COMPOSITIO MATHEMATICA

A. ERDÉLYI

Transformation einer gewissen nach Produkten konfluenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden Reihe

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 336-347
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__336_0>

Transformation einer gewissen nach Produkten konfluenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden Reihe

VON

A. Erdélyi

Brno

---

1. Es ist bekannt, welch große Rolle das meist nach Hille und Hardy benannte, in Wirklichkeit jedoch von W. Myller-Lebedeff stammende Theorem in der Theorie der Laguerreschen Polynome spielt. Eine erzeugende Funktion für die Produkte Laguerrescher Polynome, wird es bei der Untersuchung der Abelschen Summabilität der nach Laguerreschen Polynomen fortschreitenden Entwicklungen verwendet [1]). Selber eine bilineare Reihe — die Eigenwerte sind proportional zu den Potenzen einer beliebigen, dem Betrage nach Eins überschreitenden, komplexen Zahl — steht es in engstem Zusammenhange mit den äquidistante Eigenwerte aufweisenden Kernen, bzw. bilinearen Entwicklungen Laguerrescher Polynome [2]). Schließlich ist es auch zur Herleitung gewisser Reihenentwicklungen, Funktionalbeziehungen, Integraldarstellungen u.s.w. für Laguerresche Polynome und deren Produkte brauchbar. Als Beispiele hierfür genügt es an die Herleitung der Watsonschen Integralgleichung für das Quadrat eines Laguerreschen Polynoms [3]) und an die Herleitung der Laplaceschen Transformierten eines Produktes Laguerrescher Polynome durch Howell [4]) zu erinnern.

---

[1]) G. N. WATSON, Notes on generating functions of polynomials: (1) Laguerre polynomials [J. London math. Soc. **8** (1933), 189—192].

[2]) G. N. WATSON, Über eine Reihe aus verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen [Sitzungsber. d. math.-naturw. Kl., Akad. d. Wiss., Wien **147** (1938), 151—159]. A. ERDÉLYI, Bilineare Reihen der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome [Sitzungsber. d. math.-naturw. Kl., Akad. d. Wiss., Wien **147** (1938), ...].

[3]) G. N. WATSON, An integral equation for the square of a Laguerre polynomial [J. London math. Soc. **11** (1936), 256—261].

[4]) W. T. HOWELL, On some operational representations of products of parabolic cylinder functions and products of Laguerre polynomials [Philos. Mag (7) **24** (1937), 1082—1093].

In Anbetracht dieser vielseitigen Verwendbarkeit der Hille-Hardyschen Entwicklung ist es naheliegend, nach Verallgemeinerungen dieser Entwicklung zu suchen.

Die auf der linken Seite der Hille-Hardyschen Beziehung auftretende nach Produkten Laguerrescher Polynome fortschreitende unendliche Reihe ist vom Typus

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r L_r^{(\alpha)}(x)\, L_r^{(\alpha)}(y) z^r,$$

und die nächstliegende Verallgemeinerung ist eine Reihe von der Form

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r' L_r^{(\alpha)}(x)\, L_r^{(\beta)}(y) z^r.$$

Tatsächlich weiß ich aus einer brieflichen Mitteilung Professor Watsons aus dem Jahre 1937, daß er sich gelegentlich die Frage vorgelegt hat, ob man die Koeffizienten c_r' so bestimmen könnte, daß die soeben angeführte Reihe auch für $\alpha \neq \beta$ verhältnismäßig einfach summiert werden kann. Ich selbst habe mich bereits einmal mit einer etwas weitergehenden Verallgemeinerung der sogenannten Hille-Hardyschen Entwicklung beschäftigt. Wenn die Laguerreschen Polynome durch die konfluente hypergeometrische Reihe ausgedrückt werden, so nimmt die auf der linken Seite der H.-H.-schen Entwicklung stehende unendliche Reihe die Form

$$\sum_{r=0}^{\infty} k_r\, \Phi(-r, c, x)\, \Phi(-r, c, y) z^r$$

an. In Verallgemeinerung dieser Reihe habe ich nun [5]) eine gewisse Reihe vom Typus

$$\sum_{r=0}^{\infty} k_r'\, \Phi(a-r, c, x)\, \Phi(b-r, d, y) z^r$$

betrachtet und summiert.

