COMPOSITIO MATHEMATICA

MARCEL RUEFF

Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 161-202

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__161_0>

Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

von

Marcel Rueff

Zürich

Einleitung.

1. Sind L und Λ zwei Mannigfaltigkeiten[1]) — oder auch allgemeiner: zwei beliebige Polyeder — und ist f eine Abbildung[2]) von L in Λ, so wird bekanntlich durch f jeder Homologieklasse von L eine bestimmte Homologieklasse von Λ zugeordnet; diese Zuordnung bestimmt den „Homologietypus" von f. Wenn die Homologieeigenschaften von L und Λ bekannt sind, so besteht die Aufgabe, die sämtlichen möglichen Homologietypen der Abbildungen von L in Λ aufzuzählen; diese Aufgabe ist nur für sehr spezielle Fälle gelöst, und man muß sich heute im allgemeinen damit begnügen, Bedingungen anzugeben, durch welche die Gesamtheit der möglichen Typen eingeschränkt wird.

Manche derartige einschränkende Bedingungen können als Verschärfungen oder Verallgemeinerungen des Satzes von der topologischen Invarianz der Homologiegrößen gedeutet werden; denn dieser Satz lautet ja: „Eine *topologische* Abbildung von L auf Λ bewirkt eine *isomorphe* Abbildung der Homologiegruppen und -ringe von L auf diejenigen von Λ"; er besagt also, daß aus der algebraischen Verschiedenheit der Gruppen und Ringe von L bzw. von Λ die Nicht-Existenz topologischer Abbildungen von L auf Λ folgt, und man erhält daher Verschärfungen des Invarianzsatzes, sobald man, auf Grund dieser algebraischen Verschiedenheit, noch größere Klassen von Abbildungen ausschließen kann als nur die topologischen — etwa, um ein Beispiel zu nennen, alle Abbildungen, deren Grade nicht Null sind. In der Tat liegt nach einem Satz von H. Hopf diese Situation vor, falls L und Λ n-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind und wenigstens eine Bettische Zahl von L kleiner ist als die entsprechende Bettische

[1]) Alle Mannigfaltigkeiten sollen geschlossen und orientiert sein.

[2]) Alle Abbildungen sind eindeutig und stetig.

Zahl von Λ [3]); und diese Tatsache ist eine Verschärfung des Satzes von der topologischen Invarianz der Bettischen Zahlen.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, ähnliche neue Sätze aufzustellen. So werden wir Paare von Mannigfaltigkeiten L, Λ angeben, deren Nicht-Homöomorphie zwar schon bekannt war — und zwar, da sie in den Homologiegruppen übereinstimmen, auf Grund von Schnitt- oder Verschlingungsgrößen —, von denen aber jetzt gezeigt wird, daß als Grade der gegenseitigen Abbildungen keine anderen Zahlen in Frage kommen können als (je nach Art der Beispiele): die Zahl 0, oder die Vielfachen einer festen Zahl m, oder die quadratischen Nichtreste mod m (wobei m immer eine durch L und Λ bestimmte Zahl bedeutet) [4]).

2. Zu einer ähnlichen Fragestellung wie der eben besprochenen wird man geführt, wenn man das Homöomorphieproblem der Mannigfaltigkeiten, zu dessen Behandlung der obige Invarianzsatz dient, durch die Frage ersetzt, ob eine Mannigfaltigkeit symmetrisch oder asymmetrisch ist, d.h. ob es möglich oder unmöglich ist, sie topologisch unter Umkehrung der Orientierung auf sich abzubilden. Man hat, besonders durch Betrachtung der Verschlingungs-Invarianten, für gewisse Mannigfaltigkeiten nachweisen können, daß sie asymmetrisch sind [5]). Wir werden diese Sätze verschärfen und ihnen ähnliche an die Seite stellen, indem wir für einige Klassen von Mannigfaltigkeiten L zeigen: Als Grade der Selbstabbildungen kommen — je nach den Homologie-Eigenschaften von L — nur folgende Zahlen in Frage: die positiven Zahlen, oder Quadratzahlen, oder Summen von zwei Quadraten, oder quadratische Reste modulo einer Primzahl der Form $4x-1$ — also jedenfalls nicht die Zahl -1; jede dieser Eigenschaften ist eine Verschärfung der Asymmetrie [6]).

3. Besonders gründlich werden wir die dreidimensionalen „Linsenräume" [7]) untersuchen. Für irgend zwei Linsenräume mit gleicher Ordnung m der Fundamentalgruppe werden die Grade

---

[3]) H. Hopf, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten [Journal f. r. u. angew. Math. **163** (1930), 71—88], Satz IIIa. Ich zitiere diese Arbeit kurz als H.

[4]) Zweiter Teil: 1.3.; 2.2.; 3.3., VII.

[5]) Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie [Leipzig-Berlin 1934], S. 280, Anmerkung 48. Dieses Buch zitiere ich im folgenden als S-Thr.

[6]) Zweiter Teil: 1.1, Korollar zu Vb; 1.1, Vc; — 1.1, Vb; — 1.2; 2.1, VIb und Korollar; 3.3, VII.

[7]) S-Thr, S. 210.

der gegenseitigen Abbildungen vollständig aufgezählt. Für die höherdimensionalen Linsenräume wird nur ein allgemeiner Satz über Selbstabbildungen bewiesen.

Das Homöomorphieproblem für die Linsenräume ist bekanntlich von Reidemeister gelöst worden. [8]) Unsere Methode leistet nichts Derartiges, und sie kann prinzipiell nichts Derartiges leisten: Denn sie ist durchaus eine *Homologie*-Methode, und es wird gezeigt werden, daß zwei Linsenräume, die nach Reidemeister nicht homöomorph sind, doch gegenseitige Abbildungen zulassen, deren Homologietypen *Isomorphismen* sind — also Abbildungen, die man im Rahmen der Homologietheorie nicht von Homöomorphien unterscheiden kann. Zugleich erhält man in diesen Linsenräumen Beispiele von zwei Mannigfaltigkeiten, die sich gegenseitig mit dem Grade 1 aufeinander abbilden lassen, ohne homöomorph zu sein — wodurch eine Frage, die H. Hopf gestellt hat, verneint wird. [9])

4. Die hiermit skizzierten speziellen Sätze bilden den Inhalt des zweiten Teiles der Arbeit. Im ersten Teil werden die Methode und allgemeine Sätze behandelt. Die Methode setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen: 1) der Theorie des „Umkehrungs-Homomorphismus" von H. Hopf [10]), die ohne Schwierigkeit auf beliebige Koeffizientenringe ausgedehnt wird (Kap. II, §§ 3 und 4), und 2) einer Operation R, die in naheliegender Weise jedem r-dimensionalen Torsionselement der Ordnung m eines beliebigen Komplexes einen $(r+1)$-dimensionalen Zyklus mod m zuordnet (Kap. I, § 2; Kap. II, § 2). Eine wichtige Rolle spielen zu wiederholten Malen die „Schnitt-Matrix" der q-dimensionalen Homologieklassen in einer $2q$-dimensionalen Mannigfaltigkeit und die „Verschlingungs-Matrix" q-dimensionaler Torsionselemente in einer $(2q+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit; wir haben Wert darauf gelegt, immer die Analogie zwischen diesen beiden Begriffen deutlich zu machen. In einem Anhang beweisen wir einen Satz über faserungstreue Abbildungen, dessen Inhalt bei der Untersuchung der Abbildungen eines dreidimensionalen Linsenraumes auf sich vermutet werden konnte.

---

[8]) K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume [Abhandl. Math. Seminar Hamburg **11** (1935), 102—109].

[9]) H. Hopf, Quelques problèmes de la théorie des représentations continues [L'Enseignement Math. **35** (1936), 334—348], besonders S. 337.

[10]) H, § 3. — Neuer Beweis: H. Freudenthal, Zum Hopfschen Umkehrungshomomorphismus [Annals of Math. (2) **38** (1937), 847—853].

Die Terminologie in dieser Arbeit ist im wesentlichen dieselbe wie in der „Topologie" von P. Alexandroff und H. Hopf [11]). Die §§ 1, 2, 3 des Kap. V aus diesem Buch, und ebenso die schon zitierte Arbeit „Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten" von H. Hopf werden öfters als bekannt vorausgesetzt werden.

ERSTER TEIL.
Allgemeine Theorie.

Erstes Kapitel.
Eigenschaften von Komplexen und Mannigfaltigkeiten.

Das erste Kapitel enthält nur eine unsern Zwecken angepaßte Darstellung bekannter Tatsachen.

§ 1.

Bettische Gruppen und Koeffizientenbereiche für beliebige Komplexe.

X sei ein endlicher, absoluter Komplex, $\mathfrak{J}$ eine beliebige Koeffizientengruppe. Man erhält in bekannter Weise die additiven Bettischen Gruppen in bezug auf $\mathfrak{J}$. Wir verweisen auf Kapitel V des A-H. Die für diese Arbeit wichtigsten Koeffizientenbereiche sind:

1) Der Ring der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}$;
2) die Restklassenringe modulo m, $\mathfrak{G}_m$;
3) der Körper der rationalen Zahlen, $\mathfrak{R}$.

§ 2.

Die Gruppe $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}$; der Isomorphismus R.

Wir legen als Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}_m$ mit beliebigem $m \geqq 2$ zugrunde. Die Struktur der r-dimensionalen Bettischen Gruppe mod m des Komplexes X, $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}$, läßt sich folgendermaßen durch die ganzzahligen Bettischen Gruppen von X ausdrücken:

$$(1) \qquad \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m} \approx (\mathfrak{B}^r_0)_m + \mathfrak{T}^r_m + {}_m\mathfrak{T}^{r-1} \text{ [12]},$$

[11]) Alexandroff-Hopf, Topologie I [Berlin (1935)]. Ich zitiere dieses Buch immer kurz als A-H.

[12]) A-H, Kap. V, § 3, Nr. 8. Wie a.a.O. werden die folgenden Bezeichnungen gebraucht, wobei A eine Abelsche Gruppe, m eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist: mA ist die Untergruppe der m-fachen Elemente in A, A_m die Restklassengruppe $A - mA$ und ${}_mA$ die Untergruppe derjenigen Elemente $x \in A$, für welche $mx = 0$ ist.

wobei $\mathfrak{B}_0^r$ die r-dimensionale „Bettische Gruppe mod 0" und $\mathfrak{T}^r$ bzw. $\mathfrak{T}^{r-1}$ die r-dimensionale bzw. $(r-1)$-dimensionale Torsionsgruppe bedeuten.

Die Rolle des Summanden ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ in (1) ist folgende: y sei ein beliebiger r-dimensionaler Zyklus mod m; dann gibt es einen ganzzahligen Komplex C und einen ganzzahligen Zyklus z mit [12a])

$$y = \mathfrak{r}_m(C), \qquad mz = \dot{C}.$$

Wird jedem Zyklus y die ganzzahlige $(r-1)$-dimensionale Homologieklasse von z zugeordnet, so sieht man leicht: Diese Abbildung ist ein *Homomorphismus* der Zyklengruppe $Z^r_{\mathfrak{G}_m}$ *auf* die Untergruppe ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^{r-1}$, und der Kern dieser Abbildung ist die Gruppe der Zyklen erster Art $Z^{*r}_{\mathfrak{G}_m}$. Da nun die Bettische Gruppe zweiter Art $\mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m}$ die Restklassengruppe

$$\mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m} \approx Z^r_{\mathfrak{G}_m} - Z^{*r}_{\mathfrak{G}_m}$$

ist, ist der betrachtete Homomorphismus ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m}$ *auf* ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ [13]). Die Umkehrung dieser isomorphen Abbildung nennen wir R, und wir haben:

a) *Es gibt eine isomorphe Abbildung R von ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ auf $\mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m}$, welche folgendermaßen definiert ist*:

Der ganzzahlige Zyklus z^{r-1} repräsentiere ein Element der Gruppe ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ — d.h. es sei $mz^{r-1} \sim 0$ — und C^r sei ein ganzzahliger Komplex derart, daß

$$\dot{C}^r = mz^{r-1}$$

ist; dann ist

$$R(z^{r-1}) \sim \mathfrak{r}_m(C^r) \qquad \text{mod } m.$$

Ersetzen wir in (1) ${}_m\mathfrak{T}^{r-1}$ durch die isomorphe Gruppe $\mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m}$, so können wir noch die für unsere Zwecke wichtige Tatsache festhalten:

b) *Die r-dimensionale Bettische Gruppe mod m kann wie folgt geschrieben werden*:

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m} \approx (\mathfrak{B}_0^r)_m + \mathfrak{T}^r_m + \mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{G}_m}. \tag{2}$$

Ein besonders einfacher Fall ist der folgende: Eine endliche Abelsche Gruppe A heiße „*rein*" mod m, wenn sie direkte Summe

---

[12a]) $\mathfrak{r}_m$ bezeichnet, wie bei A-H, die Reduktion mod m.

[13]) A-H, Kap. V, § 3, Nr. 5.

zyklischer Gruppen ist, deren Ordnungen entweder durch m teilbar, oder zu m teilerfremd sind; dann ist A_m direkte Summe von Zyklen der Ordnung m; dies ist immer der Fall, wenn m Primzahl ist.

Insbesondere ist, wenn die Gruppen $\mathfrak{T}^r$ und $\mathfrak{T}^{r-1}$ rein mod m sind, auch $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}$ eine solche direkte Summe. Bezeichnet t^r_m die Anzahl der durch m teilbaren r-ten Torsionskoeffizienten, so ist in diesem Falle $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}$ die Summe von $p^r + t^r_m + t^{r-1}_m$ Zyklen der Ordnung m [14]).

