COMPOSITIO MATHEMATICA

GEORG V. ALEXITS

Über die Verteilung der irrationalen Punkte in lokal nicht zusammenhängenden Kontinua

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 153-160
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__153_0>

Über die Verteilung der irrationalen Punkte in lokal nicht zusammenhängenden Kontinua

von

Georg v. Alexits

Budapest

Bekanntlich braucht ein Kontinuum K, das in den Punkten einer in K dichten Menge M nicht lokal zusammenhängend ist, keine irrationalen Punkte zu haben. Eine genügend dichte Verteilung der Menge M hat aber eine entsprechend dichte Verteilung der irrationalen Punkte von K zur Folge [1]). Wir wollen zeigen, daß sich dieser Parallelismus zwischen lokalem Unzusammenhang und Irrationalität auch weiter verfolgen läßt. Wir beweisen nämlich, daß die in einer genügend dichten Menge lokal nicht zusammenhängenden Kontinua sozusagen fast ausschließlich aus irrationalen Punkten bestehen. Als Anwendung dieser Struktureigenschaft der Kontinua werden wir uns am Ende mit einer Frage aus dem Problemkreis der homogenen Kurven beschäftigen.

1.

Hilfssätze.

1. Unter Kontinuum verstehen wir einen mehrpunktigen, kompakten und zusammenhängenden metrischen Raum. Das Kontinuum K ist im Punkte p lokal zusammenhängend, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von p gibt derart, daß jedes Punktepaar aus U auf einem Teilkontinuum von K liegt, dessen Durchmesser unter ε bleibt. Mit $\overline{A}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle der Teilmenge A von K. $A \subset B$ bezeichnet das Enthaltensein von A in B und wir schreiben $A \Subset B$ für die Beziehung, daß auch die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A Teil der Menge B ist.

---

[1]) G. v. Alexits, Über im Kleinen zusammenhängende Kontinua [Erg. math Koll. Wien 7 (1936), 13].

2. *Ist das Kontinuum K in keinem Punkte seiner offenen Teilmenge U lokal zusammenhängend, so existiert eine offene Menge $V \Subset U$ derart, daß die Komponenten von $\overline{V}$ in $\overline{V}$ nirgends dicht sind.*

Nehmen wir an, unsere Behauptung sei nicht richtig, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. In der Tat besitzt unter dieser Annahme die abgeschlossene Hülle $\overline{V}_1$ jeder offenen Menge $V_1 \Subset U$, deren Durchmesser $\delta(V_1) < 1$ ist, eine in $\overline{V}_1$ nicht nirgends dichte Komponente C_1. Daraus folgt, da die Komponenten von $\overline{V}_1$ abgeschlossen sind, daß C_1 einen relativ offenen Teil von $\overline{V}_1$ enthält. V_1 ist aber eine offene Menge, somit enthält C_1 auch eine im ganzen Raum K offene Teilmenge V_2, deren Durchmesser $\delta(V_2) < \frac{1}{2}$ ist. Da C_1 abgeschlossen ist, ist $\overline{V}_2 \subset C_1$, also $\overline{V}_2 \subset \overline{V}_1$. Durch einen ähnlichen Schluß ergibt sich die Existenz einer offenen Menge V_3 vom Durchmesser $\delta(V_3) < \frac{1}{3}$, welche in einer Komponente C_2 von $\overline{V}_2$ enthalten ist. Fährt man auf diese Weise fort, so ergibt sich eine Folge $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ von offenen Mengen mit folgenden Eigenschaften:

$$\overline{V}_{n+1} \subset \overline{V}_n, \tag{1}$$

$$\delta(V_n) < \frac{1}{n}, \tag{2}$$

(3) V_{n+1} *ist Teil einer Komponente* C_n *von* $\overline{V}_n$.

Da die Folge $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_n, \ldots$ nach (1) monoton abnimmt, gibt es im Durchschnitt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$ einen Punkt p. Betrachte man ein beliebiges Punktepaar aus der Umgebung V_{n+1} des Punktes p. Nach (3) liegt dieses Punktepaar auf dem Kontinuum C_n, dessen Durchmesser nach (2) $\delta(C_n) \leqq \frac{1}{n}$ ist. Wir haben also in der Menge U einen Punkt p bestimmt, in welchem K lokal zusammenhängend ist, entgegen der Voraussetzung. Damit ist der angekündigte Widerspruch hergestellt.