Die Antwort auf die Frage nach einer möglichst einfachen und durchsichtigen Verallgemeinerung der Hille-Hardy-Entwicklung hängt ganz wesentlich von der Fragestellung ab. Die H.-H.-Entwicklung drückt die Summe einer gewissen nach Produkten von Laguerreschen Polynomen fortschreitenden Reihe durch elementare Funktionen und durch eine Besselsche Funktion aus.

---

[5]) A. Erdélyi, Untersuchungen über Produkte von Whittakerschen Funktionen [Monatshefte f. Math. u. Phys. **46** (1937), 132—156].

Fragt man nun nach einer allgemeineren Reihe vom oben angegebenen Typus, deren Summe ebenfalls durch elementare Funktionen und gewisse wohlbekannte, womöglich tabellierte, Transzendenten *algebraisch* in geschlossener Form ausgedrückt werden kann, so wird die Antwort nicht ohne weiteres bejahend ausfallen. Mir selbst ist es nur gelungen, die Summe gewisser Reihen vom in Rede stehenden Typus als *Integrale über* solche Funktionen anzugeben. Man kann aber die Frage auch ganz anders stellen. Wenn die auf der rechten Seite der Hille-Hardy-Entwicklung stehende Besselsche Funktion nach Potenzen ihres Argumentes entwickelt wird, so stellt sich das H.-H. Theorem als eine Identität zwischen zwei unendlichen Reihen dar, einer nach Potenzen der komplexen Veränderlichen z fortschreitenden und im Einheitskreise $|z| < 1$ konvergenten, und einer nach Potenzen von

$$\frac{xyz}{(1-z)^2}$$

fortschreitenden und in der ganzen z-Ebene mit Ausnahme der Stelle $z = 1$ konvergenten Reihe. Das H.-H.-Theorem stellt also eine Transformation der links stehenden Potenzreihe dar und bewirkt die analytische Fortsetzung des zunächst im Einheitskreise der z-Ebene gegebenen Funktionselements (die Reihe wird bei dieser Betrachtungsweise als Funktion von z aufgefaßt; x und y spielen, ebenso wie α die Rolle von Parametern). Wenn man sich diese Interpretation der H.-H.-Entwicklung zu eigen gemacht hat, so wird man die Frage nach ihrer Verallgemeinerung etwa folgendermaßen stellen: Können die Koeffizienten c'_r bzw. k'_r so bestimmt werden, daß die oben angeschriebenen Reihen — als Funktionen von z betrachtet — in verhältnismaßig einfacher Weise einer Reihentransformation unterworfen werden können, welche gleichzeitig die analytische Fortsetzung des zunächst nur im Konvergenzkreise der in de Rede stehenden Reihe gegebenen Funktionselementes bewerkstelligt? Wenn man die Frage so stellt, so kann sie ohne weiteres bejahend beantwortet werden.

In der vorliegenden Note werde ich zunächst mit Hilfe von Laplaceschen Integraldarstellungen hypergeometrischer Reihen solche Transformationsformeln herleiten und sie dann nochmals mit möglichst einfachen Hilfsmitteln beweisen. Dieser zweite Beweis ist genau dem Watsonschen Beweise der sogenannten Hille-Hardyschen Entwicklung nachgebildet. Ich darf vielleicht noch erwähnen, daß ich demnächst gelegentlich der Erörterung des Zusammenhanges zwischen den *Laguerre*schen Polynomen einerseits und den in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden *Charlier*schen Polynomen anderseits eine zweite, ganz anders geartete, erzeugende Funktion für Produkte Laguerrescher Polynome mitteilen werde.