Bemerkung. Bezüglich der Bezeichnungen ${}_m\mathfrak{T}^r$ und $\mathfrak{T}^r_m$ treffen wir hier ein für alle Mal die folgenden Festsetzungen. ${}_m\mathfrak{T}^r$ ist eine Gruppe *ganzzahliger* Homologieklassen, nämlich derjenigen Elemente der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^r$, deren Ordnungen Teiler von m sind. Dagegen wollen wir unter $\mathfrak{T}^r_m$ eine Gruppe von Homologieklassen *mod m* verstehen, nämlich diejenige Gruppe, die aus der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^r$ durch Reduktion mod m aller Zyklen, also Ausübung der Operation $\mathfrak{r}_m$, entsteht; die so definierte Gruppe $\mathfrak{T}^r_m$ ist mit der unter [12]) erklärten offenbar isomorph, und Mißverständnisse dürften nicht zu befürchten sein.

Da für jede endliche Abelsche Gruppe A die Isomorphie $A_m \approx {}_mA$ gilt [14a]), ist auch $\mathfrak{T}^r_m \approx {}_m\mathfrak{T}^r$.

§ 3.

Mannigfaltigkeiten; Homologiering.

Es sei L eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit [15]); wir legen einen beliebigen Koeffizienten-*Ring* $\mathfrak{J}$ mit Eins zugrunde. Durch die Schnittbildung der Zellen, und somit der Zyklen, läßt sich eine Multiplikation zwischen den Homologieklassen definieren. Unter dem Produkt $H^i \cdot H^j$ zweier Homologieklassen ist diejenige Homologieklasse H^k mit $k = i + j - n$ zu verstehen, in welcher sich der Schnittzyklus z^k eines Zyklus z^i aus H^i und eines Zyklus z^j aus H^j befindet. Die Schnittklasse H^k ist eindeutig durch die

---

[14]) Für Primzahlen: A—H, S. 227, (12).

[14a]) A—H, Anhang I, § 4, Nr. 46.

[15]) Wir hatten in der Einleitung orientierte Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt; bei Beschränkung auf den Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}_2$ behalten die nachstehenden Sätze auch für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten ihre Gültigkeit. Wir gehen aber nicht darauf ein. Ebenso gehen wir nicht auf die Verallgemeinerungen ein, die sich aus der neuen Alexander-Kolmogoroffschen *Ring*-Theorie in beliebigen *Komplexen* ergeben.

Faktorklassen H^i und H^j bestimmt. Die Multiplikation ist assoziativ und es gilt auch das distributive Gesetz. Diese Multiplikation definiert den *Homologiering* oder *Schnittring* $\mathfrak{R}(L^n)$ der zugrunde gelegten Mannigfaltigkeit L^n in bezug auf $\mathfrak{J}$. [16])

Die Schnittbildung ist bis auf das Vorzeichen kommutativ; die Orientierung der Durchschnittszelle zweier orientierter Zellen in der orientierten L^n ist durch eine einfache Festsetzung gegeben, welche für das Produkt zweier beliebiger Komplexe C^i und C^j aus L^n folgende Vorzeichenregel liefert:

$$C^i \cdot C^j = (-1)^{(n-i)(n-j)} C^j \cdot C^i. \tag{1}$$

Speziell ist für jeden Zyklus z aus L^n

$$L^n \cdot z = z \cdot L^n = z, \tag{2}$$

wobei L^n den, durch eine Orientierung der Mannigfaltigkeit bestimmten, n-dimensionalen „Fundamentalzyklus" bezeichnet. L^n ist also die Eins des Schnittringes.

Aus der erwähnten Festsetzung der Orientierung in der Durchschnittszelle folgt die wichtige Vorzeichenregel

$$(C^i \cdot C^j)^{\bullet} = C^i \cdot \dot{C}^j + (-1)^{(n-j)} \dot{C} \ \cdot C^j,$$

welche uns mit (1) die Formel

$$\dot{C}^i \cdot C^j - (-1)^{(n-i+1)(n-j+1)} \dot{C}^j \cdot C^i \sim 0 \tag{3}$$

liefert.

§ 4.

Dualität.

Die Dualitätseigenschaften von $\mathfrak{R}(L^n)$ formulieren wir kurz bei Zugrundelegung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_m$ getrennt.

4.1. *Der Koeffizientenbereich sei* $\mathfrak{R}$.

$z_1^r, \ldots, z_{p^r}^r$ seien ganzzahlige Zyklen, die eine r-dimensionale Homologiebasis mod 0 bilden [16a]); *dann gibt es ganzzahlige Zyklen*

---

[16]) S. Lefschetz, Intersections and transformations of complexes and manifolds [Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), 1—49]; ferner: Topology [New York (1930)], Kap IV.

H. Hopf, siehe Fußnote [3]) der Einleitung.

G. de Rham, Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions [Journal de Math. (9) 10 (1931), 115—200].

[16a]) D.h.: Jeder ganzzahlige Zyklus z^r erfüllt eine und nur eine Homologie $z^r \sim \sum c_k z_k^r$ in bezug auf $\mathfrak{R}$; man vergl. A-H, S. 430, Fußnote (Druckfehler in dieser Fußnote: es muß zweimal $\overset{r}{Z}_{\mathfrak{G}}(K)$ heißen statt $\overset{r}{L}_{\mathfrak{G}}(K)$).

$\bar{z}_1^{n-r}, \ldots, \bar{z}_{p^r}^{n-r}$ *so, daß*

$$\bar{z}_i^{n-r} \cdot z_k^r = e_{ik} \text{ mit } e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

gilt; die $\bar{z}_i^{n-r}$ *bilden eine* $(n-r)$*-dimensionale Homologiebasis mod* 0; *sie heißt „dual" zur Basis* $\{z_k^r\}$. *Es ist* $p^{n-r} = p^r$.

4.2. *Der Koeffizientenbereich sei* $\mathfrak{G}_m$.

Es sei $\{z_k^r\}$, $k = 1, \ldots, q$, eine r-dimensionale Homologiebasis mod m [16b]), und es sei m_k die Ordnung von z_k^r; *dann gibt es Zyklen mod* m $\{\bar{z}_i^{n-r}\}$, $i = 1, \ldots, q$, *derart, daß gilt*

$$\bar{z}_i^{n-r} \cdot z_k^r = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right) \cdot e_{ik} \text{ mit } e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}.$$

Diese $\bar{z}_i^{n-r}$ *bilden eine Basis mod* m; *sie heißt „dual" zur Basis* $\{z_k^r\}$; *der Zyklus* $\bar{z}_i^{n-r}$ *hat die Ordnung* m_i; *die Gruppen* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_m}^{n-r}$ *und* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_m}^r$ *sind isomorph.*

In dem wichtigen Spezialfalle, daß die r-te und die $(r-1)$-te Torsionsgruppe „rein" sind mod m (vergl. § 2), was insbesondere eintritt, wenn m Primzahl ist, gilt

$$\bar{z}_i^{n-r} \cdot z_k^r = e_{ik} \text{ mit } e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 0, & i = k \end{cases}.$$

4.3. Wir gehen an dieser Stelle auf die Einzelheiten der Beweise von 4.1 und 4.2 nicht ein und begnügen uns mit folgender Andeutung: die Beweise sind ganz analog den entsprechenden Beweisen beim Alexanderschen Dualitätssatz [17]); man hat nur die Verschlingungszahlen, die beim Alexanderschen Dualitätssatz auftreten, jetzt immer durch Schnittzahlen zu ersetzen.

4.4. Ein weiterer Teil des Poincaréschen Dualitätssatzes besteht in der Isomorphie der Torsionsgruppen

$$\mathfrak{T}^r \approx \mathfrak{T}^{n-r-1}; \tag{1}$$

sie läßt sich aus der in 4.2 besprochenen Isomorphie

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_m}^r \approx \mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_m}^{n-r},$$

deren Beweis in 4.3 angedeutet wurde, leicht mit der Methode

[16b]) D.h.: Die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_m}^r$ ist direkte Summe zyklischer Gruppen, die von denjenigen Homologieklassen erzeugt werden, in welchen sich die z_k^r befinden.

[17]) Für 4.1: A-H, Kap. XI, § 3, Nr. 4 und § 4, Nr. 3; für 4.2: Kap XI, § 3, Nr. 9 und § 4, Nr. 3.

aus A—H, Kap. V, § 4, Nr. 10, herleiten[17a]); aus ihr folgt $\mathfrak{T}^r_m \approx \mathfrak{T}^{n-r-1}_m$, also[14a]):

$$(1_m) \qquad \mathfrak{T}^r_m \approx {}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$$

(man beachte die „Bemerkung" am Schluß des § 2!). Wir wollen auch die Isomorphie (1_m) zu einer Dualität zwischen ***Basen*** der beiden Gruppen verfeinern — analog zu 4.1 und 4.2.

Die Homologieklassen der Zyklen mod m $z_1^r, z_2^r, \ldots, z_q^r$ mögen eine Basis von $\mathfrak{T}^r_m$ darstellen; dabei fassen wir $\mathfrak{T}^r_m$ als Summanden in der Darstellung aus § 2, b auf:

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{S}_m} \approx (\mathfrak{B}^r_0)_m + \mathfrak{T}^r_m + \mathfrak{B}^{**r}_{\mathfrak{S}_m};$$

d.h. die hier genannte Gruppe $\mathfrak{T}^r_m$ sei die direkte Summe der zyklischen Gruppen, die von den Homologieklassen der z_k^r erzeugt werden. Diese z_k^r bilden dann den Teil einer Basis von $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{S}_m}$, und zu dieser Basis von $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{S}_m}$ gibt es nach 4.2 eine duale Basis; in dieser dualen Basis seien $\mathfrak{z}_1^{n-r}, \mathfrak{z}_2^{n-r}, \ldots, \mathfrak{z}_q^{n-r}$ diejenigen Elemente, die unsern z_k^r in dem Sinne entsprechen, daß

$$\mathfrak{z}_i^{n-r}\cdot z_k^r = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right)e_{ik} \text{ mit } e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

ist.

Wir behaupten: *diese $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ sind Zyklen zweiter Art.*

Beweis: z_i^r ist von der ersten Art, und zwar ist $z_i^r = \mathfrak{r}_m(Z_i^r)$, $m_i Z_i^r = \dot{C}_i^{r+1}$ (C_i^{r+1} ganzzahlig); es sei $\mathfrak{z}^{n-r}$ auch von der ersten Art, also $\mathfrak{z}^{n-r} = \mathfrak{r}_m(\overline{Z}^{n-r})$; dann ist $\overline{Z}^{n-r}\cdot\dot{C}_i^{r+1} = 0$, also $m_i\,\overline{Z}^{n-r}\cdot Z_i^r = 0$, also $\overline{Z}^{n-r}\cdot Z_i^r = 0$, also $\mathfrak{z}^{n-r}\cdot z_i^r = 0$; da aber $\mathfrak{z}_i^{n-r}\cdot z_i^r \neq 0$ ist, ist demnach $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ von der zweiten Art.

Die $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ gehören einer Basis von $\mathfrak{B}^{n-r}_{\mathfrak{S}_m}$ an; daher enthält $\mathfrak{B}^{n-r}_{\mathfrak{S}_m}$ eine Untergruppe U, welche die direkte Summe der zyklischen Gruppen ist, die von den Homologieklassen der $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ erzeugt werden. Da die $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ dieselben Ordnungen m_i haben wie die z_i^r (nach 4.2), ist $U \approx \mathfrak{T}^r_m$.

Anderseits gibt es, da die $\mathfrak{z}_i^{n-r}$ von der zweiten Art sind, $(n-r-1)$-dimensionale ganzzahlige Zyklen $\overline{Z}_i^{n-r-1}$, die Elemente von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$ repräsentieren, so daß $R(\overline{Z}_i^{n-r-1}) \sim \mathfrak{z}_i^{n-r}$ ist (§ 2); die Homologieklassen der $\overline{Z}_i^{n-r-1}$ erzeugen eine Gruppe $R^{-1}(U)$; da R ein Isomorphismus ist, ist $R^{-1}(U)$ eine mit U, also mit $\mathfrak{T}^r_m$, isomorphe Untergruppe von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$. Nach (1_m) muß dann aber $R^{-1}(U) = {}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$ sein. Und da die Homologie-

[17a]) Man vergl. auch S-Thr, S. 245.

klassen der $\bar{z}_i^{n-r}$ eine Basis von U bilden, bilden die Homologieklassen der $\bar{Z}_i^{n-r-1} = R^{-1}(\bar{z}_i^{n-r})$ eine Basis von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$.

Fassen wir zusammen:

Es seien z_k^r, $k = 1, \ldots, q$, solche Zyklen mod m, daß ihre Homologieklassen eine Basis von $\mathfrak{T}_m^r$ bilden; m_k sei die Ordnung von z_k^r. Dann gibt es ganzzahlige Zyklen $\bar{Z}_i^{n-r-1}$, $i = 1, \ldots, q$, der Ordnungen m_i, deren Homologieklassen eine Basis von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$ bilden, so daß

$$R(\bar{Z}_i^{n-r-1}) \cdot z_k^r = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right) e_{ik} \quad \textit{mit} \quad e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

ist.

Die Basis $\{\bar{Z}_i^{n-r-1}\}$ von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}$ nennen wir die zur Basis $\{z_k^r\}$ von $\mathfrak{T}_m^r$ „duale" Basis.

Aus der Definition von R ergibt sich die Deutung der Schnittzahlen $R(\bar{Z}_i^{n-r-1}) \cdot z_k^r$ als „Verschlingungszahlen mod m" von $\bar{Z}_i^{n-r-1}$ und z_k^r.

§ 5.

Die Schnitt-Matrizen.