3. *Ist K in keinem Punkte seiner offenen Teilmenge U lokal zusammenhängend, so enthält U eine Menge A_d mit folgenden Eigenschaften:*

1°. *A_d ist abgeschlossen.*

2°. *Jede Komponente von A_d hat einen Durchmesser $\geqq d > 0$.*

3°. *Die Komponenten von A_d sind nirgends dicht.*

4°. *A_d hat unabzählbar viele Komponenten.*

5°. *A_d ist von zweiter Kategorie.*

Bezeichne, in der Tat, A_δ die Menge, welche aus allen Komponenten von einem Durchmesser $\geqq \delta > 0$ der im vorangehenden Satz definierten Menge $\overline{V}$ besteht. Sei p ein Punkt von $\overline{A}_\delta$ und $U(p)$ eine Umgebung von p. Hat $U(p)$ nur mit endlich vielen Komponenten von einem Durchmesser $\geqq \delta$ der Menge $\overline{V}$ Punkte gemein, so ist p in einer dieser Komponenten enthalten, also gehört p zur Menge A_δ. Hat aber jede Umgebung $U(p)$ von p mit unendlich vielen Komponenten von $\overline{V}$, deren Durchmesser $\geqq \delta$ ist, gemeinsame Punkte, so sei $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ eine Folge dieser Komponenten. Für diese Folge ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} C_n$ nicht leer. Nach Zoretti [2]) ist also $C = \overline{\lim}_{n\to\infty} C_n$ zusammenhängend und wegen $\delta(C_n) \geqq \delta$ ist auch $\delta(C) \geqq \delta$. Die p enthaltende Komponente von $\overline{V}$ enthält das Kontinuum C, und daher ist ihr Durchmesser $\geqq \delta$, also gehört p auch in diesem Fall zu A_δ. Daraus folgt $\overline{A}_\delta = A_\delta$, womit die Eigenschaft 1° der Menge A_δ bewiesen ist.

Die Komponenten der Menge A_δ haben definitionsgemäß einen Durchmesser $\geqq \delta$. Das ist die behauptete Eigenschaft 2° der Menge A_δ. Da weiter die Komponenten von A_δ auch Komponenten von $\overline{V}$, diese aber schon in $\overline{V}$, umsomehr also im ganzen Raum K nirgends dicht sind, ist damit auch die Eigenschaft 3° der Menge A_δ bewiesen.

Betrachten wir die Menge $A_{\frac{1}{n}}$ und nehmen an, sie besitze für jedes n höchstens abzählbar unendlich viele Komponenten. Da jede Komponente von $A_{\frac{1}{n}}$ auch Komponente der Menge $\overline{V}$ und daher in $\overline{V}$ nirgends dicht ist, wäre in diesem Fall $\overline{V} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ von erster Kategorie in sich. Bekanntlich ist das aber für einen abgeschlossenen Teil eines Kontinuums nicht der Fall. Es gibt also ein k_1, so daß $A_{\frac{1}{n}}$ für alle $n \geqq k_1$ aus unabzählbar vielen Komponenten besteht, wie es die Eigenschaft 4° verlangt.

Wäre jede Menge $A_{\frac{1}{n}}$ von erster Kategorie, so auch ihre Summe $\overline{V}$. Das ist aber unmöglich, da schon die Menge V als offener Teil von K eine Menge zweiter Kategorie ist. Es gibt daher ein k_2, so daß $A_{\frac{1}{n}}$ für $n \geqq k_2$ von zweiter Kategorie ist. Setzen wir $\frac{1}{d} = \operatorname{Max}(k_1, k_2)$, so besitzt also A_d auch die Eigenschaft 5° und damit alle verlangte Eigenschaften.

---

[2]) L. Zoretti [Encycl. sciences math. II. 1 (1912)], p. 145.

4. Nennen wir eine Teilmenge B von K bezüglich ihrer Komponenten kondensiert, wenn jede Umgebung eines beliebigen Punktes p von B mit unabzählbar vielen Komponenten der Menge B Punkte gemein hat.