2. Die Laguerreschen Polynome können durch eine der drei Entwicklungen

$$(1) \qquad (1-z)^{-\alpha-1}\exp\left\{\frac{-xz}{1-z}\right\} = \sum_r L_r^{(\alpha)}(x)z^r \qquad (|z|<1),$$

$$(2) \qquad (xz)^{-\frac{1}{2}\alpha}e^z J_\alpha(2\sqrt{xz}) = \sum_r \frac{L_r^{(\alpha)}(x)z^r}{\Gamma(\alpha+r+1)},$$

$$(3) \qquad (1+z)^\alpha e^{-xz} = \sum_r L_r^{(\alpha-r)}(x)z^r \qquad (|z|<1)$$

erzeugt werden. Ihre explizite Darstelliung

$$(4) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n(e^{-x}x^{\alpha+n})}{dx^n} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{(-x)^m}{m!}$$

kann am leichtesten der erzeugenden Funktion (3) entnommen werden. Alle Summen, bei denen die Summationsgrenzen nicht angegeben sind, sollen hier wie im Folgenden stets von Null bis Unendlich laufen.

Für die *Produkte* Laguerrescher Polynome gilt das meist nach Hille und Hardy benannte [6]), jedoch von Bateman [7]) schon früher veröffentlichte und letzten Endes wahrscheinlich auf Frau Myller-Lebedeff [8]) zurückgehende Theorem:

$$(5) \qquad \sum_r \frac{r!\,z^r}{\Gamma(\alpha+r+1)} L_r^{(\alpha)}(x)\,L_r^{(\alpha)}(y) =$$

$$= \frac{(xyz)^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-z}\exp\left\{-\frac{(x+y)z}{1-z}\right\}\cdot I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\right) \quad (|z|<1).$$

Wenn die auf der rechten Seite von (5) stehende Besselsche Funktion in ihre Potenzreihe entwickelt wird, so nimmt dieses Theorem die Gestalt

---

6) E. Hille, On Laguerre's series I, II, III [Proc. Nat. Acad. Sci. **12** (1926), 261—265, 265—269, 348—352]. G. R. Hardy, Summation of a series of polynomials of Laguerre [J. London math. Soc. **7** (1932), 138—139].

7) H. Bateman, Electrical and optical wave motion [Cambridge 1914], p. 102, equation (214).

8) W. Myller-Lebedeff, Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihentwicklungen [Math. Ann. **64** (1907), 388—416].

$$(6)\quad \sum_r \frac{r!\, z^r}{\Gamma(\alpha+r+1)} L_r^{(\alpha)}(x)\, L_r^{(\alpha)}(y) = \\ = (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left\{-\frac{(x+y)z}{1-z}\right\} \sum_r \frac{\left(\frac{xyz}{(1-z)^2}\right)^r}{r!\,\Gamma(\alpha+r+1)}$$

an. Die rechte Seite dieser Entwicklung konvergiert für alle endlichen Werte des Argumentes der Besselschen Funktion in (5), d.h. also für alle endlichen reellen oder komplexen Werte von x und y und alle von Eins verschiedenen reellen oder komplexen Werte von z.

Die Laguerreschen Polynome können auch durch die Kummersche konfluente hypergeometrische Reihe

$$(7)\qquad \Phi(a, c, x) = \sum_n \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

ausgedrückt werden. Hier und im Folgenden sei stets wie üblich

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Und zwar ist, wie aus der expliziten Darstellung (4) leicht ersichtlich ist,

$$(8)\qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \Phi\,(-n, \alpha+1, x).$$