5.1. Es sei $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{G}_m$ mit beliebigem $m \geqq 2$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt; die Mannigfaltigkeit sei von *gerader* Dimension $n = 2r$, und $\{z_i\}$ sei eine Bettische Basis der Dimension r. Wir betrachten die Matrix S der Schnittzahlen je zweier dieser Basiszyklen:

(1) $$z_i \cdot z_k = s_{ik}, \quad \text{Matrix: } S = (s_{ik}).$$

Da nach § 3, (1)

$$z_i \cdot z_k = (-1)^r \, z_k \cdot z_i$$

ist, *ist S symmetrisch für $n = 4k$ und antisymmetrisch für $n = 4k + 2$.*

5.2. Es sei nun $\{\bar{z}_i\}$ eine im Sinne von 4.1 bzw. 4.2 zu $\{z_k\}$ duale Basis, welche für die vorliegende Dimensionszahl $n = 2r$ ebenfalls von der Dimension r ist. Unter Zugrundelegung von $\mathfrak{R}$ gilt nach 4.1

(2) $$\bar{z}_i \cdot z_k = e_{ik}$$

und unter Zugrundelegung von $\mathfrak{G}_m$, wenn m_k die Ordnung von z_k ist, nach 4.2

(2′) $$\bar{z}_i \cdot z_k = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right) e_{ik} \quad \text{mit} \quad e_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}.$$

Da $\{\bar{z}_i\}$ und $\{z_k\}$ Basen gleicher Dimension sind, gehen die

$\bar{z}_i$ durch eine lineare Transformation U aus den z_k hervor:

(3) $$\bar{z}_i \sim \sum u_{ik} z_k \ .$$

Aus (1), (2) bzw. (2′) und (3) erhält man durch rechtsseitiges Schneiden von (3) mit z_j

(4) $$e_{ij} = \sum u_{ik} s_{kj}$$

bzw.

(4′) $$\mathfrak{r}_m \left(\frac{m}{m_j}\right) e_{ij} = \sum u_{ik} s_{kj} \ ;$$

oder durch Matrizen ausgedrückt bei Zugrundelegung von $\mathfrak{R}$:

(5) $$E = US,$$

und bei Zugrundelegung von $\mathfrak{G}_m$, wenn die Diagonalmatrix $\mathfrak{r}_m \left(\frac{m}{m_j}\right) \cdot e_{ij}$ mit D bezeichnet wird:

(5′) $$D = US.$$

Sind die r-dimensionale und die $(r-1)$-dimensionale Torsionsgruppe rein mod m, so gilt auch bei Zugrundelegung von $\mathfrak{G}_m$

(5″) $$E = US.$$

(5) und (5″) können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Es sei als Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ oder im Falle, daß die Torsionsgruppen rein sind mod m, auch $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. $\{z_i\}$ sei eine r-dimensionale Bettische Basis der $2r$-dimensionalen Mannigfaltigkeit L^n. S sei die Schnitt-Matrix zweier Zyklen dieser Basis, und U die Transformationsmatrix, welche die Basis $\{z_k\}$ in ihre duale Basis überführt. Dann sind U und S zueinander invers.

Manchmal ist es praktisch, statt S die Schnitt-Matrix $\bar{S}$ der dualen Basis $\{\bar{z}_i\}$ zu betrachten, die also durch

($\bar{1}$) $$\bar{z}_h \cdot \bar{z}_j = \bar{s}_{hj}, \quad \text{Matrix: } \bar{S} = (\bar{s}_{hj})$$

gegeben ist. Aus ($\bar{1}$), (3) und (1) ergibt sich

$$\bar{s}_{hj} = \sum u_{hi} u_{jk} s_{ik} \ ,$$

also

$$\bar{S} = USU';$$

multipliziert man dies mit S' und benutzt (5″), so erhält man

$$\bar{S}S' = E,$$

d.h.: *die Matrizen S und $\overline{S}$ sind zueinander kontragredient.* Drückt man S in (5) und (5″) durch $\overline{S}$ aus, so entsteht

$$(\overline{5}) \qquad \overline{S} = U'.$$

Man kann daher in dem soeben formulierten Satz die Behauptung auch so ausdrücken: *U und $\overline{S}$ sind zueinander transponiert.*

5.3. Folgerung aus (5) und (5″):

$$(6) \qquad |S| = \pm 1 \ \textit{bzw.} \ |S| = \textit{Einheit mod}\, m.$$

Für $n = 4k+2$ ist S antisymmetrisch; da die Determinante einer antisymmetrischen Matrix ungeraden Grades gleich 0 ist (abgesehen von dem Fall $m = 2$), so folgt aus (6) — für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ —:

Ist $n = 4k+2$, so ist p^{2k+1} gerade. (*Poincaré.*)

§ 6.

Die Verschlingungs-Matrix mod m.

6.1. Die Mannigfaltigkeit sei von *ungerader* Dimension $n = 2r+1$. Für jedes $m > 2$ und für jede Basis der Gruppe ${}_m\mathfrak{T}^r$ führen wir die „Matrix der Verschlingungszahlen mod m" ein, die sich analog verhält wie die in § 5 betrachtete Matrix der Schnittzahlen[18]):

Es seien Z_k^r ganzzahlige Zyklen, die eine Basis der Gruppe ${}_m\mathfrak{T}^r$ repräsentieren. Indem wir die Gleichheit $n - r - 1 = r$ berücksichtigen, betrachten wir ähnlich wie in 4.4 die Verschlingungszahl mod m von Z_i^r mit $z_k^r = \mathfrak{r}_m(Z_k^r)$, also die Schnittzahlen mod m

$$(1) \qquad R(Z_i^r) \cdot \mathfrak{r}_m(Z_k^r) = t_{ik}\,, \quad \text{Matrix: } T = (t_{ik})\ ;$$

diese Matrix T ist die „Verschlingungs-Matrix" der Basis $\{Z_i^r\}$.

Wie für S von § 5 gelten auch für T gewisse Symmetrieeigenschaften. Gemäß der Definition von R ist, wenn $mZ_i = \dot{C}_i$, $mZ_k = \dot{C}_k$ ist,

---

[18]) H. Seifert, Verschlingungsinvarianten [Sitzungsber. Akad. Berlin, Phys.-Math. Kl. **16** (1933), 811—828].

G. de Rham, Nr. 18 der in der Fußnote [16]) aufgeführten Arbeit.

In diesen beiden Arbeiten ist der Koeffizientenbereich die additive Gruppe der modulo 1 zu reduzierenden rationalen Zahlen, $\mathfrak{R}_1$; für unsere Zwecke ist $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich bequemer.

$$R(Z_i) \cdot z_k = \mathfrak{r}_m\left(\frac{1}{m} C_i \cdot \dot{C}_k\right)$$

und

$$R(Z_k) \cdot z_i = \mathfrak{r}_m\left(\frac{1}{m} C_k \cdot \dot{C}_i\right).$$

Nach § 3, (3) gilt aber für diese Schnittzahlen

$$C_i \cdot \dot{C}_k = (-1)^{(n-r)(n-r)} C_k \cdot \dot{C}_i,$$

also

$$R(Z_i) \cdot z_k = (-1)^{(n-r)} R(Z_k) \cdot z_i,$$

und da $n = 2r + 1$ ist,

$$R(Z_i) \cdot z_k = (-1)^{r+1} R(Z_k) \cdot z_i, \text{ d.h.}$$

$$t_{ik} = (-1)^{r+1} t_{ki}.$$

Die Matrix T ist also symmetrisch für $n = 4k - 1$ und antisymmetrisch für $n = 4k + 1$.

6.2. Es seien nun $\{Z_h\}$ und $\{z_k\}$ Basen von ${}_m\mathfrak{T}^r$ bzw. $\mathfrak{T}^r_m$, die im Sinne von 4.4 dual sind; d.h. es sei

(2) $$R(Z_h) \cdot z_k = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right) e_{hk}.$$

Diese Matrix bezeichnen wir wieder mit D.

Da die z_k eine Basis in $\mathfrak{T}^r_m$ bilden, bestehen Homologien mod m

(3) $$\mathfrak{r}_m(Z_i) \sim \sum u_{ik} z_k.$$

Bezeichnen wir die Verschlingungs-Matrix der Z_h wie in 6.1 mit $(t_{hi}) = T$, so daß also

(1) $$R(Z_h) \cdot \mathfrak{r}_m(Z_i) = t_{hi}$$

ist, so ergibt sich, wenn wir (3) von links mit $R(Z_h)$ schneiden, aus (1) und (2)

(4) $$t_{hi} = \sum u_{ik} \cdot \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_k}\right) e_{hk},$$

also in Matrizen,

(5′) $$T = DU'.$$

Ist die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^r$ rein mod m, so ist $D = E$, also

(5″) $$T = U'.$$

Wir können also folgendes Ergebnis aussprechen:

In der Mannigfaltigkeit L^{2r+1} sei $\{Z_h\}$ eine Basis der Gruppe ${}_m\mathfrak{T}^r$; ihre Verschlingungs-Matrix sei T, und sie gehe mod m aus *ihrer dualen Basis $\{z_k\}$ gemäß* (3) *durch die lineare Transformation U hervor; die r-te Torsionsgruppe von L^{2r+1} sei rein mod m. Dann sind T und U zueinander transponiert.*

Bemerkung. Dieses Ergebnis ist dem aus 5.2, wie es dort durch ($\bar{5}$) ausgedrückt wurde, analog.

6.3. Analog wie in 5.3 folgt aus ($5''$):

$$|T| = \textit{Einheit mod } m. \tag{6}$$

Ist $n = 4k + 1$, so ist T antisymmetrisch, also, wenn T' die transponierte der Matrix T bezeichnet, $T' = -T$; hat T den Grad t, so gilt daher für die Determinante $|T'| = (-1)^t |T|$, also infolge (6): $1 \equiv (-1)^t \bmod m$; *für $m \neq 2$ ist daher t gerade.* Wir formulieren diese Tatsache noch ausdrücklich für den Fall, daß m Primzahl ist, in dem also immer die Torsionsgruppen rein mod m sind; verstehen wir unter t_m^{2k}, wie in Kap. I, § 2, die Anzahl der durch m teilbaren $2k$-ten Torsionskoeffizienten, so gilt in Analogie zu dem Satz über die mittlere Bettische Zahl am Ende von § 5:

Ist $n = 4k + 1$ und m eine ungerade Primzahl, so ist t_m^{2k} gerade.

Zweites Kapitel.

Abbildungen von Komplexen und Mannigfaltigkeiten.

Es seien L und Λ zwei n-dimensionale, orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeiten und f eine eindeutige und stetige (nicht notwendigerweise eindeutig umkehrbare) Abbildung von L auf Λ. In diesem Kapitel werden Sätze über diejenigen Beziehungen besprochen, die durch Abbildungen f von L auf Λ zwischen den im ersten Kapitel eingeführten Begriffen der beiden Mannigfaltigkeiten hergestellt werden. Im folgenden werden der Reihe nach in den §§ 1 bis 6 diejenigen Begriffe untersucht, die im ersten Kapitel unter den gleichen §§-Nummern eingeführt wurden. Die der Mannigfaltigkeit L angehörenden Gebilde werden durchwegs mit lateinischen, diejenigen von Λ mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Nur in den §§ 1 und 2 dürfen, entsprechend dem ersten Kapitel, anstelle von Mannigfaltigkeiten auch zwei beliebige Komplexe X und Ξ vorliegen.

§ 1.

Die Abbildung f bewirkt bekanntlich einen dimensionstreuen Homomorphismus der Bettischen Gruppen von X in die Bettischen Gruppen von Ξ.

§ 2.

Das Verhalten des Isomorphismus R.

Es sei R für X die wie im Kapitel I, § 2, a definierte Abbildung und $\mathbf{P}$ für Ξ die analoge Abbildung.

Dann gilt:

$$f R = \mathbf{P} f.$$

Es genügt, dies für simpliziale f zu beweisen. Dann folgt aber die Behauptung aus der Vertauschbarkeit von f mit den drei Operationen:

$$\text{Randbildung}; \ \mathfrak{r}_m; \ \frac{1}{m}.$$

In der Tat: Es sei z^r irgend ein r-dimensionaler Zyklus aus ${}_m\mathfrak{T}^r$ und $mz^r = \dot{C}^{r+1}$. Es ist einerseits

$$fR(z^r) = f(\mathfrak{r}_m(C^{r+1})),$$

und da

$$f(z^r) = f\left(\frac{1}{m}\dot{C}^{r+1}\right) = \frac{1}{m} f(C^{r+1})^{\dot{}}$$

ist, wird

$$\mathbf{P}f(z^r) = \mathfrak{r}_m f(C^{r+1}) = f(\mathfrak{r}_m(C^{r+1})),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 3.

Der Umkehrungs-Homomorphismus [19]).

Die in diesem Paragraphen bewiesenen oder nur formulierten Sätze sind in enger Anlehnung an die in der Fußnote 3 zitierte Arbeit H zusammengestellt worden. Die in H, §§ 3 und 4 bewiesenen Sätze beruhen auf „schwachen" Homologien, d.h. sie beziehen sich auf den doppelten Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$. [20]) Im folgenden wird hingegen stets *ein* Koeffizientenbereich zugrunde gelegt, und zwar ein *Ring mit Eins.* Dort, wo die Beweise sich wörtlich übernehmen lassen, berufen wir uns auf H und begnügen uns damit, die Sätze in der vielleicht etwas modifizierten Form auszusprechen. Übrigens übernehmen wir im wesentlichen die Bezeichnungen aus H.

---

[19]) Von jetzt an sind L und Λ *immer* geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension n.

[20]) A-H, Kap. V, § 1, Nr. 1.

3.1. Es sei bis auf weiteres als Koeffizientenbereich ein beliebiger *Ring* $\mathfrak{J}$ mit Eins zugrunde gelegt. Es liege eine eindeutige und stetige Abbildung f von L auf Λ vor. Die Sätze dieses Paragraphen folgen im wesentlichen alle aus dem

SATZ I: *Es gibt eine dimensionstreue eindeutige Abbildung* φ *des Ringes* $\mathfrak{R}(\Lambda)$ *in den Ring* $\mathfrak{R}(L)$ *mit den folgenden beiden Eigenschaften*:

1) φ *ist ein Ringhomomorphismus* (*d.h. additiver und multiplikativer Homomorphismus*);

2) *für jedes Element* z *von* $\mathfrak{R}(L)$ *und jedes Element* ζ *von* $\mathfrak{R}(\Lambda)$ *gilt*

$$f(\varphi(\zeta)\cdot z) \sim \zeta\cdot f(z) \tag{1}$$

in bezug auf $\mathfrak{J}$.

Der Beweis von Satz I kann wörtlich aus H übernommen werden.

