac{\beta\delta}{2}\sqrt{k-i}}.$$

Da $u_i$ wegen

$$u_i < \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r} < C\,C_1 \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1-\delta}$$

unterhalb einer positiven Konstanten $C_3$ liegt, ergibt sich hieraus

$$2\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} < 2\,C_2 C_3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{\beta\delta}{2}\sqrt{r}} < C_4 n.$$

Somit folgt aus (6)

$$\int_0^1 s_n^2\, d\alpha < \sum_{k=1}^{n} b_k + C_4 n. \tag{11}$$

Nachdem diese Abschätzung gewonnen ist, verfahren wir folgenderweise. Ist $e_k$ die Menge der durch

$$s_k > \varepsilon n, \quad s_j \leqq \varepsilon n \qquad (j < k)$$

charakterisierten zwischen 0 und 1 liegenden Zahlen, so ist für $n > k$

$$\int_{e_k} s_n^2\, d\alpha > \int_{e_k} s_k^2\, d\alpha + 2\int_{e_k} s_k(s_n - s_k)\, d\alpha. \tag{12}$$

Hierin müssen wir das zweite Integral rechts nach unten abschätzen. Im folgenden sollen alle gestrichenen Summen über solche Werte von $r_1, r_2, \ldots, r_k$ erstreckt werden, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{k} \{f_i(r_i) - u_i\} > \varepsilon n, \quad \sum_{i=1}^{j} \{f_i(r_i) - u_i\} \leqq \varepsilon n \text{ für } j < k$$

---

[7]) $C_1, C_2, \ldots$ bedeuten hier und im folgenden positive Konstanten, die höchstens von der gewählten Funktion $f(n)$ abhängen können.

genügen. Wir haben offenbar

$$(13)\qquad \int\limits_{e_k} s_k(s_n - s_k)d\alpha = \sum_{j=k+1}^{n} \int\limits_{e_k} s_k\{f_j(a_j) - u_j\}\, d\alpha,$$

$$(14)\qquad \int\limits_{e_k} s_k\{f_j(a_j) - u_j\}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k} [f_i(r_i) - u_i]\right\} \sum_{h=1}^{j^{1+\delta}} \{f_j(h) - u_j\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k, j}{r_1, r_2, \ldots, r_k, h}.$$

Nun ist nach Hilfssatz 1

$$(15)\qquad \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k, j}{r_1, r_2, \ldots, r_k, h} < \frac{C}{h^2} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$$

und nach Hilfssatz 2 für $j > k$

$$\left| \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k, j}{r_1, r_2, \ldots, r_k, h} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{h(h+2)}\right\}}{\lg 2} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \right| <$$

$$< B e^{-\beta\sqrt{j-k}} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$$

und

$$\left| \mathfrak{M} E\binom{j}{h} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{h(h+2)}\right\}}{\lg 2} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \right| <$$

$$< B e^{-\beta\sqrt{j}} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$$

und folglich

$$(16)\qquad \left| \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k, j}{r_1, r_2, \ldots, r_k, h} - \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \mathfrak{M} E\binom{j}{h} \right| <$$

$$< 2 B e^{-\beta\sqrt{j-k}} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}.$$

Indem wir in (14) für $h \leqq e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}$ die Abschätzung (16) und für $h > e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}$ die Abschätzung (15) benutzen, erhalten wir

$$\int\limits_{e_k} s_k\{f_j(a_j) - u_j\} d\alpha >$$

$$> \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k} [f_i(r_i) - u_i]\right\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \sum_{h \leqq e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} [f_j(h) - u_j] \mathfrak{M} E\binom{j}{h} -$$

$$-\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k}[f_i(r_i)+u_i]\right\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}\left\{2 B e^{-\beta\sqrt{j-k}} \sum_{h=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}}[f_j(h)+u_j] + \right.$$

$$\left. + C \sum_{h<e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} \frac{f_j(h)+u_j}{h^2}\right\} =$$

$$= -\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k}[f_i(r_i)-u_i]\right\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \sum_{h>e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} [f_j(h)-u_j]\, \mathfrak{M} E\binom{j}{h} -$$