Daher kann (6) auch in der Form

$$(9)\quad \sum_r \frac{(\alpha+1)_r}{r!} \Phi(-r, \alpha+1, x)\Phi(-r, \alpha+1, y) z^r = \\ = (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left\{-\frac{(x+y)z}{1-z}\right\} \sum_r \frac{\left(\frac{xyz}{(1-z)^2}\right)^r}{r!\,\Gamma(\alpha+r+1)}$$

geschrieben werden. In dieser Form stellt das H.-H.-Theorem tatsächlich, wie bereits in der Einleitung angegeben, eine Reihentransformation dar. Auf der linken Seite steht eine im Einheitskreise $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe (x und y werden ebenso wie α als Parameter betrachtet). Diese wird in die rechtsstehende, für alle von Eins verschiedenen Werte von z konvergente Reihe transformiert. Dadurch wird die analytische Fortsetzung des links stehenden Funktionselementes bewerkstelligt. In dieser Form ist das H.-H.-Theorem verallgemeinerungsfähig.

Außer den bereits eingeführten hypergeometrischen Reihen werden wir die Humbertsche [9]) Reihe von zwei Veränderlichen

$$(10)\qquad \Phi_2(a, b; c; x, y) = \sum_m \sum_n \frac{(a)_m (b)_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

heranziehen müssen, welche offenbar eine Verallgemeinerung der Kummerschen Reihe ist. Aus den Definitionsgleichungen (7) und (10) folgen unmittelbar die Reduktionsformeln

$$(11)\qquad \Phi_2(0, b; c; x, y) = \Phi(b, c, y)$$

und

$$(12)\qquad \Phi_2(0, c; c; x, y) = \Phi(c, c, y) = e^y.$$

3. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Transformation der Reihe

$$(13)\qquad K(z) \equiv \sum_r \frac{(h)_r}{r!} \Phi(a-r, c, x)\, \Phi(b-r, d, y) z^r$$

über, welche offenbar eine Verallgemeinerung der auf der linken Seite der H.-H.-Beziehung stehenden Reihe ist.

Um die Konvergenz der Reihe (13) zu untersuchen, bemerken wir, daß nach der sogenannten Kummerschen Transformation [10])

$$\Phi(a-r, c, x) = e^x \Phi(c-a+r, c, -x)$$

ist. Die asymptotische Darstellung der auf der rechten Seite stehenden Kummerschen Reihe für große Werte von r wurde von O. Perron [11]) angegeben. Es ist nach Perron

$$\Phi(a-r, c, x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\sqrt{\pi}} (rx)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c}\, e^{\frac{1}{2}x} \left[\cos\left(2\sqrt{rx} - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}c\pi\right) + O(r^{-\frac{1}{2}})\right]$$

für positiv reelle Werte von x und

$$\Phi(a-r, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{2\sqrt{\pi}} (-rx)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c}\, e^{\frac{1}{2}x+2\sqrt{-rx}} [1 + O(r^{-\frac{1}{2}})]$$

für $|\arg(-x)| < \pi$. Aus diesen asymptotischen Darstellungen

---

[9]) P. Humbert, The confluent hypergeometric functions of two variables [Proc. Roy. Soc. Edinburgh **41** (1920/21), 73—96].

[10]) E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, 4th edition [Cambridge 1927], § 16.1 (I).

[11]) O. Perron, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters [Crelles Journal f. reine und angew. Math. **151** (1921), 63—78].

geht hervor, daß die $K(z)$ definierende Potenzreihe (13) bei beliebigen reellen oder komplexen Werten der Parameter a, b, c, d, h, x, y $(c, d \neq 0, -1, -2, \ldots)$ im Einheitskreise $|z| < 1$ konvergiert.