3.2. Da die Mannigfaltigkeiten L bzw. Λ n-dimensionale Basen sind, wird die Substitution der n-dimensionalen Zyklen durch

$$f(L) \sim \mathfrak{c}\Lambda \tag{2}$$

dargestellt, wobei $\mathfrak{c}$ dasjenige Element aus dem Primring von $\mathfrak{J}$ bedeutet, welches dem ganzzahligen Abbildungsgrad c entspricht, d.h. welches das c-mal genommene Einselement $\mathfrak{e}$ bedeutet. Aus Kap. I, § 3, (2) und (1), (2) dieses Paragraphen ergibt sich unmittelbar für $z = L$:

SATZ Ia: *Für jedes Element* ζ *von* $\mathfrak{R}(\Lambda)$ *ist*

$$f(\varphi(\zeta)) \sim \mathfrak{c}\zeta,$$

wobei $\mathfrak{c}$ *der Grad von* f *in bezug auf* $\mathfrak{J}$ *ist.*

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz I ist auch der nachstehende Satz, dessen Beweis in H enthalten ist:

SATZ Ib: *Wenn* f *eineindeutig ist, so ist* φ *die durch* f^{-1} *bewirkte Ringabbildung.*

3.3. Die Sätze dieses Abschnittes sind reine Folgerungen aus der Tatsache, daß es eine dimensionstreue ringhomomorphe Abbildung φ des Ringes $\mathfrak{R}(\Lambda)$ in den Ring $\mathfrak{R}(L)$ gibt, die die Eigenschaft Ia besitzt; sie gelten für einen beliebigen Koeffizientenring $\mathfrak{J}$ mit Eins.

$\mathfrak{N}_f$ ist die additive Untergruppe von $\mathfrak{R}(L)$, die aus denjenigen Elementen besteht, deren f-Bilder ~ 0 sind in bezug auf $\mathfrak{J}$. Es sei wieder $\mathfrak{c}$ der Grad von f in bezug auf $\mathfrak{J}$. Für die folgenden Sätze wird die Voraussetzung „$\mathfrak{c}$ ist eine Einheit", eine wichtige Rolle spielen. Wir werden also voraussetzen, daß es ein $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{J}$ gibt, so daß $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}' = \mathfrak{e}$ ist. Diese Voraussetzung bedeutet für die drei in dieser Arbeit wichtigsten Koeffizientenbereiche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_m$ folgendes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}: &\quad c \neq 0, \\ \mathfrak{G}: &\quad c = \pm 1, \\ \mathfrak{G}_m: &\quad (c,\ m) = 1. \end{aligned}$$

Satz II: *Ist $\mathfrak{c}$ eine Einheit, so hat f die folgenden Eigenschaften:*

1) *Jeder Zyklus ζ aus Λ ist dem Bild eines Zyklus aus L homolog;*

2) *$\mathfrak{R}(L)$ ist die direkte Summe der Gruppe $\mathfrak{N}_f$ und eines mit $\mathfrak{R}(\Lambda)$ dimensionstreu-isomorphen Ringes $\mathfrak{R}_f$;*

3) *der eben genannte Isomorphismus wird durch Ausübung der Abbildung $\mathfrak{c}'f$ auf die Elemente von $\mathfrak{R}_f$ vermittelt; für je zwei Elemente von $\mathfrak{R}_f$ gilt also*

$$\mathfrak{c}'f(z_1) \cdot \mathfrak{c}'f(z_2) \sim \mathfrak{c}'f(z_1 \cdot z_2)$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \sim \mathfrak{c}f(z_1 \cdot z_2).$$

Der Beweis dieses Satzes ist wörtlich wie in H, da aus

$$\mathfrak{c}\zeta \sim 0$$

durch Multiplikation mit $\mathfrak{c}'$ auch hier

$$\zeta \sim 0$$

folgt.

Satz III: *Eine notwendige Bedingung für die Abbildbarkeit von L auf Λ mit einem Grad $\mathfrak{c}$ (in bezug auf $\mathfrak{J}$), der eine Einheit ist, ist die Existenz eines zu $\mathfrak{R}(\Lambda)$ dimensionstreu-isomorphen Unterrings von $\mathfrak{R}(L)$.*

Der Beweis ist in II, 2 enthalten.

3.4. *In diesem Abschnitt beschränken wir den Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ auf die Ringe $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_m$.*

Satz IIa: *Ist $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{J}}(L) \approx \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$ — ist also z.B. $L = \Lambda$ — und $\mathfrak{c}$ eine Einheit, so ist für zwei beliebige r-dimensionale Zyklen z_1, z_2 aus L*

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \sim \mathfrak{c}f(z_1 \cdot z_2).$$

Beweis: Nach II, 2 gilt für die r-dimensionalen Elemente

$$(1)\qquad \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{J}}(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{J}}(\Lambda),$$

wobei $\mathfrak{N}^r_f$ die Gruppe der r-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{N}_f$ ist. Es genügt für die drei Koeffizientenbereiche, die wir zugelassen haben, zu zeigen, daß $\mathfrak{N}^r_f$ aus dem Nullelement allein besteht. Denn dann besteht auch $\mathfrak{N}_f$ aus dem Nullelement allein, und da nach II, 2 $z \subset \mathfrak{N}_f + \mathfrak{R}_f$ ist, ist jedes Element $z \subset \mathfrak{R}_f$. Aus II, 3 folgt dann die Behauptung.

Wir zeigen nun der Reihe nach für die drei Koeffizientenbereiche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_m$, daß $\mathfrak{N}^r_f$ aus dem Nullelement allein besteht.

$\mathfrak{R}$: Der Rang von $\mathfrak{N}^r_f$ ist nach (1)

$$p^r(L) - p^r(\Lambda),$$

also gleich 0 unter den Voraussetzungen von IIa. Da es keine Elemente endlicher Ordnung gibt, besteht $\mathfrak{N}^r_f$ aus dem Nullelement allein.

$\mathfrak{G}$: Der Rang von $\mathfrak{N}^r_f$ ist wie für $\mathfrak{R}$ gleich 0 oder, was das gleiche bedeutet: $\mathfrak{N}^r_f$ ist eine endliche Gruppe. II, 2 in den r-dimensionalen Elementen endlicher Ordnung ausgedrückt, liefert:

$$\mathfrak{T}^r(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{T}^r(\Lambda).$$

Jetzt muß unter den Voraussetzungen von IIa die Ordnung von $\mathfrak{N}^r_f$ verschwinden. $\mathfrak{N}^r_f$ besteht also aus dem Nullelement allein.

$\mathfrak{G}_m$: Aus $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(\Lambda)$ folgt, da die auftretenden Gruppen endlich sind, daß die Ordnung von $\mathfrak{N}^r_f$ verschwindet, d.h. daß $\mathfrak{N}^r_f$ wiederum aus dem Nullelement allein besteht.

Aus Satz IIa folgt unmittelbar

Satz IIb: *Ist unter den Voraussetzungen von II*a *noch* $\mathfrak{c} = \mathfrak{e}$, *so ist die Ringabbildung f ein dimensionstreuer Isomorphismus zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda)$.*

(Die Ringe $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda)$ sind bereits unter den Voraussetzungen von IIa dimensionstreu-isomorph, aber der Isomorphismus wird nicht durch $f(z)$ selbst, sondern durch $\mathfrak{c}' \cdot f(z)$ vermittelt.)

Satz IIc: *Zwei Mannigfaltigkeiten L und Λ, von denen man jede auf die andere mit einem Grade abbilden kann, der eine Einheit ist, haben in jeder Dimension isomorphe Bettische Gruppen.*

Beweis: Wir führen den Beweis dieses Satzes der Reihe nach für die drei betrachteten Koeffizientenbereiche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_m$ durch.

$\mathfrak{R}$: Aus II, 2 folgt unter den Voraussetzungen von IIc für die r-dimensionalen Elemente

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{R}}(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{R}}(\Lambda)$$

und

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{R}}(\Lambda) \approx \mathfrak{N}^r_{f'} + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{R}}(L);$$

es gilt also für die Ränge:

$$p^r(L) \geqq p^r(\Lambda)$$

und

$$p^r(\Lambda) \geqq p^r(L),$$

also

$$p^r(L) = p^r(\Lambda).$$

Da die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{R}}$ durch die Bettische Zahl p^r eindeutig gegeben ist [21]), ist die Behauptung von IIc bewiesen.

$\mathfrak{G}$: Aus II, 2 folgt wie für $\mathfrak{R}$

$$p^r(L) = p^r(\Lambda).$$

$\mathfrak{N}^r_f$ bzw. $\mathfrak{N}^r_{f'}$ sind also endliche Gruppen. II, 2 für die r-dimensionalen Elemente endlicher Ordnung ergibt unter den Voraussetzungen von IIc:

$$\mathfrak{T}^r(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{T}^r(\Lambda)$$

und

$$\mathfrak{T}^r(\Lambda) \approx \mathfrak{N}^r_{f'} + \mathfrak{T}^r(L).$$

Es müssen somit die Ordnungen von $\mathfrak{T}^r(L)$ und $\mathfrak{T}^r(\Lambda)$ einander gleich sein und diejenige von $\mathfrak{N}^r_f$ bzw. $\mathfrak{N}^r_{f'}$ verschwinden. $\mathfrak{N}^r_f$ bzw. $\mathfrak{N}^r_{f'}$ besteht aus dem Nullelement allein. Die Behauptung von IIc ist somit bewiesen.

$\mathfrak{G}_m$: Aus

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(L) \approx \mathfrak{N}^r_f + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(\Lambda)$$

und

$$\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(\Lambda) \approx \mathfrak{N}^r_{f'} + \mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(L)$$

folgt, da es lauter endliche Gruppen sind, daß die Ordnungen von $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(L)$ und $\mathfrak{B}^r_{\mathfrak{G}_m}(\Lambda)$ einander gleich sind, und somit die Ordnung von $\mathfrak{N}^r_f$ bzw. $\mathfrak{N}^r_{f'}$ verschwindet. $\mathfrak{N}^r_f$ bzw. $\mathfrak{N}^r_{f'}$ besteht aus dem Nullelement allein und somit ist auch IIc in bezug auf $\mathfrak{G}_m$ bewiesen.

Wird $\mathfrak{G}$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt, so gilt:

Korollar zu Satz IIc: *Zwei Mannigfaltigkeiten L und Λ, von*

---

21) A-H, Kap. V, § 3, Nr. 10.

denen man jede auf die andere mit dem Grade $+1$ abbilden kann, haben in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen und isomorphe Torsionsgruppen. [21a])

§ 4.

Die Dualität von f und φ.

Es sei $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{G}_m$ mit beliebigem $m \geqq 2$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt.

SATZ IV: *φ ist durch die in Satz I genannten Eigenschaften eindeutig bestimmt; genauer:*

Sind $\{z_l^r\}$ bzw. $\{\zeta_\lambda^r\}$ r-dimensionale Basen in $\mathfrak{R}(L)$ bzw. $\mathfrak{R}(\Lambda)$, $\{\bar{z}_l^{n-r}\}$ bzw. $\{\bar{\zeta}_\lambda^{n-r}\}$ ihre dualen Basen im Sinne von Kap. I, 4.1 und 4.2, und ist

$$(1)\qquad f(z_l^r) \sim \sum g_{l\lambda}^r \zeta_\lambda^r$$

und

$$(2)\qquad \varphi(\bar{\zeta}_\lambda^{n-r}) \sim \sum \gamma_{\lambda l}^{n-r} \bar{z}_l^{n-r},$$

so ist

$$\text{a)}\qquad \gamma_{\lambda l}^{n-r} = g_{l\lambda}^r,$$

wenn $\mathfrak{R}$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt wird; und

$$\text{b)}\qquad \gamma_{\lambda l}^{n-r} \frac{m}{m_l} \equiv g_{l\lambda}^r \frac{m}{\mu_\lambda} \pmod{m},$$

wenn $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt wird. Dabei ist in b unter m_l die Ordnung von z_l^r und unter μ_λ die Ordnung von ζ_λ^r zu verstehen. Es sind a und b in Matrizengleichung ausgedrückt:

$$\text{a)}\qquad \Gamma' = G$$

$$\text{b)}\qquad \Gamma' D \equiv G\Delta \pmod{m},$$

wenn die Diagonalmatrizen $\frac{m}{m_l}$ und $\frac{m}{\mu_\lambda}$ entsprechend Kap. I, 5.2. mit D und Δ und transponierte Matrizen mit $'$ bezeichnet werden.

Beweis: Der Beweis ist für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ oder für den speziellen Fall $\mathfrak{G}_m$ von Kap. I, 4.2, in dem die Torsionsgruppen rein sind mod m, in H [22]) enthalten. Der Vollständigkeit halber führen wir ihn nachstehend noch für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}_m$ mit beliebigem $m \geqq 2$ durch.

[21a]) Für die Bettischen Zahlen in H, Satz IIIb, enthalten.

[22]) H, § 3, Satz Ia.

Aus der Voraussetzung (2) und Kap. I, 4.2 folgt

$$\varphi(\bar{\zeta}_\lambda^{n-r}) \cdot z_s^r \sim \sum \gamma_{\lambda l}^{n-r} \bar{z}_l^{n-r} \cdot z_s^r \sim \mathfrak{r}_m \left(\gamma_{\lambda s}^{n-r} \frac{m}{m_s}\right) z^0,$$

wobei m_s die Ordnung von z_s^r ist; z^0 ist die durch einen positiv signierten, einfach gezählten Punkt bestimmte Homologieklasse von $\mathfrak{R}(L)$. Hat ζ^0 in $\mathfrak{R}(\varLambda)$ die analoge Bedeutung wie z^0 in $\mathfrak{R}(L)$, so ist

$$f(\varphi(\bar{\zeta}_\lambda^{n-r}) \cdot z_s^r) \sim \mathfrak{r}_m \left(\gamma_{\lambda s}^{n-r} \frac{m}{m_s}\right) \zeta^0.$$

Anderseits ist nach der Voraussetzung (1) und Kap. I, 4.2, wenn μ_λ die Ordnung von ζ_λ^r bedeutet,

$$\bar{\zeta}_\lambda^{n-r} \cdot f(z_s^r) \sim \sum g_{s\sigma}^r \bar{\zeta}_\lambda^{n-r} \cdot \zeta_\sigma^r \sim \mathfrak{r}_m \left(g_{s\lambda} \frac{m}{\mu_\lambda}\right) \zeta^0,$$

also nach Satz I

$$\gamma_{\lambda s}^{n-r} \frac{m}{m_s} \equiv g_{s\lambda}^r \frac{m}{\mu_\lambda} \quad (\mathrm{mod}\ m).$$

§ 5.