$$-\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k}[f_i(r_i)+u_i]\right\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}\left\{2 B e^{-\beta\sqrt{j-k}} \sum_{h=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}}[f_j(h)+u_j] + \right.$$

$$\left. + C \sum_{h>e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} \frac{f_j(h)+u_j}{h^2}\right\} >$$

$$> -\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k}' \left\{\sum_{i=1}^{k}[f_i(r_i)-u_i]\right\} \mathfrak{M} E\binom{1, 2, \ldots, k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}\left\{2 B e^{-\beta\sqrt{j-k}} \sum_{h=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}}[f_j(h)+u_j] + \right.$$

$$\left. + 2C \sum_{h>e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} \frac{f_j(h)+u_j}{h^2}\right\} >$$

$$> -\left\{2 B e^{-\beta\sqrt{j-k}} C_1 e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}(2-\delta)} + 2C \sum_{h>e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{j-k}}} \frac{C_1 h^{1-\delta}+C_3}{h^2}\right\} \int_{e_k} \sum_{i=1}^{k}[f_i(a_i)+u_i]\,d\alpha >$$

$$> -C_5 e^{-\frac{\beta\delta}{2}\sqrt{j-k}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \int_{e_k} f_i(a_i)\,d\alpha + C_3 n\, \mathfrak{M} e_k\right\}.$$

Wegen (13) findet man danach

$$\int_{e_k} s_k(s_n - s_k)\,d\alpha > -C_5 \left\{\sum_{i=1}^{n} \int_{e_k} f_i(a_i)\,d\alpha + C_3 n\, \mathfrak{M} e_k\right\} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{\beta\delta}{2}\sqrt{r}} >$$

$$> -C_6 \left\{\sum_{i=1}^{n} \int_{e_k} f_i(a_i)\,d\alpha + n\, \mathfrak{M} e_k\right\}.$$

Nun ergibt (12) für genügend großes $n$

$$\int\limits_{e_k} s_n^2 d\alpha > \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_k - 2C_6 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{e_k} f_i(a_i) d\alpha + n\, \mathfrak{M} e_k \right\} >$$

$$> \frac{\varepsilon^2 n^2}{2} \mathfrak{M} e_k - 2C_6 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{e_k} f_i(a_i) d\alpha$$

und folglich wegen (11)

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M} e_k < \frac{2}{\varepsilon^2 n^2} \left\{ \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{n} e_k} s_n^2 d\alpha + 2C_6 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{n} e_k} f_i(a_i) d\alpha \right\} <$$

$$< \frac{2}{\varepsilon^2 n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k + C_4 n + 2C_6 C_3 n \right\} < \frac{2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{\varepsilon^2 n^2} + \frac{C_7}{\varepsilon^2 n}.$$

Nachdem diese Ungleichung gewonnen ist, verläuft der Rest des Beweises ohne Schwierigkeiten [8]). Offenbar ist

$$\sum_{k=1}^{n} e_k = E\{ \max_{1 \leq k \leq n} s_k > \varepsilon n \};$$

demnach ergibt (17)

$$\mathfrak{M} E\{ \max_{1 \leq k \leq n} s_k > \varepsilon n \} < \frac{2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{\varepsilon^2 n^2} + \frac{C_7}{\varepsilon^2 n}.$$

Da offenbar dieselbe Abschätzung für $E\{ \min\limits_{1 \leq k \leq n} s_k < -\varepsilon n \}$ gilt, findet man

$$\mathfrak{M} E\{ \max_{1 \leq k \leq n} |s_k| > \varepsilon n \} < \frac{4 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{\varepsilon^2 n^2} + \frac{2C_7}{\varepsilon^2 n}.$$

Daraus folgt nun

$$\mathfrak{M} E\left\{ \max_{2^m \leq k < 2^{m+1}} \left| \frac{s_k}{k} \right| > \varepsilon \right\} \leq \mathfrak{M} E\left\{ \max_{1 \leq k \leq 2^{m+1}} |s_k| > \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{m+1} \right\} <$$

$$< \frac{4 \sum\limits_{k=1}^{2^{m+1}} b_k}{\varepsilon^2 2^{2m}} + \frac{4C_7}{\varepsilon^2 2^m}$$

und für $m_2 > m_1$

---

[8]) Die nächstfolgende Überlegung ist einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Schluß von Kolmogoroff nachgebildet (vgl. C. R. **101** (1930), 910).