Zur Umformung von $K(z)$ setzen wir $\Re(c) > 1$, $\Re(d) > 1$ voraus und ersetzen die Kummerschen Reihen in (13) durch ihre unter diesen Voraussetzungen absolut konvergenten Laplaceschen Integraldarstellungen. Es ist z.B. [12])

$$\Phi(a, c, x) = x^{1-c} \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{sx} s^{a-c} (s-1)^{-a} ds \quad (\varkappa > 1)$$

und daher

$$K(z) = x^{1-c} y^{1-d} \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(d)}{(2\pi i)^2} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{sx+ty} s^{a-c} t^{b-d} \times \tag{14}$$

$$\times\ (s-1)^{-a} (t-1)^{-b} \sum_r \frac{(h)_r}{r!} \left(\frac{s-1}{s}\, \frac{t-1}{t}\, z \right)^r ds\, dt.$$

Die Reihenfolge von Integration und Summation durften wir vertauschen, weil entlang der Integrationswege $\left| 1 - \frac{1}{s} \right| \leqq 1$ und $\left| 1 - \frac{1}{t} \right| \leqq 1$ ist und also für $|z| < 1$ die unter dem Integralzeichen auftretende unendliche Reihe absolut und im ganzen Integrationsgebiet gleichmäßig konvergiert.

Durch die Anwendung der Integraldarstellungen der Kummerschen Reihen, d.h. in diesem Falle durch die Anwendung der zweidimensionalen Laplace-Transformation, haben wir unsere verhältnismäßig verwickelte Reihe (13) auf die einfachere, im Integranden von (14) stehende, Reihe, d.h. im Wesentlichen auf die Binomialreihe abgebildet. So haben wir jetzt den Vorteil, daß wir die Umformung an dieser einfacheren Reihe vornehmen können und dann nur noch das Ergebnis zurückzutransformieren haben (diesen letzten Schritt bewirkt die Durchführung der Integration).

Die Umformung geht folgendermaßen vor sich:

---

[12]) A. Erdélyi, Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen [Quart. J. Math. (Oxford) 8 (1937), 200—213], insbesondere 206.

$$k(z) \equiv \sum_r \frac{(h)_r}{r!}\left(\frac{s-1}{s}\,\frac{t-1}{t}\,z\right)^r = \left(1-\frac{s-1}{s}\,\frac{t-1}{t}\,z\right)^{-h} =$$

$$= \left[\frac{(1-z)st+z(s+t)-z}{st}\right]^{-h} = \left\{\frac{1-z}{st}\left[\left(s+\frac{z}{1-z}\right)\left(t+\frac{z}{1-z}\right)-\frac{z}{(1-z)^2}\right]\right\}^{-h} =$$

$$= \left[\frac{1-z}{st}\left(s+\frac{z}{1-z}\right)\left(t+\frac{z}{1-z}\right)\right]^{-h}\left\{1-\frac{\dfrac{z}{(1-z)^2}}{\left(s+\dfrac{z}{1-z}\right)\left(t+\dfrac{z}{1-z}\right)}\right\}^{-h} =$$

$$= \left[\frac{1-z}{st}\left(s+\frac{z}{1-z}\right)\left(t+\frac{z}{1-z}\right)\right]^{-h}\sum_r \frac{(h)_r}{r!}\left[\frac{\dfrac{z}{(1-z)^2}}{\left(s+\dfrac{z}{1-z}\right)\left(t+\dfrac{z}{1-z}\right)}\right]^r.$$

Bei beliebigen festen von Eins verschiedenen Werten von z kann $\varkappa$ so gewählt werden, daß auch die letzte Reihe im ganzen Integrationsgebiet gleichmäßig und absolut konvergiert. Daher darf $k(z)$ in (14) in der angeschriebenen Weise umgeformt und nach der Umformung gliedweise integriert werden. Dadurch ergibt sich

$$K(z) = x^{1-c}y^{1-d}\,(1-z)^{-h}\Gamma(c)\,\Gamma(d)\sum_r \frac{(h)_r}{r!}\,\frac{z^r}{(1-z)^{2r}}\,\times$$

$$\times\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{sx}s^{a-c+h}(s-1)^{-a}\left(s+\frac{z}{1-z}\right)^{-h-r}ds\,\times$$

$$\times\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{ty}t^{b-c+h}(t-1)^{-b}\left(t+\frac{z}{1-z}\right)^{-h-r}dt.$$