Das Verhalten der Schnitt-Matrix.

Die Dimension der Mannigfaltigkeiten L und $\varLambda$ sei $n = 2r$. Es seien $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. Ferner seien $\{z_s\}$ bzw. $\{\zeta_\sigma\}$ r-dimensionale Basen von $\mathfrak{R}(L)$ bzw. $\mathfrak{R}(\varLambda)$ und $\{\bar{z}_s\}$ bzw. $\{\bar{\zeta}_\sigma\}$ ihre im Sinne von Kap. I, 4.1 und 4.2 dualen Basen. Es sei noch

(1) $$f(z_s) \sim \sum g_{s\sigma} \zeta_\sigma, \quad \text{Matrix: } G,$$

(2) $$\bar{z}_s \sim \sum u_{st} z_t, \quad \text{Matrix: } U,$$

(3) $$\bar{\zeta}_\sigma \sim \sum v_{\sigma\tau} \zeta_\tau, \quad \text{Matrix: } \Upsilon.$$

Nach Satz IV ist

(4) $$\varphi(\bar{\zeta}_\sigma) \sim \sum \gamma_{\sigma s} \bar{z}_s, \quad \text{Matrix: } \Gamma,$$

wobei $\Gamma' = G$ für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ und $\Gamma' D \equiv G\varDelta$ (mod m) für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}_m$ ist.

Nach Satz Ia und (3) ist

(5) $$f(\varphi(\bar{\zeta}_\sigma)) \sim \mathfrak{c}\, \bar{\zeta}_\sigma \sim \mathfrak{c} \sum v_{\sigma\tau} \zeta_\tau.$$

Andererseits folgt aus (4), (2) und (1)

(6) $$f(\varphi(\bar{\zeta}_\sigma)) \sim \sum \gamma_{\sigma s} u_{st} g_{t\tau} \zeta_\tau.$$

(5) und (6) führen somit zur folgenden Matrizengleichung, wobei das Gleichheitszeichen bei Zugrundelegung von $\mathfrak{G}_m$ als Kongruenz mod m zu deuten ist:

$$\mathfrak{c}\,\mathrm{Y} = \Gamma U G. \tag{7}$$

Ist als Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ oder, falls die Torsionsgruppen rein sind mod m, $\mathfrak{G}_m$ zugrunde gelegt, so folgt aus (4) und (7)

$$\mathfrak{c}\,\mathrm{Y} = G' U G. \tag{7'}$$

Hieraus und aus dem Ergebnis von 5.2 folgt unmittelbar

SATZ V: *L und Λ seien Mannigfaltigkeiten der Dimension $n = 2r$, und L sei durch f mit dem Grade $\mathfrak{c}$ auf Λ abgebildet. Der Koeffizientenbereich sei $\mathfrak{R}$, oder, falls die Torsionsgruppen rein mod m sind, auch $\mathfrak{G}_m$. Es seien $\{z_s\}$, $\{\zeta_\sigma\}$ r-dimensionale Basen in L bzw. Λ; die Schnitt-Matrizen der zu diesen Basen dualen Basen seien $\overline{S}$ bzw. $\overline{\Sigma}$; die Wirkung von f auf die Basen werde durch* (1) *beschrieben.*

Dann gilt

$$\mathfrak{c}\,\overline{\Sigma} = G' \,\overline{S}\, G. \tag{7''}$$

Aus Satz V folgt

SATZ Va: *Die Voraussetzungen von Satz V seien erfüllt; außerdem sei $\mathfrak{c}$ eine Einheit, und die r-dimensionalen Bettischen Gruppen von L und Λ in bezug auf den zugrunde gelegten Koeffizientenbereich seien zueinander isomorph. Dann gilt*

$$\mathfrak{c}\, S = G \Sigma G' \tag{7'''}$$

wobei S bzw. Σ die Schnitt-Matrizen der in (1) *auftretenden Basen $\{z_s\}$ bzw. $\{\zeta_\sigma\}$ sind.* ($\mathfrak{c}\,S$ *und* Σ *gehören zur selben Klasse.*)

Bemerkung: Wir sagen, daß zwei Matrizen A und B zur gleichen Klasse gehören, wenn es eine quadratische, nichtsinguläre Matrix G gibt so, daß $A = GBG'$ ist. Diese Ausdrucksweise ist besonders für den Fall gebräuchlich, daß A und B symmetrisch sind; dann gehören die zugehörigen quadratischen Formen zur selben Klasse.

Beweis von Va: Da die r-dimensionalen Bettischen Gruppen von L und Λ isomorph sind, ist G quadratisch. Da $\mathfrak{c}$ eine Einheit ist und $|\overline{S}| \neq 0$, $|\overline{\Sigma}| \neq 0$, so geht durch Bildung der Determinanten aus (7'') hervor, daß $|G|$ eine Einheit ist. G ist also eine umkehrbare Matrix und aus (7'') folgt durch Einsetzen von $\overline{S}' = S^{-1}$ und $\overline{\Sigma}' = \Sigma^{-1}$ (man vergl. 5.2) die Behauptung (7''').

§ 6.

Das Verhalten der Verschlingungs-Matrix.

Die Dimension der Mannigfaltigkeiten L und Λ sei $n = 2r + 1$. Es seien $\{z_s\}$ bzw. $\{\zeta_\sigma\}$ r-dimensionale Basen von $\mathfrak{T}_m^r(L)$ bzw. $\mathfrak{T}_m^r(\Lambda)$ und $\{\bar{z}_s\}$ bzw. $\{\bar{\zeta}_\sigma\}$ ihre im Sinne von Kap. I, 4.4 dualen Basen von ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}(L)$ bzw. ${}_m\mathfrak{T}^{n-r-1}(\Lambda)$. Es sei noch (in Bezug auf $\mathfrak{G}_m$):

(1) $$f(z_s) \sim \sum g_{s\sigma} \zeta_\sigma, \qquad \text{Matrix: } G,$$

(2) $$\mathfrak{r}_m(\bar{z}_s) \sim \sum u_{st} z_t\,, \qquad \text{Matrix: } U,$$

(3) $$\mathfrak{r}_m(\bar{\zeta}_\sigma) \sim \sum v_{\sigma\tau} \zeta_\tau, \qquad \text{Matrix: } \mathbf{Y}.$$

Nach Satz IV ist

(4) $$\varphi(\mathbf{P}(\bar{\zeta}_\sigma)) \sim \sum \gamma_{\sigma s} \bar{z}_s, \qquad \text{Matrix: } \Gamma,$$

wobei $\Gamma' D \equiv G \Delta$ ist.

Nach Satz Ia und (3) ist

(5) $$f\varphi(\mathbf{P}(\bar{\zeta}_\sigma)) \sim c\mathbf{P}(\bar{\zeta}_\sigma) \sim c \sum v_{\sigma\tau} \mathbf{P}(\zeta_\tau).$$

Anderseits folgt aus (4), (2) und (1)

(6) $$f\varphi(\mathbf{P}(\bar{\zeta}_\sigma)) \sim \sum \gamma_{\sigma s} u_{st} g_{t\tau} \mathbf{P}(\zeta_\tau).$$

(5) und (6) führen somit zur folgenden Matrizenkongruenz:

(7) $$c\mathbf{Y} \equiv \Gamma\, U\, G \qquad (\text{mod}\ m).$$

Sind die Torsionsgruppen rein mod m, so folgt aus (4) und (7)

(7′) $$c\mathbf{Y} \equiv G'\, U\, G \qquad (\text{mod}\ m).$$

Hieraus und aus dem Ergebnis von 6.2 folgt unmittelbar

Satz VI. *L und Λ seien Mannigfaltigkeiten der Dimension $n = 2r + 1$, und L sei auf Λ mit dem ganzzahligen Grade c abgebildet. $\{z_s\}$, $\{\zeta_\sigma\}$ seien Basen von $\mathfrak{T}_m^r(L)$ bzw. $\mathfrak{T}_m^r(\Lambda)$; die Verschlingungs-Matrizen der zu diesen Basen dualen Basen $\{\bar{z}_s\}$, $\{\bar{\zeta}_\sigma\}$ seien T bzw. Θ (vergl. Kap. I, 4.4 und 6.1); die Matrix G ist durch (1) erklärt.*

Dann gilt

$$c\,\Theta = G'\,T\,G.$$

ZWEITER TEIL.

Anwendungen und Beispiele.

§ 1.

Anwendungen der Schnitt-Matrix.

1.1. Es sei $\mathfrak{R}$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. L sei eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2k$. Es sei $\{z_i^k\}$, $i = 1, \ldots, p^k$, eine Basis der Dimension k und f eine Abbildung mit dem Grade c von L auf sich mit:

$$f(z_i^k) \sim \sum g_{ij}^k z_j^k.$$

Nach Satz V von Kap. II, § 5 ist

$$c\,\overline{S} = G\,\overline{S}\,G', \tag{1}$$

wobei $\overline{S}$ die Schnitt-Matrix einer k-dimensionalen Basis bedeutet. (1) liefert durch Bildung der Determinanten, mit Rücksicht auf Kap. I, 5.3, (6):

$$c^{p^k} = |\,G\,|^2. \tag{2}$$

Aus (2) ist ersichtlich:

Satz Vb: *L sei $2k$-dimensional; ist dann p^k ungerade, so ist der Grad c jeder Selbstabbildung von L eine Quadratzahl.* [22a])

Korollar: Ist p^k ungerade, so gestattet L keine Selbstabbildung von negativem Grade; insbesondere ist L also asymmetrisch.

Auf Grund des Poincaréschen Dualitätssatzes ist die im Satz Vb und seinem Korollar gemachte Voraussetzung, daß p^k ungerade ist, gleichbedeutend mit der folgenden: *Die Eulersche Charakteristik von L ist ungerade.*

Es sei jetzt $k = 2q$, also $n = 4q$; dann ist die Matrix S symmetrisch, und man darf von ihrem „*Trägheitsindex*" sprechen — d.h. dem Trägheitsindex der zu S gehörigen quadratischen Form; er sei t.

Da die Schnitt-Matrizen $S, S_1, \ldots$, die zu verschiedenen Basen von L gehören, wie man leicht bestätigt, zu einer Klasse gehören, d.h. durch Transformationen $S_1 = U\,S\,U'$, $|\,U\,| \neq 0$, ineinander übergehen, und da Formen einer Klasse gleichen Trägheitsindex haben, ist t unabhängig von der Basis und darf als „Trägheitsindex von L" bezeichnet werden.

22a) Die Voraussetzung des Satzes kann nach Kap. I, 5.3, nur bei geradem k erfüllt sein; also: $k = 2q$, $n = 4q$.

Nun sei c negativ; dann hat cS den Trägheitsindex $p^k - t$. Da Formen einer Klasse den gleichen Trägheitsindex haben, folgt daher aus Satz Va:

Satz Vc: *Ist $n = 4q$ und der Trägheitsindex von L nicht gleich $\frac{1}{2}p^k$, so gestattet L keine Selbstabbildung von negativem Grade; insbesondere ist also L asymmetrisch.* [23])

1.2. L und L' seien zwei Exemplare der komplexen projektiven Ebene. Aus L und L' kann man durch „Summenbildung" zwei neue Mannigfaltigkeiten L_1 und L_2 ableiten. Man bohrt aus L und L' je eine kleine Kugel aus und klebt die beiden entstehenden berandeten Mannigfaltigkeiten in ihren Randkugelflächen aufeinander, das eine Mal mit Umkehrung (L_1), das andere Mal mit Erhaltung (L_2) der Orientierung. [24])

Die Schnitt-Matrizen S_1 und S_2 von L_1 und L_2 sind, wie man leicht bestätigt,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bei einer Abbildung der Mannigfaltigkeit auf sich ist nach Kap. II, § 5, Satz Va für L_1

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^2 + g_{12}^2 & g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} & g_{21}^2 + g_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und für L_2

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^2 - g_{12}^2 & g_{11}g_{21} - g_{12}g_{22} \\ g_{11}g_{21} - g_{12}g_{22} & g_{21}^2 - g_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich also:

Die Grade der Selbstabbildungen von L_1 sind Summen, diejenigen von L_2 sind Differenzen von zwei Quadraten.

1.3. Wir betrachten noch die Abbildungen einer dieser Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 auf die andere; da sie isomorphe Bettische Gruppen haben, ist der Satz Va anwendbar. Aber für jedes $c \neq 0$ — also für jede Einheit in bezug auf den rationalen Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ — gehören offenbar sowohl die Matrizen $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

---

[23]) Verallgemeinerung eines Satzes von G. de Rham: in der in Fußnote [16]) zitierten Arbeit, Théorème IV.

[24]) G. de Rham, Sur la dualité en analysis situs [C. R. 186 (1928), 670—672].

und $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ als auch die Matrizen $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ zu verschiedenen Klassen (denn die Determinanten haben entgegengesetztes Vorzeichen). Daher folgt aus Va:

Keine der Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 läßt sich auf die andere mit einem von 0 verschiedenen Grade abbilden. [25])

§ 2.

Anwendungen der Verschlingungs-Matrix.

