

COMPOSITIO MATHEMATICA

JULIUS WOLFF

L'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z)$ = fonction holomorphe à partie réelle positive dans un demi-plan

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 296-304

http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__296_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z) =$ fonction
holomorphe à partie réelle positive dans un
demi-plan

par

Julius Wolff

Utrecht

Soit $w(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + yi$ dans le demi-plan $D(x > 0)$ et $u(z) > 0$, t une variable réelle (le temps). Posons, h étant un nombre fini positif,

$$z_1 = z + hw(z), \quad z_{n+1} = z_n + hw(z_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

et considérons le polygone $zz_1z_2 \dots$ h tendant vers zéro, ce polygone tend vers la trajectoire définie, pour $t > 0$, par l'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z)$. C'est pourquoi l'étude de ces trajectoires $T(z)$ est appelée „*itération continue*” dans une note au C. R. du 23 mai 1938, où quelques propriétés des $T(z)$ sont indiquées sans démonstration. Répétons ici la remarque que dans l'itération $z_{n+1} = z_n + hw(z_n)$ un point z_{n+1} peut avoir plusieurs antécédents z_n , tandisque $T(z)$ est définie sans ambiguïté, pour $t < 0$ comme pour $t > 0$, par un point initial z .

1.

$z_t = x_t + iy_t$ étant la position au temps t du point qui au temps $t = 0$ occupait la position z on a

$$\frac{dz_t(z_t)}{dt} = w'(z_t)w(z_t).$$

En vertu de l'inégalité $|w'(z_t)| \leq \frac{u(z_t)}{x_t} = \frac{1}{x_t} \frac{dx_t}{dt}$ (1)

nous trouvons $\left| \frac{d \log w(z_t)}{dt} \right| \leq \frac{d \log x_t}{dt}$, d'où

THÉORÈME I. $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$ et $\arg w(z_t) - \log x_t$ sont des fonctions non-croissantes, $x_t |w(z_t)|$ et $\arg w(z_t) + \log x_t$ sont des fonctions non-décroissantes de t .

2. Les $T(z)$ pour $t \rightarrow +\infty$.

Premier cas.

Il existe une $T(z)$ ayant à droite une asymptote $x = c$. Parce que x_t est une fonction harmonique du point initial z , qui croît avec t , on voit que chaque $T(z)$ possède à droite une asymptote verticale. Posons $c(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_t$. La fonction harmonique positive $c(z) - x$ tend vers zéro sur chaque $T(z)$ pour $t \rightarrow +\infty$. Elle tend donc uniformément vers zéro pour $y \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$) dans toute bande $0 < \varepsilon \leq x \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Par conséquent $c(z)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.

Du théorème I résulte que $w(z_t)$ tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers une limite $a(z) + ib(z)$, fonction holomorphe dans D , différente de zéro. Cette fonction étant constante sur chaque $T(z)$, elle est une constante $a + ib$ dans D . Et parce que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx_t}{dt} = a$, il faut que $a = 0$, donc $b \neq 0$. Quel que soit z dans D , y_t tend vers l'infini du signe de b .

Considérons une trajectoire $T(z_0)$ et son asymptote à droite $x = c$. Pour fixer les idées supposons $b > 0$. On a sur $T(z_0)$

$$\int_{z_0}^{\infty} u \, dy \asymp b \int_0^{\infty} u \, dt = b(c - z_0),$$

donc $\int^{+\infty} u \, dy < \infty$ sur $T(z_0)$.

Soit $d > c$, alors l'inégalité

$$\frac{u(z)}{x} \geq \frac{u(z+h)}{z+h},$$

valable pour tout point z de D , quelque soit le nombre positif h , entraîne

$$\frac{u(x_t + iy_t)}{x_t} \geq \frac{u(d + iy_t)}{d},$$

donc $\int^{\infty} u(d + iy) \, dy$ converge pour $d \geq c$. Ce résultat étant valable pour chaque valeur positive de c , on conclut que $\int^{\infty} u \, dy$ converge uniformément sur tout ensemble de droites $x = d$, $0 < \varepsilon \leq d \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Appelons un tel ensemble $B(\varepsilon)$.

Inversement: supposons $\int^{\infty} u \, dy$ convergente sur une droite $x = c > 0$ et soit $d > c$. L'inégalité (2) permet de conclure que cette intégrale converge sur la droite $x = d$. Et des relations, valables pour $q > p > 0$,

$$|w(d+qi) - w(d+pi)| = \left| \int_p^q w'_y(d+yi) dy \right| \leq \\ \leq \int_p^q \frac{u(d+yi)}{d} dy \leq \int_p^q \frac{u(c+yi)}{c} dy$$

il résulte que w tend, pour $y \rightarrow +\infty$, vers une limite finie sur la droite $x = d$, donc uniformément sur tout ensemble $B(\varepsilon)$.