Die hierin auftretenden Integrale stellen Humbertsche Funktionen dar. Es ist z.B. [13])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} e^{sx}s^{a-c+h}(s-1)^{-a}\left(s+\frac{z}{1-z}\right)^{-h-r}ds =$$

$$= \frac{x^{c+r-1}}{\Gamma(c+r)}\,\Phi_2\left(a,\,h+r:\,c+r;\,x,\,\frac{-xz}{1-z}\right)$$

und daher

[13]) A. Erdélyi, Beitrag zur Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen von mehreren Veränderlichen [Sitzungsber. d. math.-naturw. Kl., Akad. d. Wiss., Wien **146** (1937), 431—467], insbesondere 450.

$$(15)\quad K(z) \equiv \sum_r \frac{(h)_r}{r!}\,\Phi(a-r,c,x)\,\Phi(b-r,d,y)z^r =$$

$$= (1-z)^{-h}\sum_r \frac{(h)_r}{(c)_r\,(d)_r\,r!}\,\Phi_2\!\left(a,\,h+r;\,c+r;\,x,\frac{-xz}{1-z}\right)\times$$

$$\times\,\Phi_2\!\left(b,\,h+r;\,d+r;\,y,\frac{-yz}{1-z}\right)\left(\frac{xyz}{(1-z)^2}\right)^r.$$

Das ist die gesuchte Reihentransformation.

Um zu zeigen, daß (15) tatsächlich die Verallgemeinerung der Hille-Hardyschen Beziehung ist, setzen wir in (15) $a = b = 0$, $c = d = h$ und verwenden (12). So erhalten wir

$$\sum_r \frac{(h)_r}{r!}\,\Phi(-r,h,x)\,\Phi(-r,h,y)z^r =$$

$$= (1-z)^{-h}\exp\left\{-\frac{(x+y)z}{1-z}\right\}\sum_r \frac{\left(\dfrac{xyz}{(1-z)^2}\right)^r}{r!\,(h)_r},$$

und das ist offenbar identisch mit (9).

Eine unmittelbare Verallgemeinerung der H.-H.-Beziehung, nämlich eine nach Produkten Laguerrescher Polynome fortschreitende Reihe, ergibt sich aus (15) bei der Annahme $a = b = 0$, die mit Benutzung von (11) die Reihentransformation

$$(16)\quad \sum_r \frac{(h)_r}{r!}\,\Phi(-r,c,x)\,\Phi(-r,d,y)z^r =$$

$$= (1-z)^{-h}\sum_r \frac{(h)_r}{(c)_r\,(d)_r\,r!}\,\Phi\!\left(h+r,\,c+r,\,\frac{-xz}{1-z}\right)\Phi\!\left(h+r,\,d+r,\,\frac{-yz}{1-z}\right)\left(\frac{xyz}{(1-z)^2}\right)^r$$

liefert. Diese Beziehung vereinfacht sich noch weiter wenn $h = c$ oder $h = d$ ist, indem dann eine der beiden rechts auftretenden Kummerschen Reihen in die Exponentialreihe übergeht.

4. G. N. Watson hat in der eingangs angeführten Arbeit einen möglichst einfachen und elementaren Beweis von (5) mitgeteilt, in welchem er, allen uneigentlichen Integralen und ähnlichen verwickelteren Hilfsmitteln ausweichend, nur von der Möglichkeit der Umordnung absolut konvergenter mehrfacher Reihen und von der Saalschützschen Formel[14])

---

[14]) Für einen elementaren Beweis dieser Formel s. z.B. F. J. W. Whipple, A group of generalized hypergeometric series: relations between 120 allied series, of the type $F[a,b,c;e,f]$ [Proc. London math. Soc. (2) 23 (1924), 104—114].