Ist K in keinem Punkte seiner offenen Teilmenge U lokal zusammenhängend, so enthält K eine Teilmenge B_d mit folgenden Eigenschaften:

1*. *B_d ist abgeschlossen.*
2*. *B_d ist bezüglich ihrer Komponenten kondensiert.*
3*. *Jede Komponente von B_d hat einen Durchmesser $\geqq d > 0$.*
4*. *B_d ist von zweiter Kategorie.*

Bezeichne, in der Tat, B_d die Menge aller Punkte der im vorangehenden Satz definierten abgeschlossenen Menge A_d, zu welchen es beliebig kleine Umgebungen gibt, die mit unabzählbar vielen Komponenten von A_d Punkte gemein haben. Es ist klar, daß B_d abgeschlossen ist, also die Eigenschaft 1* besitzt. Weiter kann die Menge $A_d - B_d$ offenbar höchstens mit abzählbar unendlich vielen Komponenten von A_d Punkte gemein haben. Wenn daher p ein beliebiger Punkt von B_d ist, so gibt es unter den unabzählbar vielen Komponenten von A_d, die mit einer Umgebung $U(p)$ von p gemeinsame Punkte haben, unabzählbar viele in B_d enthaltene Komponenten von A_d. Wegen $B_d \subset A_d$, sind diese auch Komponenten von B_d, die Umgebung $U(p)$ von p hat also mit unabzählbar vielen Komponenten von B_d Punkte gemein, wie es die Eigenschaft 2* verlangt.

Sei p ein Punkt von B_d und C die zugehörige Komponente der Menge B_d. Auf Grund der Definition von B_d gibt es eine Folge $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ von Komponenten der Menge A_d, die ganz in B_d liegen und sich bei p häufen. Nach der Eigenschaft 2° der Menge A_d ist $\delta(C_n) \geqq d$, daher hat auch die Menge $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_n$ einen Durchmesser $\geqq d$. Weiter ist [2a]) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_n$ zusammenhängend und wegen der Abgeschlossenheit von B_d Teilmenge von C. Aus $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_n \subset C$ folgt dann $\delta(C) \geqq d$, womit auch die Eigenschaft 3* bewiesen ist.

Aus der Eigenschaft 3° der Menge A_d folgt, daß die in höchstens abzählbar vielen Komponenten von A_d enthaltene Menge $A_d - B_d$ von erster Kategorie ist. Wäre auch B_d von erster Kategorie, so auch A_d, was aber mit der Eigenschaft 5° der Menge A_d in

---

[2a]) Nach Zoretti [2]), da $\underline{\lim} C_n$ nicht leer ist.

Widerspruch steht. B_d ist also von zweiter Kategorie und damit sind alle vier Eigenschaften der Menge B_d bewiesen.

2.

Die Struktur des Irrationalteiles.

1. Die Verzweigungsordnung [3]) eines Punktes p der Teilmenge A des Kontinuums K ist die kleinste Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, für welche es beliebig kleine Umgebungen von p gibt, deren Begrenzungen mit A einen Durchschnitt von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ haben. Ist $\mathfrak{m}$ höchstens abzählbar unendlich, so heißt p ein rationaler Punkt, anderenfalls nennt man p einen irrationalen Punkt von A (Menger). Bezeichne K^c die Menge der irrationalen Punkte des Kontinuums K und K^{cc} die Menge der irrationalen Punkte von K^c.

2. *Ist das Kontinuum K in keinem Punkte seiner offenen Teilmenge U lokal zusammenhängend, so ist $U - K^{cc}$ ein nirgends dichter Teil von U.*

Bezeichne $S(p, \varrho)$ die Menge aller Punkte von K, deren Entfernung von p weniger als ϱ beträgt. In U gibt es eine abzählbare Menge bestehend aus den Punkten $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)}, \ldots$, so daß die Beziehungen gelten

$$U = \Sigma_{k=1}^{\infty} S(p_k^{(n)}, \varrho_k^{(n)}), \tag{4}$$

$$\varrho_k^{(n)} < \frac{1}{n}, \tag{5}$$

wie groß auch n sein mag. Da K in keinem Punkte der offenen Menge $S(p_k^{(n)}, \varrho_k^{(n)})$ lokal zusammenhängend ist, gibt es nach 1.4 in $S(p_k^{(n)}, \varrho_k^{(n)})$ eine Menge B_d mit den Eigenschaften 1*—4*. Da B_d abgeschlossen und von zweiter Kategorie ist, enthält B_d eine offene Menge $W_k^{(n)}$. Bezeichne p einen Punkt aus $W_k^{(n)}$ und $U(p)$ eine beliebige Umgebung von p mit einem Durchmesser $< d$. B_d ist bezüglich ihrer Komponenten kondensiert, $U(p)$ hat also mit unabzählbar unendlich vielen Komponenten von B_d gemeinsame Punkte. Da $U(p)$ einen Durchmesser $< d$, die Komponenten von B_d dagegen einen Durchmesser $\geqq d$ haben, folgt daraus, daß die Begrenzung jeder genügend kleinen Umgebung $U(p)$ des beliebigen Punktes p von $W_k^{(n)}$ aus den zu $U(p)$ nicht fremden unabzählbar vielen Komponenten von B_d

