COMPOSITIO MATHEMATICA

C. S. MEIJER

Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 348-367
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__348_0>

Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen

von

C. S. Meijer

Groningen

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit bezeichnet

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r}\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+r+\frac{3}{2}\right)} \tag{1}$$

die Struvesche und

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r}\Gamma(r+1)\Gamma(\nu+r+1)} \tag{2}$$

die Besselsche Funktion. Weiter setze ich, wie üblich,

$$\mathbf{L}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{2r}}{2^{2r}\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+r+\frac{3}{2}\right)} \tag{3}$$

und

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{2r}}{2^{2r}\Gamma(r+1)\Gamma(\nu+r+1)}. \tag{4}$$

Ferner betrachte ich noch die Funktionen $Y_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$, die für nicht-ganzzahlige Werte von ν durch

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{5}$$

und

$$(6)\qquad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\}$$

definiert werden können [1]).

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist für die Funktionen

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z),\ I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z),\ I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z), \\ K_\nu(z),\ \mathbf{H}_\nu(z),\ J_\nu(z) \text{ und } Y_\nu(z) \end{cases}$$

Integraldarstellungen abzuleiten.

Ich gebe zunächst zwei Definitionen.

Definition 1. Die Funktion $G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta)$ $(n=1, 2, 3)$ wird definiert durch [2])

$$(8)\qquad G_n(\beta; a_1, a_2, a_3; \zeta) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\Gamma(1+a_h-\beta) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} \Gamma(a_j-a_h)}{\prod\limits_{j=n+1}^{3} \Gamma(1+a_h-a_j)} \zeta^{1+2a_h} \times$$

$$\times\ {}_1F_2(1+a_h-\beta;\ ^{*}\ 1+a_h-a_1, 1+a_h-a_2, 1+a_h-a_3; (-1)^n\zeta^2).$$

Hierin wird $\zeta \neq 0$,

$$(9)\qquad \beta - a_h \neq 1, 2, 3, \ldots\ (h=1, \ldots, n)$$

und

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j=1, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n;\ j\neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl $1 + a_h - a_h$ im System $1 + a_h - a_1$, $1 + a_h - a_2$, $1 + a_h - a_3$ gestrichen werden muß [3]).

---

[1]) Für ganze Werte von ν kann man $Y_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$ durch Grenzübergang definieren; man vergl. Watson, [12], 63—64 und 78. Die Funktion $K_\nu(z)$ kann auch durch

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

erklärt werden; hierin bedeutet $H_\nu^{(1)}(z)$ die erste Hankelsche Funktion.

[2]) ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; w)$ ist die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion. Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt.

Die Funktion G_n und die durch (10) erklärte Funktion S_n sind Spezialfälle der Funktion $G_{p,q}^{m,n}$, die ich auf Seite 11 meiner Arbeit [7] eingeführt habe; es gilt z.B.

$$S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta) = G_{0,4}^{n,0}\left(\eta^2 \,\middle|\, b_1 + \frac{1}{2}, b_2 + \frac{1}{2}, b_3 + \frac{1}{2}, b_4 + \frac{1}{2}\right).$$

[3]) Ist $a_h - a_j = -1, -2, -3, \ldots$ $(h=1, \ldots, n; j=n+1, \ldots, 3)$, so bekommt die rechte Seite von (8) einen Sinn durch einen Grenzübergang. Denn man hat

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\,{}_1F_2(\alpha; \beta, \gamma; w) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\alpha}{\beta\Gamma(\gamma+1)}\frac{w}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)\Gamma(\gamma+2)}\frac{w^2}{2!} + \ldots,$$

und die rechte Seite dieser Beziehung hat auch einen Sinn für $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$

Definition 2. Die Funktion $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$ $(n=1, 2, 3, 4)$ wird definiert durch

$$(10)\quad S_n(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n} \Gamma(b_j-b_h)}{\prod\limits_{j=n+1}^{4} \Gamma(1+b_h-b_j)} \eta^{1+2b_h} \times$$
$$\times\ {}_0F_3(1+b_h-b_1, \ldots * \ldots, 1+b_h-b_4; (-1)^n\eta^2).$$

Hierin wird $\eta \neq 0$ und

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n;\ j\neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl $1 + b_h - b_h$ im System $1 + b_h - b_1, \ldots, 1 + b_h - b_4$ gestrichen werden muß.