$$\frac{{}_3F_2(a, b, c;\ d, e;\ 1)}{\Gamma(d)\,\Gamma(e)} = \frac{\Gamma(1+c-d)\,\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)\,\Gamma(e-a)\,\Gamma(e-b)},$$

gültig, wenn $d + e = a + b + c + 1$ und entweder a oder b eine negative ganze Zahl ist, Gebrauch macht. Es soll gezeigt werden, daß die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Transformationsformeln auf ähnlich elementare Weise bewiesen werden können. Ich beginne mit dem Beweise der spezielleren Beziehung (16), weil dieser Beweis genau so verläuft wie der von Watson für (5).

Die rechte Seite von (16) ist wegen (7) gleich

$$\sum_m \sum_n \sum_r \frac{(h)_{m+r}(h)_{n+r}(-)^{m+n}}{(c)_{m+r}(d)_{n+r}(h)_r} \frac{x^{m+r}}{m!} \frac{y^{n+r}}{n!} \frac{z^{m+n+r}}{r!} (1-z)^{-h-m-n-2r},$$

oder, $|z| < 1$ vorausgesetzt und $(1-z)^{-h-m-n-2r}$ in die binomische Reihe entwickelt,

$$\sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \frac{(h)_{m+r}(h)_{n+r}(h+m+n+2r)_s}{(c)_{m+r}(d)_{n+r}(h)_r\, m!\, n!\, r!\, s!} (-)^{m+n} x^{m+r} y^{n+r} z^{m+n+r+s}.$$

Da diese vierfache Reihe absolut konvergiert, so darf sie beliebig umgeordnet werden. Wir setzen

$$m + r = M,\ n + r = N,\quad m + n + r + s = R,$$

und daher

$$r = M + N - R + s,$$

und summieren nach s. So ergibt sich

$$\sum_M \sum_N \sum_R \sum_s \frac{(h)_M\,(h)_N\,(h+M+N)_s\,(-x)^M\,(-y)^N\,z^R}{(c)_M\,(d)_N\,(h)_{M+N-R+s}\,(R-M-s)!\,(R-N-s)!\,(M+N-R+s)!\,s!}$$

$$= \sum_M \sum_N \sum_R \frac{(h)_M\,(h)_N\,\Gamma(h)\,(-x)^M\,(-y)^N\,z^R}{(c)_M\,(d)_N\,(R-M)!\,(R-N)!} \times$$

$$\times \frac{{}_3F_2(M-R, N-R, h+M+N;\ M+N-R+1, h+M+N-R;\ 1)}{\Gamma(M+N-R+1)\,\Gamma(h+M+N-R)},$$

und das ist nach der Saalschützschen Formel gleich

$$\sum_R \frac{(h)_R}{R!} z^R \sum_M \frac{(-R)_M}{(c)_M} \frac{x^M}{M!} \sum_N \frac{(-R)_N}{(d)_N} \frac{y^N}{N!},$$

was wegen (7) mit der linken Seite von (16) übereinstimmt. Nur der Summationsindex ist jetzt etwas anders bezeichnet.

5. In ganz ähnlicher Weise kann auch die verwickeltere Transformationsformel (15) bewiesen werden. Nur treten hier sechsfache Reihen auf, und bei der Summierung ist außer der Saalschützschen Formel die Gaußsche Formel

$$\frac{(-)^M}{(R-M)!}\,{}_2F_1(-M,\,a;\;R-M+1;\;1)=\frac{(-)^M\,\Gamma(R+1-a)}{R!\,\Gamma(R-M+1-a)}=\frac{(a-R)_M}{R!}$$

zu verwenden.