2.1. Es sei $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. Die Torsionsgruppen seien rein mod m, und die Dimension der betrachteten Mannigfaltigkeit L sei $n = 2r + 1$. $\{z_i^r\}$, $i = 1, \ldots, t^r$, sei eine Basis in $\mathfrak{T}_m^r$, und es sei eine Abbildung f vom Grade c von L auf sich gegeben mit

$$f(z_i^r) \sim \sum g_{ij}^r z_j^r .$$

Nach Satz VI, Kap. II, § 6 ist, wenn $(c, m) = 1$ ist,

$$cT \equiv G'TG \pmod{m}, \tag{1}$$

wobei T die Verschlingungs-Matrix der zu $\{z_i^r\}$ dualen Basis bedeutet. (1) liefert durch Bildung der Determinanten, mit Rücksicht auf Kap. I, 6.3, (6):

$$c^{t^r} \equiv |G|^2 \pmod{m}. \tag{2}$$

Aus (2) ergibt sich

Satz VIb [26]): *L sei eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2r + 1$; m sei eine Primzahl, die genau in einer ungeraden Anzahl r-dimensionaler Torsionskoeffizienten von L aufgeht. Dann sind die Grade c der Selbstabbildungen von L quadratische Reste mod m.* [26a])

---

[25]) Verallgemeinerung eines Satzes von G. de Rham: siehe Fußnote [24]).

[26]) Verallgemeinerung eines Satzes von H. Seifert: in der in Fußnote [18]) zitierten Arbeit, § 5, II.

S-Thr, S. 280, Aufgabe 4.

Die obige Voraussetzung über m ist gleichbedeutend mit der folgenden: In der Darstellung der r-ten Torsionsgruppe als direkter Summe zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind die Ordnungen einer ungeraden Anzahl direkter Summanden Potenzen von m.

[26a]) Entgegen der üblichen Bezeichnungsweise zählen wir immer die Null zu den quadratischen Resten.

Für $m = 2$ sagt der Satz nichts aus; für $m > 2$ kann seine Voraussetzung nur bei ungeradem r erfüllt sein, nach Kap. I, 6.3.

Beweis: Die Anzahl der durch m teilbaren Torsionskoeffizienten sei u; dann ist $\mathfrak{T}_m^r$ direkte Summe von u Zyklen der Ordnung m, und in (2) ist $t^r = u$. Da u ungerade ist, folgt aus (2) die Behauptung.

Korollar: *Ist die im Satz* VIb *genannte Primzahl m von der Form $4x + 3$, so gibt es keine Selbstabbildung vom Grade -1; insbesondere ist daher L asymmetrisch.*

2.2. Es seien L und L' zwei Exemplare des gleichen Linsenraumes (m, q) [27]. Durch die gleichen Summenbildungen wie unter 1.2 dieses Kapitels erhalten wir zwei dreidimensionale Mannigfaltigkeiten L_1 und L_2; man sieht leicht, daß die Verschlingungs-Matrizen mod m folgendermaßen aussehen:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ und } T_2 \equiv \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} \pmod{m}.$$

Wir betrachten jetzt die Abbildungen einer dieser Mannigfaltigkeiten L_1, L_2 auf die andere und behaupten:

Es sei m eine Primzahl der Form $m = 4x - 1$; dann gestattet keine der beiden Mannigfaltigkeiten eine Abbildung mit einem Grade, der $\not\equiv 0$ mod m wäre, auf die andere. [28])

Beweis: Nach Kap. II, § 6, Satz VI ist für eine Abbildung mit dem Grade c

$$\begin{pmatrix} cq & 0 \\ 0 & cq \end{pmatrix} \equiv G' \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} G$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} cq & 0 \\ 0 & -cq \end{pmatrix} \equiv G' \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} G$$

(je nachdem wir L_2 auf L_1 oder L_1 auf L_2 abbilden). Für die Determinanten ergibt sich $c^2q^2 \equiv -|G|^2q^2$ bzw. $-c^2q^2 \equiv |G|^2q^2$. Dies ist, da $q \not\equiv 0$ und -1 quadratischer Nichtrest mod m ist, nur für $c \equiv 0$ mod m möglich.

§ 3.

Dreidimensionale Linsenräume.

3.1. Es sei eine dreidimensionale Sphäre vom Radius 1 im euklidischen R^4 gegeben. Ihre Gleichung in cartesischen Koor-

---

27) Wir verweisen für die Erklärung dieser Bezeichnung auf den nachfolgenden § 3.

28) Verallgemeinerung eines Satzes von Seifert-Threlfall; S-Thr, S. 280, Aufgabe 1.

dinaten lautet

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \tag{1}$$

Es seien m und q zwei teilerfremde Zahlen mit $0 < q < m$. Wir betrachten folgende fixpunktlose Bewegung der S^3 in sich:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \frac{2\pi q}{m} - x_2 \sin \frac{2\pi q}{m} \\ x_2' &= x_1 \sin \frac{2\pi q}{m} + x_2 \cos \frac{2\pi q}{m} \\ x_3' &= x_3 \cos \frac{2\pi}{m} - x_4 \sin \frac{2\pi}{m} \\ x_4' &= x_3 \sin \frac{2\pi}{m} + x_4 \cos \frac{2\pi}{m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn wir die komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + i x_2 \\ w_2 &= x_3 + i x_4 \end{aligned} \tag{3}$$

einführen, gehen (1) und (2) über in

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1 \tag{1'}$$

$$w_1' = e^{\frac{2\pi i q}{m}} w_1 ; \qquad w_2' = e^{\frac{2\pi i}{m}} w_2. \tag{2'}$$

Die Transformation (2) bzw. (2′) bewirkt eine Drehung in der $(x_1 x_2)$-Ebene um den Winkel $\frac{2\pi q}{m}$ und eine Drehung in der $(x_3 x_4)$-Ebene um den Winkel $\frac{2\pi}{m}$; sie erzeugt eine zyklische Bewegungsgruppe der Ordnung m. Alle Elemente dieser Gruppe, ausgenommen die Identität, sind fixpunktlos. [29])

Man kann sich vom Diskontinuitätsbereich dieser Bewegungsgruppe folgendes Modell konstruieren. [29a]) Wir wählen im Raume $x_1 x_2 x_3$ eine volle Linse, die von zwei durch den Einheitskreis der Ebene $x_1 x_2$ gehenden, in bezug auf diese Ebene symmetrisch liegenden Kugelkalotten begrenzt wird, welche miteinander den Winkel $\frac{2\pi}{m}$ bilden. Zwei äquivalente Punkte gehen durch eine Drehung vom Winkel $\frac{2\pi q}{m}$ um die x_3-Achse, gefolgt von einer

---

[29]) W. Threlfall und H. Seifert, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes [Math. Ann. **104** (1930), 1—70 und **107** (1932), 543—586]. Wir verweisen auf den zweiten Teil dieser Arbeit, Kap. I, § 1.

[29a]) S—Thr, S. 210, 1. Beispiel, insbesondere Fig. 110.

Spiegelung an der (x_1x_2)-Ebene, der Äquatorebene der Linse, auseinander hervor. Werden nun zwei äquivalente Punkte identifiziert, so entsteht dadurch der geschlossene Diskontinuitätsbereich, der dreidimensionale Linsenraum $L(m, q)$.

Die scharfe Linsenkante zerfällt in m unter der betrachteten Bewegungsgruppe äquivalente Strecken. Im Linsenraum stellen diese ein und dieselbe geschlossene Kurve z^1 dar, die, erst m-mal durchlaufen, ein Elementarflächenstück, nämlich die Linsenkalotte bzw. die Äquatorscheibe der Linse berandet.

Die ganzzahlige, eindimensionale Bettische Gruppe besteht aus der durch diesen Zyklus z^1 erzeugten Torsionsgruppe der Ordnung m. Die ganzzahlige, zweidimensionale Bettische Gruppe besteht aus dem Nullelement allein. Die ein- und zweidimensionalen Bettischen Gruppen mod m sehen also folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{B}^1_{\mathfrak{G}_m} \approx \mathfrak{T}^1_m \approx Z_m,$$

$$\mathfrak{B}^2_{\mathfrak{G}_m} \approx \mathfrak{B}^{**2}_{\mathfrak{G}_m} \approx {}_m\mathfrak{T}^1 \approx Z_m,$$

wobei Z_m die zyklische Gruppe der Ordnung m bezeichnet.

Die Zahl q geht überhaupt in die Bettischen Gruppen nicht ein. Sie tritt erst in der Verschlingungs-Matrix auf.

Wenn wir z^1 mod m betrachten, so sieht man leicht am oben dargelegten Linsenmodell, daß

$$q\, \mathfrak{r}_m(z^1)\, R(z^1) = \pm 1 \tag{4}$$

ist. [30])

Im folgenden wählen wir die Orientierung des Linsenraumes derart, daß in (4) stets das positive Zeichen gilt. [31])

Die wichtigen Eigenschaften des Homologieringes sind für den dreidimensionalen Linsenraum in der Verschlingungs-Matrix der

---

[30]) Wegen der Operation R vergl. man Kap. I, § 2, a und Kap. II, § 2.

[31]) Eine nicht-triviale Schnittbildung wäre noch:

$$R(z^1) \cdot R(z^1) \sim r \cdot \mathfrak{r}_m(z^1);$$

sie kann aber für unsere Untersuchung keinen Wert haben; denn, es ist nach Kap. I, § 3, (1)

$$R(z^1) \cdot R(z^1) = - R(z^1) \cdot R(z^1),$$

also

$$rz^1 \sim -rz^1 \qquad \mathrm{mod}\, m.$$

Ist nun m ungerade, so ist

$$R(z^1) \cdot R(z^1) \sim 0.$$

eindimensionalen Zyklen enthalten, die durch die Restklasse von q mod m vollständig bestimmt ist.

3.2. Es seien nun zwei Linsenräume $L(m, q)$ und $\Lambda(m, q')$ und eine Abbildung f vom ganzzahligen Grad c von L auf Λ gegeben. Es sei $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt.

Wir werden zunächst eine notwendige Bedingung für c aufstellen und dann unter 3.3 zeigen, daß alle c, welche dieser notwendigen Bedingung genügen, tatsächlich auch als Abbildungsgrade auftreten.

Es sei $R(z^1) = z^2$, und es seien ζ^1 bzw. $\mathbf{P}(\zeta^1) = \zeta^2$ die entsprechenden Basiselemente von Λ. Wir setzen den Homologietypus mod m in seiner allgemeinsten Form an:[31a])

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(z^1) &\sim a\,\zeta^1 \\ f(z^2) &\sim b\,\zeta^2 \\ f(L) &\sim c\,\Lambda \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod}\, m).$$

Wegen

$$f\,R(z^1) = \mathbf{P}\,f(z^1)$$

(Kap. II, § 2) ist

$$b \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\, m).$$

Nach 3.1, (4) sind $q\,z^1$ und z^2 bzw. $q'\,\zeta^1$ und ζ^2 im Sinne von Kap. I, § 4, 4.2 dual, und es folgt nach Kap. II, § 4, Satz IV, da die Torsionsgruppen rein sind mod m, aus

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(z^2) &\sim a\,\zeta^2: \\ \varphi(q'\zeta^1) &\sim aqz^1. \end{aligned}$$

Anderseits ist nach Kap. II, 3.2, Satz Ia

$$f(\varphi(q'\zeta^1)) \sim c\,q'\zeta^1,$$

und nach (2)

$$f(\varphi(q'\zeta^1)) \sim f(aqz^1) \sim a^2q\zeta^1,$$

also

$$c\,q'\zeta^1 \sim a^2q\,\zeta^1,$$

d.h.

$$(3)\qquad c\,q' \equiv a^2q \quad (\mathrm{mod}\, m),$$

oder mit $d \equiv \frac{a}{q'}$

$$(3')\qquad c \equiv d^2qq' \quad (\mathrm{mod}\, m).$$

[31a]) Wir unterscheiden im folgenden nicht mehr zwischen z^1 und $\mathfrak{r}_m(z^1)$ usw.; Mißverständnisse sind nicht zu befürchten.

Diese notwendige Bedingung für den Abbildungsgrad c hätte übrigens auch aus Kap. II, § 6, Satz VI entnommen werden können. Wir haben hier besonderen Wert darauf gelegt, den Homologietypus (1) vollständig zu beschreiben.

Der Homologietypus mod m der Abbildung f sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(z^1) &\sim a\,\zeta^1 \\ f(z^2) &\sim a\,\zeta^2 \qquad (\mathrm{mod}\ m). \\ f(L) &\sim a^2 \frac{q}{q'} \Lambda \end{aligned}$$

Im speziellen Fall der Abbildung eines Linsenraumes $L(m, q)$ auf sich, sieht also der Homologietypus folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(z^1) &\sim a\,z^1 \\ f(z^2) &\sim a\,z^2 \qquad (\mathrm{mod}\ m). \\ f(L) &\sim a^2 L \end{aligned}$$

Also hat man als *Korollar*:

Die Grade der Selbstabbildungen eines Linsenraumes sind quadratische Reste mod m.

3.3. Wir behaupten nun:

Satz VII: *Als Grade der Abbildungen von $L(m, q)$ auf $\Lambda(m, q')$ treten die und nur die ganzen Zahlen c auf, die eine Kongruenz*

$$c \equiv d^2 q q' \qquad (\mathrm{mod}\ m) \tag{3'}$$

erfüllen (die also gleichen quadratischen Restcharakter haben wie qq').

Beweis: Die Notwendigkeit dieser Kongruenz ist soeben bewiesen worden. Jetzt sei c eine Zahl, die (3′) erfüllt; wir haben eine Abbildung $L \to \Lambda$ vom Grade c zu konstruieren.

Wir werden diese Konstruktion in zwei Schritten ausführen: Unter A werden wir zu einer willkürlichen ganzen Zahl $d \geqq 0$ eine Abbildung f von L auf Λ vom Grade d^2qq' konstruieren; unter B werden wir zu einer Abbildung f vom Grade c und zu einer beliebigen ganzen Zahl k eine Abbildung f' vom Grade $c' = c + km$ konstruieren.