Or la convergence de $\int^\infty u dy$ exige que la limite de u soit égale à zéro, donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} w(x+yi) = bi$, b constant. Si $b > 0$, je dis que chaque $T(z)$ possède une asymptote verticale à droite. En effet, considérons l'ensemble des $T(z)$ à points initiaux $z = x_0 + iy$, $x_0 > 0$ et fixe. Soit $x = d > x_0$ une droite qui coupe toutes ces $T(z)$. Alors, si $x(t)$ atteint la valeur d après un temps $t(y)$

$$d - x_0 = \int_0^{t(y)} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{z_t(v)} \frac{u(z_t) dz_t}{w(z_t)}.$$

Parce que $b > 0$, y_t croît avec t dans l'intervalle $0 \leq t \leq t(y)$, pourvu que y soit assez grand. Donc, y tendant vers $+\infty$, la dernière intégrale est équivalente à $\int_z^{z_t(v)} \frac{u(z_t)}{b} dy_t$, et celle-ci tend vers zéro, conséquence de (2) et de la convergence de $\int^\infty u dy$ sur la droite $x = c$. On en conclut que pour y suffisamment grand $T(z)$ n'atteint pas la droite $x = d$, par suite elle possède une asymptote verticale à droite. Donc toutes les $T(z)$ en ont une.

THÉORÈME II. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'une $T(z)$ ait une asymptote verticale à droite (ce qui entraîne que toutes les autres en ont une) est la convergence de $\int_{-\infty}^\infty u dy$ ou de $\int_{-\infty}^\infty u dy$ sur une droite verticale dans D (ce qui entraîne la convergence sur toutes les autres) et que la limite b de $v(x+iy)$ pour $x > 0$, $y \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$ respectivement, dont l'existence est assurée par cette convergence, soit positive ou négative respectivement. Alors pour $t \rightarrow +\infty$ y_t tend vers l'infini du signe de b .*

Deuxième cas.

Quel que soit z dans D , $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = +\infty$.

A. Considérons d'abord le cas où la dérivée angulaire λ de $w(z)$ à l'infini est positive. Alors

$$\frac{dz}{dt} = w(z) = \lambda z + \omega(z), \quad \Re(\omega(z)) = u_1(z) \geq 0, \quad (3)$$

donc
$$\frac{dz_t}{dt} \geq \lambda x_t. \quad (4)$$

Conséquence du théorème I est que sur chaque $T(z)$ la fonction $\frac{1}{x_t} \left| \frac{dy_t}{dt} \right|$ est bornée pour $t > 0$, donc en vertu de (4) $\left| \frac{dy_t}{dx_t} \right|$ est borné, donc $\left| \frac{y_t}{x_t} \right|$ aussi, par conséquent $\frac{w(z_t)}{z_t}$ tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers λ . Or du théorème I et de (3) résulte que $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$ tend vers un nombre $\mu(z) \geq \lambda$, donc $\cos(\arg z_t)$ tend vers $\frac{\lambda}{\mu(z)}$. Par suite $\arg z_t$ tend vers un angle $\varphi(z)$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La fonction harmonique bornée $\varphi(z) - \arg(z)$ tend sur les $T(z)$ vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$, elle tend donc uniformément vers zéro dans chaque angle $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, d'où résulte que $\varphi(z)$ prend toutes les valeurs entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

En vertu de (4) $x_t e^{-\lambda t}$ croît avec t ; à cause de (3) sa limite pour $t \rightarrow +\infty$ est finie ou, infinie selon la convergence ou divergence de l'intégrale ¹⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t} dt \sim \frac{1}{\lambda} \int \frac{u_1 dx}{x^2} \text{ sur } T(z). \quad (5)$$

Si (5) converge sur une $T(z)$, elle converge sur toutes les autres et alors $z_t e^{-\lambda t}$ tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers une fonction holomorphe et univalente $K(z)$ dans D , qui peut s'appeler fonction de Königs associée à l'itération continue. L'univalence de $K(z)$ est une conséquence de l'univalence des fonctions $z_t e^{-\lambda t}$. Des relations

$$\begin{aligned} \frac{dK(z)}{dz} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} \frac{dz_t}{dt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} \frac{w(z_t)}{w(z)} = \\ &= \frac{\lambda}{w(z)} \lim_{t \rightarrow +\infty} z_t e^{-\lambda t} = \frac{\lambda}{w(z)} K(z) \end{aligned}$$

on conclut
$$\frac{dK(z_t)}{dt} = K'(z_t) w(z_t) = \lambda K(z_t) \quad (6)$$

d'où
$$K(z_t) = K(z) e^{\lambda t} \quad (7)$$

et
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K(z_t)}{z_t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K(z)}{z_t e^{-\lambda t}} = 1. \quad (8)$$