$$\mathfrak{M}E\left\{\max_{2^{m_1}\leq k<2^{m_2}}\left|\frac{s_k}{k}\right|>\varepsilon\right\}\leqq\sum_{m=m_1}^{m_2-1}\mathfrak{M}E\left\{\max_{2^m\leqq k<2^{m+1}}\left|\frac{s_k}{k}\right|>\varepsilon\right\}<$$

$$<\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{m=m_1}^{m_2-1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{m+1}}b_k}{2^{2m}}+\frac{4C_7}{\varepsilon^2}\sum_{m=m_1}^{m_2}\frac{1}{2^m}<$$

$$<\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{m=m_1}^{m_2-1}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=1}^{2^{m_1}}b_k+\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{m=m_1}^{m_2-1}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=2^{m_1}+1}^{2^{m+1}}b_k+\frac{8C_7}{\varepsilon^2 2^{m_1}}<$$

$$<\frac{16}{\varepsilon^2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{m_1}}b_k}{2^{2m_1}}+\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\sum_{2^i\leqq k<2^{i+1}}b_k\sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}+\frac{8C_7}{\varepsilon^2 2^{m_1}}<$$

$$<\frac{16}{\varepsilon^2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{m_1}}b_k}{2^{2m_1}}+\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{i=m_1}^{m_2-1}\frac{1}{2^{2i-1}}\sum_{2^i\leqq k<2^{i+1}}b_k+\frac{8C_7}{\varepsilon^2 2^{m_1}}<$$

$$<\frac{16}{\varepsilon^2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{m_1}}b_k}{2^{2m_1}}+\frac{32}{\varepsilon^2}\sum_{k=2^{m_1}}^{2^{m_2}}\frac{b_k}{k^2}+\frac{8C_7}{\varepsilon^2 2^{m_1}}.$$

Nun ist aber

$$b_k=\int_0^1\{f_k(\alpha_k)-u_k\}^2d\alpha<\int_0^1 f_k^2(\alpha_k)d\alpha=\sum_{r=1}^{k^{1+\delta}}f^2(r)\,\mathfrak{M}E\binom{k}{r}<$$

$$<C\sum_{r=1}^{k^{1+\delta}}\frac{f^2(r)}{r^2}<CC_1\sum_{r=1}^{k^{1+\delta}}r^{-2\delta}<C_8k^{1-\delta^2}$$

und folglich einerseits

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=o(n^2)$$

und andererseits die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k^2}$$

konvergent.

Läßt man demnach zunächst $m_2$ und dann $m_1$ unendlich groß werden, so folgt

$$\mathfrak{M}E\left\{\max_{k>n}\left|\frac{s_k}{k}\right|>\varepsilon\right\}\to 0 \text{ für } n\to\infty;$$

wegen der Willkürlichkeit von $\varepsilon$ folgt hieraus, daß fast überall

$$(18) \qquad \frac{s_n}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

ist.

Nun sei $E_n$ die Menge der Irrationalzahlen zwischen 0 und 1, welche für wenigstens ein $k > n$ der Ungleichung

$$a_k > k^{1+\delta}$$

genügen. Offenbar ist

$$\mathfrak{M} E_n \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l > k^{1+\delta}} \mathfrak{M} E\binom{k}{l} < C \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l > k^{1+\delta}} \frac{1}{l^2} < \frac{C_9}{n^\delta}$$

und folglich

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} E_n = 0.$$

Somit bilden die Zahlen, die allen $E_n$ angehören, eine Nullmenge; jede andere Zahl kann aber nur endlich vielen von den Mengen $E_n$ angehören. Sei $x$ eine solche Zahl, also

$$x \not\subset E_n \text{ für } n > n_0;$$

für diese Zahl haben wir

$$a_k \leqq k^{1+\delta} \qquad (k > n_0)$$

und folglich

$$f_k(a_k) = f(a_k) \qquad (k > n_0),$$

$$\left| \frac{s_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \{f(a_k) - u_k\}}{n} \right| \leqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} f(a_k)}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Wegen (18) folgt daraus, daß fast überall