---

[3]) K. Menger, Grundzüge einer Theorie der Kurven [Math. Ann. 95 (1926), 277—306]; P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, II [Verh. Akad. Amsterdam 13, No. 4 (1928), 1—172].

je einen Punkt enthält, folglich ist $W_k^{(n)} \subset K^c$. Die Menge $W_k^{(n)}$ ist aber offen, daher liegt die Begrenzung jeder hinlänglich kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes p von $W_k^{(n)}$ im Inneren der Menge $W_k^{(n)} \subset K^c$. Somit hat die Begrenzung jeder hinlänglich kleinen Umgebung von p auch mit K^c einen unabzählbaren Durchschnitt, also ist $W_k^{(n)} \subset K^{cc}$. Bilden wir die Menge

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(n)}.$$

W ist offen und Teil der Menge K^{cc}. Bezeichne q einen beliebigen Punkt von U. Nach (4) gibt es für jedes n einen Punkt $p_k^{(n)}$ derart, daß q in $S(p_k^{(n)}, \varrho_k^{(n)})$ enthalten sei. Aus (5) folgt dann wegen $W_k^{(n)} \subset S(p_k^{(n)}, \varrho_k^{(n)})$, daß in einer beliebigen Umgebung von q auch Punkte der Menge W liegen. W ist also eine in U dichte offene Menge. Ihr Komplement $U - W$ ist daher in U nirgends dicht. Umsomehr folgt dann aus $W \subset K^{cc}$, daß $U - K^{cc}$ in U nirgends dicht ist. Das war eben unsere Behauptung.

3. *Ist die Menge N aller Punkte, in welchen das Kontinuum K lokal zusammenhängend ist, von erster Kategorie, so ist $K - K^{cc}$ nirgends dicht.*

In der Tat ist N ein Teil-G_δ des Kontinuums K [4]). Daraus folgt bekanntlich, daß N entweder von zweiter Kategorie, oder nirgends dicht sein muß. Nach Annahme kann hier nur der letztere Fall eintreten. Dann ist $K - \overline{N}$ eine in K dichte offene Menge und K ist in keinem Punkte von $K - \overline{N}$ lokal zusammenhängend. Wenden wir auf $K - \overline{N}$ den vorangehenden Satz an, so folgt unmittelbar unsere Behauptung.

4. ***Problem.*** Enthält jedes Kontinuum, das in keinem seiner Punkte lokal zusammenhängend ist, ein Teilkontinuum K mit $K^c = K$?

3.

Homogene Kurven.

1. Ein eindimensionales Kontinuum nennt man eine Kurve. Eine Kurve K heißt homogen, wenn es zu je zwei ihrer Punkte p, q eine topologische Abbildung von K in sich gibt, welche p in q überführt. Wir wollen diesen Homogenitätsbegriff folgenderweise abschwächen: K heiße lokal homogen, wenn man zu je zwei ihrer Punkte p, q zwei homöomorphe Umgebungen $U(p)$,

---

[4]) K. Menger, A. a. O. [3]), p. 285.

$U(q)$ auswählen kann. Herr Mazurkiewicz [5]) hat gezeigt, daß die einzige homogene ebene und lokal zusammenhängende Kurve die topologische Kreislinie ist. Neulich hat Herr Waraszkiewicz [6]) den Beweis des folgenden Satzes skizziert: Die topologische Kreislinie ist sogar unter allen ebenen Kontinua die einzige homogene Kurve. Wenn man aber von der Bedingung eben zu sein absieht, so gibt es auch andere homogene Kurven als die topologische Kreislinie. Herr van Dantzig [7]) hat nämlich eine homogene Raumkurve angegeben, die in keinem Punkte lokal zusammenhängend ist. Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Unter allen Kontinua K mit $K^c \neq K$ ist die topologische Kreislinie die einzige lokal homogene Kurve.