A) Wie in 3.1 besprochen, wird $L(m, q)$ durch eine zyklische Bewegungsgruppe einer Sphäre S dargestellt; t sei eine erzeugende Transformation dieser Gruppe. Analog wird $\Lambda(m, q')$ durch eine Bewegungsgruppe einer Sphäre Σ dargestellt, und diese Gruppe werde durch eine Bewegung τ erzeugt. Ist dann $\bar{f}$ eine Abbildung von S auf Σ, für welche

$$(4) \qquad \bar{f} \cdot t = \tau^n \cdot \bar{f}$$

mit einem gewissen Exponenten n gilt, so wird dadurch offenbar eine Abbildung f von L auf Λ bestimmt, und es haben f und $\bar{f}$ gleichen Grad. Unsere Aufgabe ist daher, eine Abbildung $\bar{f}$ von S auf Σ zu finden, die (4) erfüllt und die den Grad d^2qq' hat, wobei d eine willkürlich vorgeschriebene Zahl ist.

Auf S und Σ seien, wie in 3.1, die Punkte durch je zwei komplexe Zahlen w_1, w_2 bzw. ω_1, ω_2 mit $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$, $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1$ bestimmt. Dann dürfen wir t und τ durch die folgenden Formeln als gegeben annehmen, in denen wir der Kürze wegen $e^{\frac{2\pi i}{m}} = \varepsilon$ setzen:

$$t \begin{cases} w_1' = \varepsilon^q w_1 \\ w_2' = \varepsilon w_2 \end{cases}; \qquad \tau \begin{cases} \omega_1' = \varepsilon^{q'} \omega_1 \\ \omega_2' = \varepsilon \omega_2 \end{cases}.$$

Wir behaupten, daß die folgende Abbildung $\bar{f}$ die gewünschten Eigenschaften hat:

$$\bar{f} \begin{cases} \omega_1 = \lambda w_1^{dq'} \\ \omega_2 = \lambda w_2^{dq} \end{cases} \text{mit } \lambda = \frac{1}{\sqrt{|w_1|^{2dq'} + |w_2|^{2dq}}}.$$

In der Tat bestätigt man erstens unmittelbar aus den Formeln für t, τ und $\bar{f}$, daß (4) mit $n = dq$ gilt; daß $\bar{f}$ zweitens auch den gewünschten Grad d^2qq' hat, ist in dem folgenden Hilfssatz enthalten:

Hilfssatz: *Die Abbildung g von S auf Σ, die durch*

$$(5) \qquad \begin{matrix} \omega_1 = \lambda w_1^r \\ \omega_2 = \lambda w_2^s \end{matrix} \ \textit{mit } \lambda = \frac{1}{\sqrt{|w_1|^{2r} + |w_2|^{2s}}}$$

($r > 0$, $s > 0$) *gegeben ist, hat den Grad rs.*

Beweis: Es genügt, für ein Gebiet auf Σ, das die beiden Verzweigungslinien $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 0$ ausschließt, zu zeigen, daß es rs-mal positiv bedeckt wird.

Aus (5) ist ersichtlich, daß jeder Punkt eines solchen Gebietes rs Originalpunkte hat. Wir müssen also nur noch zeigen, daß bei der Abbildung g sämtliche Bedeckungen *positiv* sind. Dazu genügt es, wie man sich leicht überlegt, folgendes zu zeigen:

Faßt man w_1, w_2 bzw. ω_1, ω_2 als Koordinaten in den vierdimensionalen euklidischen Räumen auf, in denen S und Σ liegen, und betrachtet man die Abbildung

$$\omega_1 = w_1^r, \ \omega_2 = w_2^s$$

des einen Raumes auf den andern, so ist die reelle Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_3} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_4'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_4'}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4'}{\partial x_4} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1', x_2', x_3', x_4')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

positiv.

Diese Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn wir in Zähler und Nenner formal die Linearkombinationen

$$w_1 = x_1 + ix_2, \qquad w_2 = x_3 + ix_4,$$
$$\bar{w}_1 = x_1 - ix_2, \qquad \bar{w}_2 = x_3 - ix_4$$

einführen. [32]) Also hat man

$$\frac{\partial(x_1', x_2', x_3', x_4')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{\partial(w_1', \bar{w}_1', w_2', \bar{w}_2')}{\partial(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2)} = \frac{\partial(w_1', w_2')}{\partial(w_1, w_2)} \cdot \frac{\partial(\bar{w}_1', \bar{w}_2')}{\partial(w_1, w_2)} = \left|\frac{\partial(w_1', w_2')}{\partial(w_1, w_2)}\right|^2.$$

Da wir den Fall $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ ausgeschlossen haben, ist diese Determinante im betrachteten Gebiet > 0.

B) Es sei f eine Abbildung von L auf Λ, welche den Grad c hat. Wir geben jetzt ein Verfahren an, um aus f eine Abbildung f' vom Grade $c + km$ zu konstruieren.

Man kann ein dreidimensionales Simplex mit dem Grade km auf den Linsenraum $\Lambda = \Lambda(m, q')$ abbilden, und zwar so, daß der Rand des Simplexes auf einen festen Punkt von Λ abgebildet wird. Diese Tatsache folgt unmittelbar daraus, daß einerseits Λ Diskontinuitätsbereich einer Bewegungsgruppe von der Ordnung m der Σ in sich ist, und daß man anderseits ein dreidimensionales Simplex mit beliebig vorgegebenem Grad k auf die Σ abbilden kann derart, daß der Rand des Simplexes auf einen festen Punkt der Σ abgebildet wird.

Wir nehmen zunächst an: Es gebe in L ein dreidimensionales Simplex X, das durch f ganz auf einen festen Punkt P von Λ abgebildet wird; wir verstehen unter g eine Abbildung des Grades km von X auf Λ, bei der der Rand von X auf P abgebildet wird, und setzen

$$f' = f \quad \text{in} \quad L - X$$

und

$$f' = g \quad \text{in} \quad X.$$

[32]) Van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie [Math. Ann. **102** (1929), 337—362], unter S. 349.

f' ist stetig, da f und g stetig sind und auf dem Rand von X $f = g$ ist. Der Grad von f' ist offenbar die Summe der Grade von f und g, also $c + km$.

Es bleibt der Fall zu erledigen, daß es in L kein dreidimensionales Simplex gibt, das durch f ganz auf einen Punkt von Λ abgebildet wird. Diesen Fall führen wir folgendermaßen auf den bereits behandelten zurück.

Wir dürfen f als simplizial annehmen. X sei irgendein dreidimensionales Simplex von L, P_0 ein fester innerer Punkt von X. X' sei ein dreidimensionales Simplex, das ganz im Innern von X liegt und P_0 als innern Punkt enthält. Q sei irgendein Punkt der Randsphäre $S^2 = \dot{X}$ und Q' der Punkt von $S^{2\prime} = \dot{X}'$, der auf der Strecke QP_0 liegt. Q_r bzw. $\overline{Q}_r$ sei der Punkt auf der Strecke QP_0 bzw. QQ', der diese Strecke im Verhältnis r zu $(1 - r)$ teilt $(0 \leqq r \leqq 1)$. Es wird nun in X folgende Abbildung f_1 definiert:

$$f_1(X') = f(P_0); \; f_1(\overline{Q}_r) = f(Q_r).$$

f_1 hat denselben Grad wie f, da außerhalb des Bildsimplexes $f(X)$ nichts geändert worden ist; X' wird durch f_1 ganz auf $f(P_0)$ abgebildet. Wir befinden uns somit im bereits behandelten Falle.

Damit ist der Beweis des Satzes VII beendet.

3.4. Dem Satz VII entnehmen wir als Spezialfall folgende hinreichende Bedingung:

Nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß sich die zwei Linsenräume $L(m, q)$ und $L(m, q')$ gegenseitig mit dem Grade $+1$ aufeinander abbilden lassen, ist die Lösbarkeit der Kongruenz

$$1 \equiv x^2 \cdot qq' \pmod{m} \tag{6}$$

(*d.h. die Tatsache, daß qq' quadratischer Rest mod m ist*).

K. Reidemeister hat gezeigt [33]), daß die beiden Linsenräume $L(7,1)$ und $L(7,2)$ nicht homöomorph sind. Anderseits wird die Kongruenz

$$1 \equiv x^2 \cdot 2 \pmod{7}$$

durch $x \equiv 2$ erfüllt. Daher ergibt sich:

Die beiden Linsenräume $L(7,1)$ und $L(7,2)$ liefern ein Beispiel von zwei Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind und sich trotzdem gegenseitig mit dem Grad 1 aufeinander abbilden lassen.

---

[33]) K. Reidemeister, a.a.O. [8]).

Damit ist eine Frage, die von H. Hopf formuliert worden ist [34]), im verneinenden Sinne beantwortet.

Bemerkung. Wenn $c \not\equiv 0 \bmod m$ ist, so ist auch $a \equiv b \not\equiv 0$, und daher werden die Bettischen Gruppen mod m von L auf die von Λ isomorph abgebildet; ist aber sogar $c = \pm 1$ (ganzzahlig), so erleidet auch die einzige nicht-triviale ganzzahlige Bettische Gruppe, nämlich die dreidimensionale, einen Isomorphismus auf die entsprechende Gruppe von Λ; also ist im Falle $c = \pm 1$ alles so wie bei einer Homöomorphie. Dies ist eine Bestätigung des allgemeinen Satzes IIb.

§ 4.

Höherdimensionale Linsenräume.

4.1. *Allgemeines.* Es sei S^{2n+1} die $(2n+1)$-dimensionale Einheitssphäre im euklidischen R^{2n+2}. Ihre Gleichung in cartesischen Koordinaten lautet

$$\sum_{k=1}^{2n+2} x_k^2 = 1, \tag{1}$$

oder mit den komplexen Zahlen

$$w_1 = x_1 + ix_2, \quad w_2 = x_3 + ix_4, \ldots \text{ usw.:}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |w_j|^2 = 1. \tag{1'}$$

Es sei $m \geqq 2$ eine feste Zahl, und die $n+1$ Zahlen q_j, $j = 1, \ldots, n+1$, seien zu m teilerfremd. Wir betrachten folgende Bewegung der S^{2n+1} in sich:

$$w_j' = e^{\frac{2\pi i q_j}{m}} w_j, \qquad j = 1, \ldots, n+1, \tag{2}$$

wobei $q_{n+1} = 1$ ist.

Die Transformation (2) erzeugt eine zyklische Bewegungsgruppe der Ordnung m, deren Elemente alle, die Identität ausgenommen, fixpunktlos sind. Der geschlossene Diskontinuitätsbereich dieser Gruppe ist der $(2n+1)$-dimensionale Linsenraum $L(m; q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Man kann zeigen, daß die ganzzahlige Bettische Gruppe — die Dimensionen 0 und $2n+1$ ausgeschlossen, in welchen sie die durch ein Element erzeugte unendliche zyklische Gruppe ist — in ungeraden Dimensionen zyklisch der Ordnung m ist und in geraden Dimensionen aus dem Nullelement allein besteht. Die

[34]) siehe Fußnote [9]).

Bettische Gruppe mod m ist in jeder Dimension zyklisch der Ordnung m. [35])

Werden in (2) $s < n + 1$ unter den w_j gleich 0 gesetzt, so erzeugt (2) eine zyklische fixpunktlose Bewegungsgruppe der aus (1) hervorgegangenen $(2(n-s)+1)$-dimensionalen Sphäre in sich, deren Diskontinuitätsbereich ein $(2(n-s)+1)$-dimensionaler Linsenraum ist, der als Basiselement der $(2(n-s)+1)$-dimensionalen Bettischen Gruppe von $L(m; q_1, q_2, \ldots, q_n)$ gewählt werden kann. Es sei L_j, $j = 1, \ldots, n+1$, der $(2n-3)$-dimensionale Linsenraum, der aus $w_j = 0$ entsteht. Das Produkt (also der Schnitt) $L_r \cdot L_s$, $s \neq r$, zweier dieser Linsenräume L_j ist der $(2n-5)$-dimensionale Linsenraum, der aus $w_r = w_s = 0$ entsteht. Das Produkt $L_r \cdot L_s \cdot L_t$, $r \neq s$, $s \neq t$, $r \neq t$, dreier dieser Linsenräume L_j ist der $(2n-7)$-dimensionale Linsenraum, der aus $w_r = w_s = w_t = 0$ entsteht, usw. Das Produkt über n dieser Linsenräume ist ein eindimensionaler Zyklus, der erst m-mal durchlaufen ~ 0 ist. Diese Schnitteigenschaften können leicht aus (1) und (2) abgelesen werden; sie erlauben folgende Behauptung zu beweisen:

z_j, $j = 1, \ldots, n$, sei der $(2n-1)$-dimensionale Zyklus mod m, der durch den Linsenraum $w_j = 0$ gegeben ist. Irgendeiner der z_j und seine Potenzen [36]) *$z_j^2, z_j^3, \ldots, z_j^n$ können als Basiselemente von $\mathfrak{B}^{2n-1}_{\mathfrak{S}_m}, \mathfrak{B}^{2n-3}_{\mathfrak{S}_m}, \mathfrak{B}^{2n-5}_{\mathfrak{S}_m}, \ldots, \mathfrak{B}^{1}_{\mathfrak{S}_m}$ gewählt werden.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für z_1. Da die z_j Basiselemente sind, gilt

$$z_1 \sim a_j z_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$(a_j, m) = 1.$$

Um zu zeigen, daß die Potenzen von z_1 als Basiselemente in den entsprechenden Dimensionen verwendet werden können, genügt es zu zeigen, daß z_1^n die Ordnung m hat, d.h. daß $k z_1^n \nsim 0$ für $0 < k < m$ ist. Dann hat auch jede niedrigere Potenz von z_1 die Ordnung m. Es ist aber

$$z_1^n \sim \Pi_j a_j z_j \sim \Pi_j a_j \, \Pi_j z_j \, .$$

Es ist $(\Pi_j a_j, m) = 1$, da $(a_j, m) = 1$ ist; anderseits ist $\Pi_j z_j$ ein eindimensionaler Zyklus, der erst m-mal durchlaufen ~ 0 ist, also die Ordnung m hat. Daher hat auch z_1^n die Ordnung m.

---

[35]) W. Franz, Über die Torsion einer Überdeckung [Journal f. r. u. angew. Math. **173** (1935), 245—254].