$$(19) \qquad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

ist. Endlich ist nach Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\, \mathfrak{M} E\binom{k}{r} - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right| + C \sum_{r > k^{1+\delta}} \frac{f(r)}{r^2} \leqq$$

$$\leqq \left| \sum_{r=1}^{e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k}}} f(r) \left[ \mathfrak{M} E\binom{k}{r} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right] \right| +$$

$$+ C \sum_{r > k^{1+\delta}} \frac{f(r)}{r^2} + C_{10} \sum_{r > e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k}}} \frac{f(r)}{r^2} \leqq$$

$$\leqq e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k}} B e^{-\beta\sqrt{k}} + C \sum_{r > k^{1+\delta}} r^{-1-\delta} + C_{10} \sum_{r > e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{k}}} r^{-1-\delta} <$$

$$< B e^{-\frac{\beta}{2}\sqrt{k}} + C_{11} k^{-\delta(1+\delta)} + C_{12} e^{-\beta\delta\sqrt{k}}$$

und folglich

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (k \to \infty);$$

deswegen ist auch

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n \to \infty).$$

Infolgedessen ergibt (19), daß fast überall

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n \to \infty)$$

ist, womit der Beweis unseres Satzes vollendet ist.

Setzt man $f(r) = \lg r$, so erhält man insbesondere den

Satz: — *Das geometrische Mittel* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ *der Teilnenner konvergiert für* $n \to \infty$ *fast überall gegen die absolute Konstante*

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\frac{\lg r}{\lg 2}} = 2{,}6 \ldots$$

## § 4. *Das arithmetische Mittel der Teilnenner.*

Wir wollen nun das Verhalten des arithmetischen Mittels

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

der Teilnenner für $n \to \infty$ untersuchen. Es ist von vornherein klar, daß wir in diesem Fall kein so präzises Ergebnis erhalten können, wie es uns im vorstehenden Paragraphen für die daselbst betrachteten Mittelbildungen gelungen ist; man weiß nämlich schon aus den Untersuchungen von Borel und F. Bernstein, daß sogar der limes superior von $a_n/n$ fast überall unendlich ist; erst recht kann ingefolgedessen $\sum_{k=1}^{n} a_k/n$ höchstens auf einer Nullmenge einem endlichen Grenzwert zustreben. Andererseits divergiert die im Hauptsatz von § 3 rechtsstehende Reihe offenbar im gegenwärtigen Fall.

Es lassen sich jedoch, wie nun gezeigt werden soll, über das Verhalten der arithmetischen Mittel ziemlich präzise Aussagen machen, die jedenfalls an Genauigkeit alles bisher darüber bekannte wesentlich übertreffen. Der Sinn dieser Aussagen läuft dahin, daß das arithmetische Mittel $\sum_{k=1}^{n} a_k/n$ der Teilnenner mit $n$ „im Allgemeinen" wie $\frac{\lg n}{\lg 2}$ ins Unendliche wächst. Was hier die Worte „im Allgemeinen" bedeuten sollen, erhellt aus folgender exakten Fassung:

Satz: — *Für jedes feste $\varepsilon > 0$ ist*

$$\mathfrak{M}E\left\{\left|\frac{s_n/n}{\lg n/\lg 2}-1\right|>\varepsilon\right\}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

*wo $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ gesetzt ist.*

Der Quotient $\frac{s_n/n}{\lg n/\lg 2}$ strebt also gegen 1 im Sinne der „Maßkonvergenz" [9]). Von vornherein ist klar, daß dieser Satz nicht dahin verschärft werden kann, daß etwa fast überall $\frac{s_n/n}{\lg n/\lg 2}\to 1$ wäre; denn aus den schon erwähnten Ergebnissen von Borel und F. Bernstein folgt z.B. insbesondere, daß der limes superior von $a_n/n \lg n$ fast überall unendlich ist.