(8) permet de conclure que la dérivée angulaire de $K(z)$ à l'infini est égale à l'unité. $K(z)$ représente D conformément sur un domaine partiel de D , tel que les images des $T(z)$ sont des demi-droites $\arg K = \text{const.}$, $|K| > m(z) \geq 0$, où $m(z)$ est positif ou nul, selon que z_t atteint la frontière de D à un temps négatif fini ou infini.

¹⁾ A la page 1547 de la note citée ci-dessus se trouve une erreur au no. 3.

Que l'intégrale (5) soit convergente ou non, une fonction de Königs ayant toutes les propriétés de $K(z)$ trouvées ci-dessus, sauf (8), existe toujours. Fixons dans D un point quelconque α . La fonction $\frac{z_t}{\alpha_t}$ tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers $e^{h\lambda}$ au point z_h , $0 \leq h < \infty$. Elle converge donc vers une fonction holomorphe et univalente dans D . Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z_t}{|\alpha_t|}$ est une fonction $k(z)$ ayant les propriétés de $K(z)$, sauf (8). Sa dérivée angulaire à l'infini est nulle ou positive selon la divergence ou convergence de (5).

THÉORÈME III. *Si la dérivée angulaire λ de $w(z)$ à l'infini est positive, alors sur chaque $T(z)$ l'argument de z_t tend pour $t \rightarrow +\infty$ vers une limite $\varphi(z)$ variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il existe une fonction $k(z)$ de Königs satisfaisant à (6) et (7) et représentant D sur un domaine partiel de D , tel que les $T(z)$ deviennent des demi-droites d'arguments $\varphi(z)$. La dérivée angulaire de $k(z)$ à l'infini est positive ou nulle selon la convergence ou divergence de l'intégrale (5).*

B. $\lambda = 0$. Supposons qu'une $T(z)$ existe sur laquelle $\frac{y_t}{x_t}$ est borné. Alors sur cette $T(z)$

$$\frac{d \log z_t}{dz} = \frac{w(z_t)}{z_t w(z)}$$

tend vers zéro; cette fonction tend donc vers zéro uniformément sur tout ensemble borné et fermé dans D , ce qui entraîne que, α et β étant deux points quelconques dans D , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_t}{\alpha_t} = 1$. La fonction $zw(z)$ tend pour $z \rightarrow \infty$, $\frac{y}{x}$ borné vers une limite positive ϱ , qui peut être infinie. Supposons $\frac{y_t}{x_t}$ borné et $\varrho < \infty$. Alors pour $t \rightarrow +\infty$: $z_t \frac{dz_t}{dt} \rightarrow \varrho$, $z_t^2 \sim 2\varrho t$, d'où $\arg z_t \rightarrow 0$.

THÉORÈME IV. *Si la dérivée angulaire λ de $w(z)$ à l'infini est nulle, et si sur une $T(z)$ $\frac{y_t}{x_t}$ est borné pour $t \rightarrow +\infty$, alors, α et β étant deux points quelconques dans D , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_t}{\alpha_t} = 1$. Si en outre la limite angulaire de $zw(z)$ pour $z \rightarrow \infty$ est finie, alors sur chaque $T(z)$ $\arg z_t \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.*

L'exemple

$$\frac{dz}{dt} = z^i + A, \quad A > \frac{\pi}{2}$$

montre que, malgré l'hypothèse $\frac{y_t}{x_t}$ borné, $\arg z_t$ peut ne pas tendre vers une limite.

3. Les $T(z)$ pour $t < 0$

Posons
$$\int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z) \quad (9)$$

$\zeta(z)$ est univalente dans D . Elle représente D sur un domaine H tel que les $T(z)$ ont pour images des droites ou demi-droites η const., selon que z_t atteint la frontière de D à un temps négatif infini ou fini.

On sait que sur toute droite y const. la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta(x+iy) = \eta(iy) = \psi(y) \quad (10)$$

existe et que $\eta(iy)$ est une fonction non-décroissante de y satisfaisant à

$$2\psi(y) = \psi(y+0) + \psi(y-0) \quad (11)$$

De plus $\eta(z)$ est borné dans chaque rectangle $0 < x \leq m < \infty$, $-m \leq y \leq m$.