[36]) In diesem Paragraphen bedeuten obere Indizes an Zyklen *Exponenten*, nicht Dimensionszahlen. z_j^r hat die Dimension $2n - 2r + 1$.

4.2. *Abbildung eines mehrdimensionalen Linsenraumes auf sich.* Es sei eine Abbildung f vom ganzzahligen Grade c von $L(m; q_1, \ldots, q_n)$ auf sich gegeben. Es sei $\mathfrak{G}_m$ als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt.

Genau wie in drei Dimensionen werden wir zunächst eine notwendige Bedingung für c aufstellen und dann unter 4.3 zeigen, daß alle c, welche dieser notwendigen Bedingung genügen, tatsächlich auch als Abbildungsgrade auftreten.

$z^1, z^2, \ldots, z^n$ [37]) seien gemäß 4.1 gewählte Basiselemente der Bettischen Gruppen mod m ungerader Dimensionen. $R(z^1)$, $R(z^2), \ldots, R(z^n)$ wählen wir als Basiselemente der Bettischen Gruppen mod m gerader Dimensionen.

Wir setzen den Homologietypus mod m in seiner allgemeinsten Form an:

$$\left.\begin{aligned} &f(z^i) \sim a_i z^i, \\ &f(R(z^i)) \sim b_i R(z^i), \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$
$$f(L) \sim cL.$$

Wegen

$$fR(z^i) = Rf(z^i)$$

(Kap. II, § 2) ist

$$a_i \equiv b_i. \tag{1'}$$

Wir behaupten ferner: Es ist

$$a_n^{n-i+1} \equiv a_i \quad \text{mit } i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

und

$$c \equiv a_i\, a_{n-i+1} \text{ mit } i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Beweis: Zu dem Zyklus $R(z^i)$ ist dual ein Zyklus sz^{n-i+1} mit $(s, m) = 1$ (Kap. I, 4.2). Da nun nach (1) und (1′)

$$fR(z^i) \sim a_i R(z^i)$$

ist, ist daher nach Satz IV, da die Torsionsgruppen rein sind mod m,

$$\varphi(z^{n-i+1}) \sim a_i z^{n-i+1}, \tag{4}$$

also wegen der multiplikativen Homomorphie von φ

$$\left(\varphi(z^1)\right)^{n-i+1} \sim a_i z^{n-i+1}. \tag{5}$$

---

[37]) siehe Fußnote [36]).

Setzt man in (4) $i = n$, so erhält man $\varphi(z^1) \sim a_n z^1$, und wenn man dies in (5) einsetzt,

$$a_n^{n-i+1} \equiv a_i\,.$$

Damit ist (2) bewiesen. Es bleibt noch (3) zu beweisen: Nach Satz Ia (Kap. II, § 3) ist

$$f(\varphi(z^{n-i+1})) \sim c z^{n-i+1}, \tag{6}$$

und aus (1) und (4) folgt

$$f(\varphi(z^{n-i+1})) \sim a_{n-i+1} \cdot a_i z^{n-i+1}; \tag{7}$$

aus (6) und (7) folgt dann die Behauptung (3).

Aus (3) folgt für $i = 1$

$$c \equiv a_1 a_n\,. \tag{8}$$

(2) für $i = 1$ in (8) eingesetzt, liefert für den Abbildungsgrad c folgende notwendige Bedingung:

$$c \equiv a_n^{n+1}\,. \tag{9}$$

Das Ergebnis ist:

Durch die Kongruenzen (2) *und* (9) *ist der Homologietypus* (1) *vollständig beschrieben; es ist nämlich*

$$a_i \equiv b_i \equiv a_n^{n-i+1}, \quad c \equiv a_n^{n+1} \pmod m.$$

Die Grade der Selbstabbildungen eines $(2n+1)$*-dimensionalen Linsenraumes sind* $(n+1)$*-te Potenzreste* mod m.

4.3. Wir behaupten weiter:

Satz VIII: *Als Grade der Selbstabbildungen von* $L(m; q_1, \ldots, q_n)$ *treten die und nur die ganzen Zahlen* c *auf, die eine Kongruenz*

$$c \equiv d^{n+1} \pmod m \tag{9}$$

erfüllen, die also $(n+1)$*-te Potenzreste* mod m *sind.*

Der *Beweis* verläuft ganz analog wie in 3.3, Satz VII. Den Linsenraum L denke man sich in zwei Exemplaren vorliegend, von denen man das erste auf das zweite abbildet. Die beiden Exemplare seien auf Sphären S bzw. Σ, bei Benutzung der zu den früheren analogen Bezeichnungen durch Bewegungsgruppen dargestellt, die durch folgende Transformationen erzeugt werden (der Kürze wegen setzen wir $e^{\frac{2\pi i}{m}} = \varepsilon$):

$$t: \quad \begin{array}{ccc} S & & \Sigma \\ w_1' = \varepsilon^{q_1} w_1 & & \omega_1' = \varepsilon^{q_1} \omega_1 \\ w_2' = \varepsilon^{q_2} w_2 & & \omega_2' = \varepsilon^{q_2} \omega_2 \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \\ w_n' = \varepsilon^{q_n} w_n & & \omega_n' = \varepsilon^{q_n} \omega_n \\ w_{n+1}' = \varepsilon\, w_{n+1} & & \omega_{n+1}' = \varepsilon\, \omega_{n+1}. \end{array}$$

Dann definiert man die Abbildung $\bar{f}$ von S auf Σ durch

$$\bar{f}: \qquad \omega_j = \lambda w_j^d, \; j = 1, \ldots, n+1, \text{ mit } \lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} |w_j|^{2d}}},$$

und man bestätigt, daß sie eine Abbildung von L auf Λ erzeugt und den Grad d^{n+1} hat. Im übrigen ist alles ebenso wie früher. [38])

ANHANG.

Über faserungstreue Abbildungen der Sphäre.

Wir betrachten die dreidimensionale Sphäre S^3; wie im zweiten Teil, 3.1, beschreiben wir die Punkte durch Paare komplexer Zahlen w_1, w_2.

Es sei $(\mathring{w}_1, \mathring{w}_2)$ ein fester Punkt der S^3, t ein stetiger Parameter, der von 0 bis 2π läuft; dann beschreibt der Punkt

$$\mathring{w}_t: \qquad (\mathring{w}_1 e^{it}, \; \mathring{w}_2 e^{it})$$

einen Großkreis, der durch den Punkt $\mathring{w}$ geht. Diese Großkreise bilden eine Faserung der S^3 ohne Ausnahmefasern [39]). Diese Faserung nennen wir im nachfolgenden $\mathfrak{F}$.

Die Abbildung $\bar{f}$ sei wie im Beweis des Satzes VII, A, erklärt, es sei aber jetzt $\Sigma = S$, und ferner $\Lambda = L$, also $q' = q$. Dann ist $\bar{f}$ durch

$$(1) \qquad w_j' = \lambda w_j^a, \quad a > 0,$$

beschrieben. Durch $\bar{f}$ wird der Punkt $\mathring{w}$ in den Punkt $\lambda \mathring{w}^a$ und der Punkt $\mathring{w} e^{it}$ in den Punkt $\lambda \mathring{w}^a e^{iat}$ übergeführt. Wenn nun t von 0 bis 2π läuft, durchläuft der Bildpunkt von $\mathring{w} e^{it}$ a-mal den durch $\lambda \mathring{w}^a$ gehenden Großkreis. Durch die Abbildung $\bar{f}$ wird

[38]) Wir setzen $d \geqq 0$ voraus; dies bedeutet auch bei ungeradem $n+1$ keine Einschränkung, da es genügt, aus jeder Restklasse mod m ein beliebiges d zu nehmen.

[39]) H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume [Acta math. 60 (1932), 147—238].

also jede Faser auf eine Faser abgebildet, und zwar so, daß die Bildfaser a-mal durchlaufen wird. $\bar{f}$ nennen wir daher „*faserungstreu*". Nach dem zweiten Teil, 3.3, Hilfssatz, ist anderseits der Abbildungsgrad von $\bar{f}$ ein Quadrat. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß dies nicht nur für die spezielle Abbildung (1) so ist, sondern daß der folgende Satz gilt.

SATZ: *Jede Abbildung f der S^3 auf sich, welche die Faserung $\mathfrak{F}$ in sich überführt, hat als Abbildungsgrad eine Quadratzahl.*

Wir zeigen, daß dies in der Tat so ist.

Beweis: Die Zerlegungsfläche der Faserung $\mathfrak{F}$ ist die Kugel [40]. π sei die eindeutige stetige Abbildung, welche jede Faser von S^3 auf ihren entsprechenden Punkt der S^2 abbildet. f sei die faserungstreue Abbildung der S^3 und φ die in S^2 durch f induzierte Abbildung. Es gilt dann die Funktionalgleichung

$$\varphi\pi = \pi f. \tag{2}$$

Jeder Abbildung g von S^3 auf S^2 läßt sich nach H. Hopf [41]) eine ganze Zahl $\gamma(g)$, die Verschlingungszahl der Originalzyklen zweier beliebiger Punkte von S^2, zuordnen. $\gamma(g)$ hat, angewendet auf die Abbildungen f, φ und π, folgende Eigenschaften:

Ist c der Grad von f, so ist

$$\gamma(\pi f) = c\gamma(\pi) \text{ [42]).} \tag{3}$$

Ist k der Grad von φ, so ist

$$\gamma(\varphi\pi) = k^2\gamma(\pi) \text{ [43]).} \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$$c\gamma(\pi) = k^2\gamma(\pi). \tag{5}$$

Es ist $\gamma(\pi) = \pm 1$ [44]), also $\gamma(\pi) \neq 0$, und es folgt aus (5)

$$c = k^2. \tag{6}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

KOROLLAR: *Die S^3 gestattet keine topologische Abbildung mit Umkehrung der Orientierung, bei welcher die Faserung $\mathfrak{F}$ in sich übergeführt wird.*

---

[40]) H. HOPF, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche [Math. Ann. **104** (1931), 637—665].

[41]) Fußnote [40]), Satz II.

[42]) Fußnote [40]), Satz II, b.

[43]) Fußnote [40]), Satz IIb'.

[44]) Fußnote [40]), § 5.

Man könnte dies auch so ausdrücken: „*Die Faserung* $\mathfrak{F}$ *der* S^3 *ist asymmetrisch*." Diese Tatsache ist darum bemerkenswert, weil der analoge Satz für die analoge Faserung der fünfdimensionalen Sphäre S^5 *nicht* gilt; denn indem man jeden Punkt (w_1, w_2, w_3) durch $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ ersetzt, wobei $\bar{w}_i$ die zu w_i konjugiert komplexe Zahl bedeutet, entsteht eine topologische Abbildung des Grades -1 der S^5, bei der $\mathfrak{F}$ invariant ist.

Bemerkung: Herr H. Hopf machte mich darauf aufmerksam, daß der obige Satz samt seinem Beweis und Korollar allgemeinere Gültigkeit haben: Es sei M^3 eine dreidimensionale orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{F}$ eine Faserung von M^3, von der wir zweierlei voraussetzen:

1) Die zugehörige „Zerlegungsfläche" ist orientierbar;

2) die Fasern sind ~ 0 in M^3.

Dann hat jede Abbildung von M^3 *auf sich, bei der* $\mathfrak{F}$ *in sich übergeht, eine Quadratzahl zum Grade.*

An dem obigen Beweis ist nichts zu ändern; denn erstens ist die Invariante γ unter den genannten Voraussetzungen für die Abbildung π von M^3 auf die Zerlegungsfläche definiert und hat die von uns benützten Produkteigenschaften [45]), und zweitens ist $\gamma \neq 0$ für jede derartige Abbildung; diese letzte Tatsache ergibt sich aus einer brieflichen Mitteilung von Herrn Seifert an Herrn Hopf.

Zum Schluß zeigen wir noch, *daß die in* (6) *auftretende Zahl* k *gleich dem Grad* a *ist, mit dem eine beliebige Faser* F *auf ihre Bildfaser* F' *abgebildet wird* [46]).

Beweis: $C = C^2$ sei ein beliebiger, von der Faser F berandeter Komplex:

$$\dot{C} = F.$$

Das Bild $f(C)$ sei ein Komplex C'. Da $f(F) = aF'$ und $f(C)^{\boldsymbol{\cdot}} = f(\dot{C})$ ist, folgt

$$\dot{C}' = aF'.$$

$\Gamma = \Gamma^2$ sei ein beliebiger von der Faser F' berandeter Komplex:

$$\dot{\Gamma} = F'.$$

$a\Gamma$ und C' werden von aF' berandet; $C' - a\Gamma$ ist somit ein zweidimensionaler Zyklus. Da aber ein zweidimensionaler Zyklus z^2

---

[45]) H. Hopf, a.a.O. [40]), besonders Fußnote [12]) auf S. 654 und § 7.

[46]) Daß dieser Grad a für alle Fasern der gleiche ist, ergibt sich, indem man eine Faser stetig in eine andere überführt.

~ 0 in S^3 ist, ist auch sein Bild $\pi(z^2) \sim 0$ in S^2, d.h. $\pi(z^2) = 0$ in S^2. Dies bedeutet

$$\pi(C') = \pi(a\Gamma) = a\pi(\Gamma).$$

Nach § 2, 6 der in der Fußnote 40 zitierten Arbeit von H. Hopf ist $\gamma(\pi)$ auch der Grad, mit dem ein beliebiger, von der Originalfaser eines beliebigen Punktes berandeter zweidimensionaler Komplex abgebildet wird. Die Funktionalgleichung (2) auf C angewendet, ergibt somit:

$$\varphi(\gamma(\pi)S^2) = \pi(C') = a\pi(\Gamma)\,,$$
$$k\gamma(\pi)S^2 = a\gamma(\pi)S^2,$$

und da $\gamma(\pi) = 1 \neq 0$ ist [47]), folgt die Behauptung

$$k = a.$$

(Eingegangen den 13. Juni 1938.)

[47]) H. Hopf, a.a.O. [40]), § 5.