Beweis: — Der Kürze halber bezeichne man für $k \leqq n$ mit

---

[9]) In diesem Fall wird die wahrscheinlichkeitstheoretische Fassung vielleicht etwas prägnanter; sie lautet nämlich: für $n\to\infty$ strebt das Verhältnis $\frac{s_n/n}{\lg n/\lg 2}$ *modo bernoulliano* gegen 1; oder: die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $\left|\frac{s_n/n}{\lg n/\lg 2}-1\right|>\varepsilon$ wird, bei jedem $\varepsilon>0$, für $n\to\infty$ unendlich klein.

$e_k$ die Menge der zwischen 0 und 1 gelegenen Irrationalzahlen, für die

$$a_k < n \lg n$$

ist, und setze

$$\prod_{k=1}^{n} e_k = F_n.$$

Ehe wir zur eigentlichen Beweisführung übergehen, müssen wir einige vorbereitende Abschätzungen erbringen. Wir setzen für $i, k \leqq n$, $i \neq k$

$$\int_{F_n} a_k d\alpha = u_k, \quad \int_{F_n} a_k^2 d\alpha = b_k, \quad \int_{F_n} a_i a_k d\alpha = g_{ik}.$$

Es ist, wenn man mit $\overline{F}_n$ die zu $F_n$ komplementäre Menge bezeichnet,

$$u_k = \int_{e_k} a_k d\alpha - \int_{e_k - F_n} a_k d\alpha = \sum_{r=1}^{n \lg n} r\, \mathfrak{M} E\binom{k}{r} - \sum_{r=1}^{n \lg n} r\, \mathfrak{M}\left\{\overline{F}_n E\binom{k}{r}\right\} = \Sigma_1 - \Sigma_2;$$

hierin ist nach Hilfssatz 2 für $k > \sqrt{n}$

$$\Sigma_1 = \sum_{r=1}^{n \lg n} r \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} + B e^{-\beta\sqrt{k}} \sum_{r=1}^{n \lg n} r \Theta_{r,k} =$$

$$= \frac{\lg n}{\lg 2} + O(\lg \lg n) \qquad (|\Theta_{r,k}| < 1);$$

für $k > \sqrt{n}$ ist demnach [10])

$$\left|\Sigma_1 - \frac{\lg n}{\lg 2}\right| < C_1 \lg \lg n.$$

Andererseits ist nach Hilfssatz 1

$$\Sigma_2 < \sum_{k=1}^{n \lg n} r \cdot \frac{C}{r^2} \mathfrak{M} \overline{F}_n;$$

nun ist aber

$$\mathfrak{M} \overline{F}_n \leqq \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M} E(a_k > n \lg n) < n \frac{C_2}{n \lg n} = \frac{C_2}{\lg n},$$

und folglich

$$\Sigma_2 < C_3.$$

[10]) In diesem Paragraphen bezeichnen $C_1, C_2, \ldots$ positive absolute Konstanten.

Endlich gilt für alle $k \leqq n$

$$u_k \leqq \int\limits_{e_k} a_k dx < C_4 \lg n.$$

Demnach erhält man

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \left| u_k - \dfrac{\lg n}{\lg 2} \right| < C_5 \lg \lg n & (\sqrt{n} < k \leqq n) \\ u_k < C_4 \lg n & (1 \leqq k \leqq n) \end{array}\right\}.$$

Ferner ist nach Hilfssatz 1 für alle $k \leqq n$

$$(21) \qquad b_k < \int\limits_{e_k} a_k^2 d\alpha = \sum_{r=1}^{n \lg n} r^2 \mathfrak{M} E\binom{k}{r} < C n \lg n.$$

Endlich müssen wir $g_{ik}$ abschätzen; der Bestimmtheit halber sei $k > i$; wir haben

$$g_{ik} = \int\limits_{e_i e_k} a_i a_k d\alpha - \int\limits_{e_i e_k \overline{F}_n} a_i a_k d\alpha = I_1 - I_2.$$