A. Soit ip un point de discontinuité de $\eta(iy)$. Alors $\xi(z)$ tend uniformément vers $-\infty$ pour $z \rightarrow ip$ dans tout angle $|\arg(z-ip)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, tandis que

$$\psi(p) + \frac{\psi(p+0) - \psi(p-0)}{\pi} \arg z - \eta(z)$$

tend uniformément vers zéro. Donc H contient une bande B s'étendant à gauche vers l'infini et dont la frontière a les asymptotes $\eta = \psi(p+0)$ et $\eta = \psi(p-0)$. Par conséquent D contient un domaine Δ composé de trajectoires $T(z)$ aboutissant au point ip au temps $t = -\infty$ et toutes ces $T(z)$ ont en ce point une tangente dont le coefficient angulaire varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Soit iq un point de continuité de $\eta(iy)$, ni point intérieur, ni extrémité d'un intervalle dans lequel η est constant. Alors H contient ou bien la droite $\eta = \eta(iq)$, $-\infty < \xi < \infty$, ou bien une demi-droite $\eta = \eta(iq)$, $h < \xi < \infty$. Dans le premier cas cette droite est aux deux côtés une asymptote de la frontière de H ; dans le second cas cette frontière contient le point $h+i\eta(iq)$. Dans les deux cas une et une seule $T(z)$ aboutit en iq , dans le premier pour $t = -\infty$, dans le second pour t négatif fini. Cherchons un critère pour les deux cas. Or, sur la $T(z)$ aboutissant en iq $\zeta(z)$ tend pour $z \rightarrow iq$ vers une limite infinie dans le premier

cas, finie dans le second. D'autre part on sait que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{v(x+iq)}{|w(x+iq)|^2} dx$$

converge. Donc sur la droite $y = q$ $\zeta(z)$ a pour $z \rightarrow iq$ une limite infinie ou finie selon la divergence ou convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{u(x+iq)}{|w(x+iq)|^2} dx. \quad (12)$$

La fonction $\zeta(z)$ ne pouvant pas tendre vers deux limites différentes sur deux courbes aboutissant en iq , (12) diverge dans le premier cas et converge dans le second.

Soit ir un point intérieur à un intervalle $I(x=0, m < y < n)$ où η est constant. La fonction $\zeta(z)$ étant prolongeable au delà de I , une $T(z)$, c'est à dire une courbe $\eta = \text{const.}$ dans D ne peut aboutir en ir que si $\zeta'(ir) = 0$, autrement dit: si ir est un pôle de $w(z)$ et alors c'est un pôle simple, car autrement $u(z)$ prendrait des valeurs négatives dans D . Si ir est un pôle de $w(z)$, une et une seule $T(z)$ y aboutit pour t négatif fini dans la direction horizontale. I contient au plus un seul tel point, car si ir et ir' en étaient deux consécutifs, les $T(z)$ entre celles qui aboutissent en ir et ir' ne pourraient pas atteindre la frontière à un temps négatif. Enfin soit is une extrémité de I . Supposons $\eta(iy)$ continu en is , car le cas de discontinuité a été traité. La considération de l'image H nous apprend: si sur I $v(z) > 0$ au voisinage de is , alors, en vertu de $\frac{\delta\xi}{\delta y} = \frac{v}{|w|^2}$, ξ croît avec y dans ce voisinage, donc une seule $T(z)$ aboutit en is , si $s = n$ (à temps négatif fini) et aucune n'y aboutit, si $s = m$. Même énoncé si $v(z) < 0$ sur I au voisinage de is , pourvu qu'on échange m et n .¹⁾

Si $v(z)$ garde un signe constant sur I , alors im ou in est extrémité d'une $T(z)$. Si $v(z)$ change de signe sur I , c'est à dire si I contient un pôle de $w(z)$, alors ni im , ni in n'est extrémité d'une $T(z)$.

THÉORÈME V. *A tout point de discontinuité ip de $\eta(iy)$ sur la droite $x = 0$ il correspond un domaine Δ_p composé de trajectoires aboutissant à ip pour $t \rightarrow -\infty$. Sur chacune l'argument de $z_t - ip$ tend vers une limite variant dans Δ_p entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et $w(z_t)$ vers zéro.*

Tout point de continuité iq , qui n'est pas extrémité d'un intervalle

¹⁾ A la page 1547 de la note citée se trouve une erreur au No. 4.