2. Zum Beweise benötigen wir den folgenden Begriff [8]): Der Punkt p von K heißt vermeidbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(p)$ von p gibt derart, daß je zwei Punkte der Menge $U(p) - (p)$ auf einem p nicht enthaltenden Kontinuum vom Durchmesser $< \varepsilon$ liegen. Die nicht vermeidbaren Punkte von K heißen unvermeidbar. Bezeichne nun $E_{\mathfrak{m}}$ die Eigenschaft von K, in einem Punkte p die Verzweigungsordnung $\mathfrak{m}$ zu haben. Bezeichne weiter E_l die Eigenschaft von K, im Punkte p lokal zusammenhängend zu sein. Bezeichne endlich E_v die Eigenschaft von K, daß p ein vermeidbarer Punkt von K ist. Nehmen wir an, K sei lokal homogen und besitze im Punkte p eine der Eigenschaften $E_{\mathfrak{m}}$, E_l oder E_v. Da K lokal homogen ist, gibt es zu jedem Punkte q eine Umgebung $U(q)$, welche mit einer Umgebung $U(p)$ des Punktes p homöomorph ist. Beachten wir, daß die Eigenschaften $E_{\mathfrak{m}}$, E_l, E_v topologische Invarianten sind und ihr Bestehen im Punkte p nur vom Verhalten des Kontinuums K im Inneren der Umgebung $U(p)$ abhängt, so folgt, daß K im Punkte q dieselbe Eigenschaften $E_{\mathfrak{m}}$, E_l oder E_v besitzt, welche ihm auch in p zukommen. Diese Tatsache läßt sich folgenderweise ausdrücken:

Ein lokal homogenes Kontinuum hat in jedem seiner Punkte dieselbe Verzweigungsordnung, ist entweder in jedem oder in keinem

---

[5]) S. Mazurkiewicz, Sur les continus homogènes [Fund. Math. **5** (1924), 137—147].

[6]) Z. Waraszkiewicz, Sur les courbes planes topologiquement homogènes [C. R. Paris **204** (1937), 1388—1390].

[7]) D. van Dantzig, Über topologisch homogene Kontinua [Fund. Math. **15** (1930), 102—125].

[8]) P. Urysohn, Über im kleinen zusammenhängende Kontinua [Math. Ann. **98** (1928), 296—408].

seiner Punkte lokal zusammenhängend und bes eht entweder aus lauter vermeidbaren oder aus lauter unvermeidbaren Punkten.

3. Gehen wir nun zum Beweise unseres Satzes aus 3.1 über und betrachten das lokal homogene Kontinuum K. Nach Annahme ist $K^c \neq K$, also hat K laut 3.2 überhaupt keine irrationale Punkte. Daraus folgt, daß K in jedem Punkte lokal zusammenhängend ist. Denn im entgegengesetzten Fall wäre K nach 3.2 in keinem Punkte lokal zusammenhängend, dann aber hätte K nach 2.3 auch irrationale Punkte. Gäbe es in K einen vermeidbaren Punkt, so wären nach 3.2 alle Punkte von K vermeidbar. Daraus würde aber nach Herrn Ayres [9]) $K^c = K$ folgen, entgegen der Voraussetzung. Wir haben also gezeigt: K ist ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ohne vermeidbare Punkte. Daraus folgt nach Herrn Whyburn [10]), daß es in K einen Punkt der Verzweigungsordnung 1 oder 2 gibt. Da nach 3.2 jeder Punkt von K dieselbe Verzweigungsordnung hat und es kein Kontinuum mit lauter Punkten erster Ordnung gibt [11]), haben also alle Punkte von K die Verzweigungsordnung 2. Dann ist eben K eine topologische Kreislinie [12]), wie wir es behauptet haben.

4. *Problem.* Gibt es eine lokal homogene und lokal zusammenhängende Kurve K mit $K^c = K$?

5. *Problem.* Gibt es eine nicht homogene, jedoch lokal homogene Kurve?

(Eingegangen den 28. Februar 1938.)

---

[9]) W L. Ayres, On avoidable points of continua with an application to end points [Math. Zeitschr. **34** (1932), 161—178].

[10]) G. T. Whyburn, Concerning points of continuous curves defined by certain im kleinen properties [Math. Ann. **102** (1929), 313—336].

[11]) K. Menger, a.a.O. [3]), p. 283; P. Urysohn, a.a.O. [3]), p. 78.

[12]) K. Menger, a.a.O. [3]), p. 303; P. Urysohn, a.a.O. [3]), p. 71.