Hierin ist

$$(22) \quad I_1 = \sum_{r,\,s=1}^{n \lg n} r s \,\mathfrak{M} E\binom{i,\,k}{r,\,s} = \sum_{r=1}^{n \lg n} r \,\mathfrak{M} E\binom{i}{r} \sum_{s=1}^{n \lg n} s \frac{\mathfrak{M} E\binom{i,\,k}{r,\,s}}{\mathfrak{M} E\binom{i}{r}};$$

nun ist für $k - i > \sqrt{n}$ nach Hilfssatz 2

$$\sum_{s=1}^{n \lg n} s \frac{\mathfrak{M} E\binom{i,\,k}{r,\,s}}{\mathfrak{M} E\binom{i}{r}} = \sum_{s=1}^{n \lg n} \left[ \frac{s \lg \left\{ 1 + \frac{1}{s(s+2)} \right\}}{\lg 2} + s \Theta_{i,k,r,s} B e^{-\beta \sqrt{k-i}} \right] =$$

$$= \frac{\lg n}{\lg 2} + O(\lg \lg n), \qquad |\Theta_{i,k,r,s}| < 1,$$

während für $k \leqq \sqrt{n}$ jedenfalls nach Hilfssatz 1

$$\sum_{s=1}^{n \lg n} s \frac{\mathfrak{M} E\binom{i,\,k}{r,\,s}}{\mathfrak{M} E\binom{i}{r}} < \sum_{s=1}^{n \lg n} s \cdot \frac{C}{s^2} = O(\lg n)$$

ist. Demnach ergibt (22) im Fall $i > \sqrt{n}$, $k - i > \sqrt{n}$

$$(23) \qquad \left| I_1 - \frac{\lg^2 n}{\lg^2 2} \right| < C_6 \lg n \lg \lg n.$$

Ferner ist

$$I_2 = \sum_{r,s=1}^{n \lg n} r s \,\mathfrak{M} \left\{ \overline{F}_n \cdot E\binom{i,\,k}{r,\,s} \right\};$$

hierin ist nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{M}\left\{\bar{F}_n \cdot E\binom{i,\,k}{r,\,s}\right\} = \frac{\mathfrak{M}\left\{\bar{F}_n \cdot E\binom{i,\,k}{r,\,s}\right\}}{\mathfrak{M}\left\{\bar{F}_n \cdot E\binom{i}{r}\right\}}\,\mathfrak{M}\left\{\bar{F}_n \cdot E\binom{i}{r}\right\} <$$

$$< \frac{C}{s^2}\,\frac{C}{r^2}\,\mathfrak{M}\bar{F}_n < \frac{C_7}{r^2 s^2 \lg n}$$

und folglich

$$(24) \qquad I_2 < \frac{C_7}{\lg n}\sum_{r,\,s=1}^{n}\frac{1}{rs} < C_8 \lg n;$$

wegen (23) und (24) ist

$$(25) \qquad \left| g_{ik} - \frac{\lg^2 n}{\lg^2 2}\right| < C_9 \lg n \lg\lg n \qquad (i > \sqrt{n},\ k - i > \sqrt{n});$$

endlich ist für alle $k \leqq n,\ i \leqq n$,

$$(26) \qquad g_{ik} \leqq \int\limits_{e_i e_k} a_i a_k\,dx < C_{10} \lg^2 n.$$

Nachdem diese Abschätzungen gewonnen sind, gehen wir zum Beweise unserer Behauptung über. Setzt man

$$E\left\{\left|\frac{s_n \lg 2}{n \lg n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = E_n,$$

so ist

$$(27) \qquad \mathfrak{M} E_n = \mathfrak{M}(E_n F_n) + \mathfrak{M}(E_n \bar{F}_n),$$

und hierin ist

$$(28) \qquad \mathfrak{M}(E_n \bar{F}_n) \leqq \mathfrak{M}\bar{F}_n < \frac{C_2}{\lg n}.$$

Andererseits hat man offenbar

$$\int\limits_{E_n F_n}\left\{\frac{s_n \lg 2}{n \lg n} - 1\right\}^2 dx \geqq \varepsilon^2\,\mathfrak{M}(E_n F_n)$$

und folglich

$$\mathfrak{M}(E_n F_n) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{E_n F_n}\left\{\frac{s_n \lg 2}{n \lg n} - 1\right\}^2 d\alpha < \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{F_n}\left\{\frac{s_n \lg 2}{n \lg n} - 1\right\}^2 d\alpha =$$

$$= \frac{\lg^2 2}{\varepsilon^2 n^2 \lg^2 n}\left\{\int\limits_{F_n} s_n^2\,d\alpha - \frac{2n \lg n}{\lg 2}\int\limits_{F_n} s_n\,d\alpha + \frac{n^2 \lg^2 n}{\lg^2 2}\,\mathfrak{M} F_n\right\} =$$

$$= \frac{\lg^2 2}{\varepsilon^2 n^2 \lg^2 n}\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} - \frac{2n \lg n}{\lg 2}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{n^2 \lg^2 n}{\lg^2 2}\,\mathfrak{M} F_n\right\}.$$