Unter Annahme der obigen Bezeichnungen werde ich nun die folgenden Sätze beweisen. Die Sätze 3, 5, 7, 9, 11 und 13 sind Spezialfälle von Satz 1; die Sätze 4, 6, 8, 10, 12 und 14 hingegen Spezialfälle von Satz 2.

Satz 1. *Es sei*

$n = 1, 2, 3,$

$\Re(\beta-a_h) < 1 \quad (h=1, \ldots, n),$

$a_j - a_h$ *nicht ganz* $(j=1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, n;\ j\neq h).$

Behauptung: Für jedes $\zeta \neq 0$ *gilt*

$$G_n(\beta;\ a_1, a_2, a_3;\ \zeta) = 2^{\alpha+\beta+1}\int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_n\left(a_1, a_2, a_3, \alpha; \frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$$\Re(\alpha-a_h) < 1 \quad (h=1, \ldots, n).$$

Satz 2. *Es sei*

$$n = 1, 2, 3,$$

$$\zeta \neq 0,\ |\arg \zeta| \leqq \frac{1}{2}(n-1)\pi,$$

$$(11)\qquad \Re(\beta-a_h) < 1 \quad (h=1, \ldots, n),$$

$$(12)\quad a_j - a_h \textit{ nicht ganz } (j=1, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n;\ j\neq h).$$

Behauptung:

$$(13)\quad G_n(\beta;\ a_1, a_2, a_3;\ \zeta) = 2^{\alpha+\beta}\int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_{n+1}\left(\alpha, a_1, a_2, a_3;\ \frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$$(14)\qquad \Re(\beta-\alpha) < 1,$$

$$(15)\qquad \Re(a_1+a_2+a_3-2\beta-\alpha) < \frac{1}{2},$$

$$(16)\qquad \alpha - a_h \text{ nicht ganz } (h=1, \ldots, n).$$

Bemerkung. *Ist* $n = 2$ *oder* $= 3$ *und zugleicherzeit* $|\arg\zeta| < \frac{1}{2}(n-1)\pi$, *so gilt Beziehung* (13) *für alle Werte von* a_1, a_2, a_3, β *und* α *mit* (11), (12), (14) *und* (16). (*Bedingung* (15) *braucht dann also nicht erfüllt zu sein.*)

Satz 3. *Ist* $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ *und* 2ν *nicht ganz, so gilt für jedes* $z \neq 0$

$$(17)\quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1}\cos\nu\pi}{\pi^2}\int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times S_3\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, \alpha;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit* $\Re\left(\alpha\pm\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}$.

Satz 4. *Ist* $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$, $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ *und* 2ν *nicht ganz, so gilt*

$$(18)\quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu}\cos\nu\pi}{\pi^2}\int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times S_4\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$\Re\left(\frac{1}{2}\nu-\alpha\right) < 1$, $\nu - 2\alpha$ *nicht ganz und* $\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ *nicht ganz.*

Satz 5. *Für jedes* $z \neq 0$ *gilt*

$$(19)\quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1}}{\pi}\int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times S_2\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}, \alpha;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit* $\Re\left(\alpha-\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}$.

SATZ 6. *Ist* $z \neq 0$ *und* $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, *so gilt*

$$(20)\quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu}}{\pi} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times\, S_3\left(\alpha,\, \frac{1}{2}\nu,\, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\, \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu-\alpha\right) < 1 \text{ und } \nu - 2\alpha \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 7. *Ist* $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ *und* $\nu + \frac{1}{2}$ *nicht ganz, so gilt für jedes* $z \neq 0$

$$I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1}\cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times\, S_2\left(\frac{1}{2}\nu,\, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, \alpha;\, \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$$\Re\left(\alpha-\frac{1}{2}\nu\right) < 1 \text{ und } \Re\left(\alpha+\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

SATZ 8. *Ist* $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ *und* $\nu + \frac{1}{2}$ *nicht ganz, so gilt*

$$(21)\quad I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu}\cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) \times$$
$$\times\, S_3\left(\alpha,\, \frac{1}{2}\nu,\, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\, \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α *eine beliebige Zahl mit*