I où η est constant, est point final d'une trajectoire pour t fini et négatif ou pour $t \rightarrow -\infty$ selon la convergence ou divergence de l'intégrale (12). Un point intérieur à un tel intervalle $I(x=0, m < y < n)$ n'est pas extrémité d'une trajectoire, à l'exception d'un pôle éventuel de $w(z)$, qui est alors unique sur I , et une seule trajectoire y aboutit à tangente horizontale, pour t fini et négatif. Si η est continu en $m(n)$, alors $m(n)$ est extrémité d'une seule trajectoire ou d'aucune selon que $v(z)$ est négatif (positif) ou positif (négatif) sur I au voisinage de im (in).

B. Les $T(z)$ sur lesquelles $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_t = \infty$.

D'abord la considération de l'image H de D apprend qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une telle $T(z)$ (qui entraîne l'existence d'un domaine constitué de telles $T(z)$) est que η soit borné supérieurement ou inférieurement sur la droite $x = 0$.

Il est clair que les $T(z)$ en question sont munies d'asymptotes verticales à gauche.

Un raisonnement presque identique à celui du No. 2 conduit au

THÉORÈME VI. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une $T(z)$ ait une asymptote verticale à gauche $x = c > 0$ (ce qui entraîne l'existence d'un domaine Δ composé de telles $T(z)$) est la convergence de $\int_{-\infty}^{\infty} u \, dy$ ou de $\int_{-\infty}^{\infty} u \, dy$ sur une droite verticale dans D

(ce qui entraîne la convergence sur toutes les autres) et que la limite b de $v(x+iy)$ pour $x > 0, y \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$ respectivement, dont l'existence est assurée par cette convergence, soit négative ou positive respectivement. Alors dans Δ , pour $t \rightarrow -\infty, y_t$ tend vers l'infini du signe opposé au signe de b .

Supposons maintenant qu'une $T(z)$ existe ayant pour asymptote la droite $x = 0$. Donc, pour fixer les idées soit $x \rightarrow 0$ et $y_t \rightarrow +\infty$ sur $T(z)$ pour $t \rightarrow -\infty$. Alors le domaine Δ de D au dessus de $T(z)$ est composé de trajectoires jouissant de la même propriété. Quel que soit z dans Δ , on a pour $t \rightarrow -\infty$

$$\frac{\partial x_t}{\partial x} - i \frac{\partial x_t}{\partial y} = \frac{\partial z_t}{\partial z} = \frac{w(z_t)}{w(z)} \rightarrow 0,$$

donc sur toute $T(z)$ dans Δ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(z) = 0. \quad (13)$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{|w(x+iy)|^2} \, dy \quad (14)$$

diverge pour $x > 0$, car sa convergence entraînerait que $\frac{1}{w} \rightarrow$ limite finie pour $y \rightarrow +\infty$ sur toute droite verticale dans D (voir p. [3] 298, l. 3 où w est à remplacer par $\frac{1}{w}$) en contradiction avec (13), w ne pouvant pas avoir deux limites différentes sur deux courbes dans D allant à l'infini.

Inversement supposons η borné supérieurement sur $x = 0$ et que (14) diverge. Alors, sur les images des droites $x = c > 0$ dans H , η tend vers $+\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$. Donc H contient un demi-plan $\eta > \text{const.}$, donc D contient un domaine Δ composé de $T(z)$ qui vont à l'infini pour $t \rightarrow -\infty$. Dans Δ la borne inférieure de η surpasse la borne supérieure de η sur $x = 0$, ce qui exclut que $\lim_{t \rightarrow -\infty} y$ serait $-\infty$ dans Δ , cette limite est donc $+\infty$. D'autre part une asymptote $x = c > 0$ pour les $T(z)$ dans Δ est impossible, car le théorème VI exigerait la convergence de $\int^{\infty} u \, dy$ sur toute droite $x = d > 0$ et que $\lim_{y \rightarrow +\infty} w(d+yi)$ serait une constante négative b , ce qui entraînerait la convergence de (14) pour $x > 0$.

THÉORÈME VII. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'une $T(z)$ ait l'asymptote $x = 0$ (ce qui entraîne l'existence d'un domaine Δ composé de telles $T(z)$) est que η soit borné supérieurement (inférieurement) sur $x = 0$ et que (14) (respectivement l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u \, dy}{|w|^2}$) diverge pour $x > 0$. Dans Δ $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(z_t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} y_t = +\infty$ (respectivement $-\infty$).*

Les théorèmes II, VI et VII montrent l'impossibilité d'une $T(z)$ à deux asymptotes verticales $x = c \geq 0$ et $x = d, 0 < d < \infty$, tel que y tendrait pour $t \rightarrow -\infty$ et pour $t \rightarrow +\infty$ vers l'infini du même signe.

(Reçu le 22 juin 1938.)