Die rechte Seite von (15) ist laut (10) gleich der fünffachen Reihe

$$\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q\sum_r \frac{(a)_m\,(b)_n\,(h)_{p+r}\,(h)_{q+r}}{(c)_{m+p+r}\,(d)_{n+q+r}\,(h)_r\,m!\,n!\,p!\,q!\,r!}\times$$
$$\times\,(-)^{p+q}\,x^{m+p+r}\,y^{n+q+r}\,z^{p+q+r}\,(1-z)^{-h-p-q-2r},$$

oder, $|z|<1$ vorausgesetzt und $(1-z)^{-h-p-q-2r}$ in die binomische Reihe entwickelt, gleich der sechsfachen Reihe

$$\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s \frac{(a)_m\,(b)_n\,(h)_{p+r}\,(h)_{q+r}\,(h+p+q+2r)_s}{(c)_{m+p+r}\,(d)_{n+q+r}\,(h)_r\,m!\,n!\,p!\,q!\,r!\,s!}\times$$
$$\times\,(-)^{p+q}\,x^{m+p+r}\,y^{n+q+r}\,z^{p+q+r+s}.$$

Da diese absolut konvergiert, so darf sie beliebig umgeordnet werden. Wir setzen

$$m+p+r=M,\quad n+q+r=N,\quad p+q+r+s=R,$$

also

$$p=R-N+n-s,\quad q=R-M+m-s,\quad r=M+N-R-m-n+s$$

und summieren zunächst nach s, wobei wir wieder die Saalschützsche Formel verwenden. So ergibt sich für die rechte Seite von (15) weiter

$$\sum_M\sum_N\sum_R\sum_m\sum_n\sum_s \frac{(a)_m\,(b)_n\,(h)_{M-m}\,(h)_{N-n}\,(h+M+N-m-n)_s}{(c)_M\,(d)_N\,(h)_{M+N-R-m-n+s}}\times$$
$$\times\frac{(-)^{M+N-m-n}x^My^Nz^R}{(R-M+m-s)!\,(R-N+n-s)!\,(M+N-R-m-n+s)!\,m!\,n!\,s!}=$$
$$=\sum_M\sum_N\sum_R\sum_m\sum_n \frac{(a)_m\,(b)_n\,(h)_{M-m}\,(h)_{N-n}\,\Gamma(h)\,(-)^{M+N-m-n}x^My^Nz^R}{(c)_M\,(d)_N\,(R-M+m)!\,(R-N+n)!\,m!\,n!}\times$$
$$\times\frac{{}_3F_2(M-R-m,\,N-R-n,\,h+M+N-m-n;\,M+N-R-m-n+1,\,h+M+N-R-m-n;\,1)}{\Gamma(M+N-R-m-n+1)\,\Gamma(h+M+N-R-m-n)}$$
$$=\sum_M\sum_N\sum_R\sum_m\sum_n \frac{(a)_m(b)_n(h)_R\,R!\,(-)^{M+N-m-n}x^My^Nz^R}{(c)_M(d)_N(R-M+m)!\,(R-N+n)!\,(M-m)!\,(N-n)!\,m!\,n!}.$$

Hier wird nach m und n summiert, was unter zweimaliger Anwendung der Gaußschen Formel

$$\sum_M \sum_N \sum_R \frac{(h)_R\, R!\, x^M y^N z^R}{(c)_M\, (d)_N M!\, N!} \frac{(-)^M}{(R-M)!}\, {}_2F_1(-M, a;\, R-M+1;\, 1) \times$$

$$\times \frac{(-)^N}{(R-N)!}\, {}_2F_1(-N, b;\, R-N+1;\, 1) = \sum_R \frac{(h)_R}{R!} z^R \sum_M \frac{(a-R)_M}{(c)_M\, M!} x^M \sum_N \frac{(b-R)_N}{(d)_N\, N!} y^N$$

liefert. Das ist aber kraft (7) identisch mit der linken Seite von (15), wodurch der gewünschte Nachweis erbracht ist.

(Eingegangen den 10. Januar 1939.)