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu-\alpha\right) < 1,\ \frac{1}{2}\nu - \alpha \text{ nicht ganz und } \alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

SATZ 9. *Ist* ν *nicht ganz, so gilt für jedes* $z \neq 0$

$$K_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_2\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\, \beta,\, \alpha;\, \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta}\, dv.$$

Hierin sind α *und* β *beliebige Zahlen mit*

$$\Re\left(\alpha\pm\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2} \text{ und } \Re\left(\beta\pm\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

Satz 10. *Ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und ν nicht ganz, so gilt*

$$(22)\quad K_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta-1}\int\limits_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_3\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \beta;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\beta \pm \frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2},\ \Re(\beta-\alpha) < 1 \text{ und } \alpha \pm \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

Satz 11. *Für jedes $z \neq 0$ gilt*

$$(23)\quad \mathbf{H}_\nu(z) = 2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu+1}\int\limits_0^\infty K_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) S_1\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \alpha;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α eine beliebige Zahl mit $\Re\left(\alpha-\frac{1}{2}\nu\right) < 1$.

Satz 12. *Für jedes $z > 0$ gilt*

$$\mathbf{H}_\nu(z) = 2^{\alpha+\frac{1}{2}\nu}\int\limits_0^\infty J_{\alpha-\frac{1}{2}\nu}(v) S_2\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\frac{1}{2}\nu} dv.$$

Hierin ist α eine beliebige Zahl mit

$$\Re\left(\frac{1}{2}\nu-\alpha\right) < 1,\ \Re\left(\frac{1}{2}\nu+\alpha\right) > -\frac{3}{2} \text{ und } \frac{1}{2}\nu - \alpha \text{ nicht ganz.}$$

Satz 13. *Für jedes $z \neq 0$ gilt*

$$(24)\quad J_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta+1}\int\limits_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \beta,\ \alpha;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\alpha-\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2} \text{ und } \Re\left(\beta-\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2}.$$

Satz 14. *Für jedes $z > 0$ gilt*

$$(25)\quad J_\nu(z) = 2^{\alpha+\beta}\int\limits_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v) S_2\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \beta;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\alpha-\beta} dv.$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re\left(\beta-\frac{1}{2}\nu\right) < \frac{1}{2},\ \Re(\beta-\alpha) < 1,\ \Re(\alpha+\beta) > -\frac{3}{2} \text{ und } \alpha - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \text{ nicht ganz.}$$

Satz 15. *Ist σ ganz < 2, $\Re(\nu) < 2 - \sigma$ und ν nicht ganz, so gilt für jedes $z > 0$*

$$Y_\nu(z) = (-1)^{\sigma+1}\, 2^{\beta-\frac{1}{2}\nu-\sigma} \int_0^\infty J_{-\beta-\frac{1}{2}\nu-\sigma}(v) \times$$
$$\times\, S_2\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\sigma,\ \beta;\ \frac{1}{4}zv\right) v^{-\beta+\frac{1}{2}\nu+\sigma}\, dv.$$

Hierin ist β eine beliebige Zahl mit [4])

(26) $$\Re\left(\frac{1}{2}\nu+\beta\right) < \frac{1}{2} \quad und \quad -\frac{1}{2} < \Re\left(\frac{1}{2}\nu-\beta\right) < \frac{3}{2} - \sigma.$$

Diese Sätze sind, soviel ich weiß, bis jetzt noch nicht veröffentlicht worden. Viele Sonderfälle waren aber schon bekannt. In § 4 werde ich nämlich zeigen, daß verschiedene Relationen, die man bisher mit Hilfe andrer Methoden bewiesen hat, nur Spezialfälle der vorangehenden Sätze sind.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$n = 1, 2, 3, 4,$$

(27) $$\Re(\alpha-b_h) < 1 \qquad (h=1, \ldots, n),$$

(28) $$\Re(\beta-b_h) < 1 \qquad (h=1, \ldots, n),$$

(29) $b_j - b_h$ *nicht ganz* $(j=1, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n;\ j\neq h)$.