Wegen (20), (21), (25) und (26) erhält man danach

$$\mathfrak{M}(E_n F_n) < \frac{\lg^2 2}{\varepsilon^2 n^2 \lg^2 n} \cdot$$

$$\cdot \Bigg\{ C n^2 \lg n + 2 \sum_{i=\sqrt{n}}^{n} \sum_{k=i+\sqrt{n}}^{n} \frac{\lg^2 n}{\lg^2 2} + C_{11} n^2 \lg n \lg\lg n +$$

$$+ C_{12} n^{3/2} \lg^2 n - \frac{2n \lg n}{\lg 2} \sum_{k=\sqrt{n}}^{n} \frac{\lg n}{\lg 2} + \frac{2C_5}{\lg 2} n^2 \lg n \lg\lg n +$$

$$+ 2 \frac{C_4}{\lg 2} n^{3/2} \lg^2 n + \frac{n^2 \lg^2 n}{\lg^2 2} \Bigg\} < \frac{C_{13}}{\varepsilon^2} \frac{\lg\lg n}{\lg n}.$$

Aus (27), (28) und (29) folgt

$$\mathfrak{M} E_n < \frac{C_{14}}{\varepsilon^2} \frac{\lg\lg n}{\lg n}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M} E_n = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

KOROLLAR: — *Die Reihe*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \dots$$

*ist fast überall divergent.*

Diese Tatsache ist deshalb von Interesse, weil über diese Frage die bisher bekannten Ergebnisse gar nichts vermuten liessen. Nicht nur die grundlegenden Borelschen Abschätzungen, sondern auch die genaueren von mir gefundenen zeigten nur, daß $s_n$ fast überall unendlich oft oder höchstens endlich oft die nichtabnehmende Funktion $\varphi(n)$ übertrifft, je nachdem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ divergiert oder konvergiert; hieraus war aber über das Verhalten der Reihe (30) nichts zu folgern.

BEWEIS: — Wäre die Reihe (30) auf einer Menge von positivem Maß konvergent, so müßte sie bekanntlich auch auf einer Menge $F$, $\mathfrak{M} F = \beta > 0$, *gleichmäßig* konvergieren. Man hätte somit für alle genügend großen $m$ und alle $k > 0$

$$\sum_{n=m}^{m+k} \int_F \frac{d\alpha}{s_n} < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ eine beliebig vorgegebene positive Zahl bedeutet. Nun ist aber offenbar, wenn $M_n$ die Menge der Irrationalzahlen bedeutet, die die Ungleichung

$$s_n > 2n \lg n$$

erfüllen, bei genügend kleinen $\varepsilon$

$$M_n \subset E_n,$$

und folglich nach dem soeben bewiesenen Satze

$$\mathfrak{M} M_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist für genügend großes $n$

$$\int\limits_F \frac{d\alpha}{s_n} \geqq \int\limits_{F\overline{M}_n} \frac{d\alpha}{s_n} > \frac{1}{2n \lg n}\, \mathfrak{M}(F\overline{M}_n) = \frac{\mathfrak{M} F - \mathfrak{M}(F M_n)}{2n \lg n} > \frac{\beta}{4n \lg n}$$

und somit

$$\sum_{n=m}^{m+k} \int\limits_F \frac{d\alpha}{s_n} > \frac{\beta}{4} \sum_{n=m}^{m+k} \frac{1}{n \lg n},$$

was bei jedem $m$ durch geeignete Wahl von $k$ beliebig groß gemacht werden kann. Der erhaltene Widerspruch beweist offenbar unsere Behauptung.

(Eingegangen den 29. März 1934.)