Behauptung: Für jedes $\zeta \neq 0$ *gilt*

(30) $$2^{\alpha+\beta+1}\int_0^\infty K_{\alpha-\beta}(v) S_n\left(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta} dv =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{\Gamma(1+b_h-\alpha)\Gamma(1+b_h-\beta)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n}\Gamma(b_j-b_h)}{\prod\limits_{j=n+1}^{4}\Gamma(1+b_h-b_j)}\, \zeta^{1+2b_h} \times$$
$$\times\, {}_2F_3(1+b_h-\alpha,\ 1+b_h-\beta;\ 1+b_h-b_1, \ldots * \ldots, 1+b_h-b_4;\ (-1)^n\zeta^2).$$

Beweis. Ist $\Re(\lambda\pm\mu) > -1$, so hat man [5]) für beliebige Werte von z

$$\int_0^\infty K_\mu(v)\cdot {}_0F_3(a, b, c;\ zv^2)v^\lambda dv = 2^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu\right)\times$$
$$\times\, {}_2F_3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu;\ a, b, c;\ 4z\right).$$

---

[4]) Die Bedingungen (26) sind lösbar wegen $\sigma < 2$ und $\Re(\nu) < 2 - \sigma$.

[5]) Meijer, [6], Formel (16).

Hieraus und aus (10) folgt die Behauptung von Hilfssatz 1.

HILFSSATZ 2. *Es sei*

$$n = 2, 3, 4,$$

$$\zeta \neq 0, \ |\arg \zeta| \leqq \tfrac{1}{2}(n-2)\pi,$$

$$\Re(\beta - b_h) < 1 \qquad (h=1, \ldots, n), \tag{28}$$

$$\Re(b_1+b_2+b_3+b_4-2\alpha-2\beta) < \tfrac{1}{2}, \tag{31}$$

(29) $b_j - b_h$ *nicht ganz* $(j=1, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n;\ j \neq h)$.

Behauptung:

$$2^{\alpha+\beta}\int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(v)S_n\Big(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \tfrac{1}{2}\zeta v\Big)v^{-\alpha-\beta}dv = \tag{32}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{\Gamma(1+b_h-\beta)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n}\Gamma(b_j-b_h)}{\Gamma(\alpha-b_h)\prod\limits_{j=n+1}^{4}\Gamma(1+b_h-b_j)}\zeta^{1+2b_h}\times$$

$$\times {}_2F_3\big(1+b_h-\alpha,\ 1+b_h-\beta;\ 1+b_h-b_1, ..*.., 1+b_h-b_4;\ (-1)^{n+1}\zeta^2\big).$$

BEMERKUNG. *Ist* $n = 3$ *oder* $= 4$ *und zugleicherzeit* $|\arg \zeta| < \frac{1}{2}(n-2)\pi$, *so gilt Formel* (32) *für alle Werte von* b_1, b_2, b_3, b_4, α *und* β *mit* (28) *und* (29). (*Bedingung* (31) *braucht dann also nicht erfüllt zu sein.*)

BEWEIS [6]. Die durch (10) definierte Funktion $S_4(b_1, b_2, b_3, b_4; \eta)$ besitzt bekanntlich [7]) für große Werte von $|\eta|$ mit $|\arg \eta| < \frac{5}{2}\pi$ eine asymptotische Entwicklung der Gestalt [8])

$$S_4(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \eta) \sim e^{-4\eta^{\frac{1}{2}}}\eta^r\left\{A_0 + \frac{A_1}{\eta^{\frac{1}{2}}} + \frac{A_2}{\eta} + \ldots\right\}, \tag{33}$$

worin

$$r = \frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3+b_4) + \frac{1}{4}.$$

---

[6]) Hilfssatz 2 kann auch mit Hilfe der Hankelschen Transformation aus Satz 4 meiner Arbeit [7] abgeleitet werden. (Für die Hankelsche Transformation vergl. man: WATSON, [12], 456; BOCHNER, [3], 180; TITCHMARSH, [10], 464; [11], 240.) Der Beweis von (30) und (32) kann auch mit Hilfe von Barnesschen Integralen geliefert werden; man vergl. [7], 29—37.

[7]) Man vergl. BARNES, [1], 108—110.

[8]) Die Zahlen A sind nicht von η abhängig.

Für die Funktion [9]) $S_n(\eta)$ gilt ferner, wie man leicht nachrechnet,

$$(34) \qquad S_3(\eta) = \frac{1}{2\pi}\left\{ e^{-\pi i b_4} S_4\left(\eta e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) + e^{\pi i b_4} S_4\left(\eta e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)\right\}$$

und

$$(35) \quad S_2(\eta) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{e^{-\pi i(b_3+b_4)} S_4\left(\eta e^{\pi i}\right) + 2S_4(\eta)\cos(b_3-b_4)\pi + e^{\pi i(b_3+b_4)} S_4\left(\eta e^{-\pi i}\right)\right\}.$$

Setzt man nun die rechte Seite von (30) der Kürze halber gleich $\varphi_n(\zeta)$, so hat man nach (30) (mit $\frac{v}{z}$ statt v und ζz statt ζ angewendet) für positive Werte von z und beliebige Werte von $\zeta \neq 0$, falls α, β und b den Bedingungen (27), (28) und (29) genügen,

$$(36) \qquad (2z)^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty K_{\alpha-\beta}\left(\frac{v}{z}\right) S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta}\,dv = \frac{1}{4}\varphi_n(\zeta z).$$

Die rechte Seite dieser Relation ist eine analytische Funktion von z; ist $n > 2$, $|\arg\zeta| < \frac{1}{2}(n-2)\pi$ und genügen α, β und b den Bedingungen (27), (28) und (29), so ist die linke Seite wegen (33) und (34) [10]) eine analytische Funktion [11]) von z für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und eine stetige Funktion von z für $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\pi$, so daß Beziehung (36) nicht nur für $\arg z = 0$, sondern sogar für $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\pi$ gültig ist. Ist $n \geqq 2$ und $|\arg\zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$, so ist die linke Seite von (36) wegen (33), (34) und (35) eine analytische Funktion von z für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und eine stetige Funktion von z für $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\pi$, wofern α, β und b nicht nur den Bedingungen (27), (28) und (29), sondern auch noch der Bedingung (31) genügen, so daß Formel (36) unter diesen Voraussetzungen wiederum für $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\pi$ gültig ist.

---

[9]) $S_n(\eta) = S_n(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \eta)$.

[10]) Das Verhalten von $S_4(\eta)$ für große Werte von $|\eta|$ folgt aus (33), von $S_3(\eta)$ aus (34) und (33) und von $S_2(\eta)$ aus (35) und (33).

[11]) Für große Werte von $|w|$ gilt bekanntlich

$$K_\nu(w) = \left(\frac{\pi}{2w}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-w}\left\{1 + O\left(\frac{1}{w}\right)\right\}.$$

Nimmt man nun $z = e^{\frac{1}{2}\pi i}$, bzw. $z = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ in (36), so erhält man, wenn man überdies die Relationen [12])

$$K_\nu\left(ve^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(v), \quad K_\nu\left(ve^{\frac{1}{2}\pi i}\right) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(v)$$

benutzt,

$$(37) \quad 2^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty H_{\alpha-\beta}^{(1)}(v)\, S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta}dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha\pi i}\varphi_n\left(\zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

und

$$(38) \quad 2^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty H_{\alpha-\beta}^{(2)}(v) S_n\left(\frac{1}{2}\zeta v\right) v^{-\alpha-\beta}dv = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha\pi i}\varphi_n\left(\zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right).$$

Aus der Definition der Funktion $\varphi_n(\zeta)$ $\left(\varphi_n(\zeta)\right.$ ist gleich der rechten Seite von $\left.(30)\right)$ ergibt sich aber, daß

$$\frac{1}{2\pi}\left\{ e^{-\alpha\pi i}\varphi_n\left(\zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) + e^{\alpha\pi i}\varphi_n\left(\zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)\right\}$$

gleich der rechten Seite von (32) ist, so daß Formel (32) sofort aus (37) und (38) folgt.

Der Beweis von (32) ist also geliefert für den Fall, daß α, β und b den Bedingungen (27), (28) und (29) (im Falle $|\arg\zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$ den Bedingungen (27), (28), (29) und (31)) genügen. Durch analytische Fortsetzung schließt man aber [13]), daß Formel (32) für alle Werte von α, β und b mit (28) und (29) (im Falle $|\arg\zeta| = \frac{1}{2}(n-2)\pi$ mit (28), (29) und (31)) gültig ist.

§ 2.

Beweis der Sätze 1—15.

Beweis von Satz 1. Setzt man die rechte Seite von (30) gleich $\varphi_n(\alpha, \beta;\ b_1, b_2, b_3, b_4;\ \zeta)$, so ist

$$\varphi_n(\alpha, \beta;\ a_1, a_2, a_3, \alpha;\ \zeta) = G_n(\beta;\ a_1, a_2, a_3;\ \zeta) \qquad (n=1, 2, 3),$$

so daß Satz 1 sofort aus Hilfssatz 1 folgt.

Beweis von Satz 2. Ersetzt man n durch $n+1$ in (32) und setzt man überdies $b_1 = \alpha$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2$ und $b_4 = a_3$, so geht die rechte Seite über in $G_n(\beta;\ a_1, a_2, a_3;\ \zeta)$; Satz 2 und die

[12]) Meijer, [6], Formeln (5) und (6).

[13]) Für kleine Werte von $|v|$ ist $J_\nu(v) = O\left(|v|^{\Re(\nu)}\right)$.

zugehörige Bemerkung folgen also aus Hilfssatz 2 und der Bemerkung zu Hilfssatz 2.

BEWEIS DER SÄTZE 3—14. Die Funktionen (7) sind Spezialfälle der durch (8) definierte Funktion $G_n(\beta;\ a_1, a_2, a_3;\ \zeta)$. Denn aus (1), bzw. (2) folgt

$$(39)\quad \mathbf{H}_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} {}_1F_2\left(1;\ \frac{3}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ -\frac{1}{4}z^2\right),$$

bzw.

$$(40)\qquad J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_1F_2\left(\sigma;\ \nu+1,\ \sigma;\ -\frac{1}{4}z^2\right)$$

(σ ist beliebig mit $\sigma \neq 0, -1, -2, \ldots$). Mit Rücksicht auf (8) hat man also

$$(41)\qquad \mathbf{H}_\nu(z) = G_1\left(\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z\right)$$

und

$$(42)\qquad J_\nu(z) = G_1\left(\beta;\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \beta;\ \frac{1}{2}z\right)$$

$\left(\beta \text{ ist beliebig mit } \beta-\frac{1}{2}\nu\neq\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \text{ (siehe (9))}\right)$.

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (3), (4) und (8)

$$(43)\quad I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}G_2\left(\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z\right)$$

und

$$(44)\quad I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi}{\pi}G_2\left(\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z\right).$$

Aus (6), (4) und (8) geht hervor

$$(45)\qquad K_\nu(z) = \frac{1}{2}G_2\left(\beta;\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \beta;\ \frac{1}{2}z\right)$$

$\left(\beta \text{ ist beliebig mit } \beta\pm\frac{1}{2}\nu\neq\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$. Aus (39), (5), (40) und (8) ergibt sich noch

$$(46)\quad \mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi}{\pi^2}G_3\left(\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z\right).$$

Die Sätze 3—14 folgen nun mit Hilfe von (46), (43), (44), (45), (41) und (42) aus den Sätzen 1 und 2 (siehe auch die Bemerkung zu Satz 2).

Beweis von Satz 15. Setzt man die rechte Seite von (32) gleich $\psi_n(\alpha, \beta;\ b_1, b_2, b_3, b_4;\ \zeta)$, so hat man für ganze Werte von σ

$$(-1)^{\sigma+1}\psi_2\left(-\frac{1}{2}\nu-\sigma,\ \beta;\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\sigma,\ \beta;\ \frac{1}{2}z\right)=$$

$$=-\frac{\Gamma(-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}{}_0F_1\left(\nu+1;\ -\frac{1}{4}z^2\right)-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}{}_0F_1\left(-\nu+1;\ -\frac{1}{4}z^2\right)=Y_\nu(z)$$

(wegen (2) und (5)).

Satz 15 folgt also aus Hilfssatz 2.

§ 3.

Hilfsformeln.

Ich werde zeigen, daß $J_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$ Spezialfälle der durch (10) definierten Funktion $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \eta)$ sind. Wegen (2) gilt nämlich

$$J_{2\nu}(2w)=\frac{1}{\Gamma(2\nu+1)}\,w^{2\nu}{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ \nu+1;\ \frac{1}{16}w^4\right)$$
$$-\frac{1}{\Gamma(2\nu+2)}\,w^{2\nu+2}{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\ \nu+1,\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{16}w^4\right).$$

Mit Rücksicht auf (10) hat man also

$$(47)\qquad S_2\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{4}w^2\right)=J_{2\nu}(2w).$$

Aus (10) und (2) folgt auch

$$(48)\quad S_2\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-1;\ \frac{1}{4}w^2\right)=\frac{2}{w}\,J_{2\nu+1}(2w)$$

und

$$(49)\quad S_2\left(\frac{1}{2}\nu-1,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{4}w^2\right)=\frac{2}{w}\,J_{2\nu-1}(2w).$$

In ganz ähnlicher Weise findet man mit Hilfe von (4), (6) und (10)

$$(50)\qquad S_4\left(-\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}w^2\right)=4\pi K_{2\nu}(2w)$$

und

$$(51)\quad S_4\left(-\frac{1}{2}\nu-1,\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}w^2\right)=\frac{8\pi}{w}K_{2\nu+1}(2w).$$

Auch $I_\nu(z)J_\nu(z)$, $K_\nu(z)J_\nu(z)$ und einige andre Produkte von Besselschen Funktionen sind Spezialfälle der Funktion $S_n(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \eta)$. Denn man hat [14])

[14]) Watson, [12], 148, Formeln (3) und (5).

$$(52) \quad I_\nu(w)\, J_\nu(w) = \frac{1}{\Gamma^2(\nu+1)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2\nu} {}_0F_3\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu+1,\ \nu+1;\ -\frac{1}{64}w^4\right)$$

und

$$(53) \quad I_{-\nu}(w)\, J_\nu(w) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu+1)}\, {}_0F_3\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu+1,\ -\frac{1}{2}\nu+1;\ -\frac{1}{64}w^4\right) + \\ + \frac{\nu w^2}{2\Gamma(\nu+2)\,\Gamma(-\nu+2)}\, {}_0F_3\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2};\ -\frac{1}{64}w^4\right).$$

Wegen (10) und (52) gilt nun

$$(54) \qquad S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0;\ \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_\nu(w)\, J_\nu(w),$$

$$(55) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{2^{3\nu}\, w^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}} I_{2\nu}(w) J_{2\nu}(w)$$

und

$$(56) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\nu-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-1;\ \frac{1}{8}w^2\right) = \frac{2^{3\nu+3}\, w^{-2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} I_{2\nu+1}(w)\, J_{2\nu+1}(w)$$

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (10) und (53)

$$(57) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) \sin \nu\pi = \\ = \frac{2^{-3\nu-1}\, w^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \left\{I_{-2\nu}(w)\, J_{2\nu}(w) - I_{2\nu}(w)\, J_{-2\nu}(w)\right\},$$

$$(58) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) \cos \nu\pi = \\ = \frac{2^{-3\nu-1}\, w^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \left\{I_{2\nu}(w)\, J_{-2\nu}(w) + I_{-2\nu}(w)\, J_{2\nu}(w)\right\}$$

und

$$(59) \quad S_1\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-1,\ \frac{3}{2}\nu-\frac{3}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) \cos \nu\pi = \\ = \frac{2^{2-3\nu}\, w^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \left\{I_{2\nu-1}(w)\, J_{1-2\nu}(w) - I_{1-2\nu}(w)\, J_{2\nu-1}(w)\right\}.$$

Aus (10), (6), (52) und (53) geht hervor

$$(60) \quad S_3\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{2-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi}\, K_{2\nu}(w)\, J_{2\nu}(w),$$

$$(61) \quad S_3\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{2-3\nu} w^{2\nu} \sqrt{\pi}\, K_{2\nu}(w)\, J_{-2\nu}(w),$$

$$(62) \quad S_3\left(-\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) = 2^{3\nu+2} w^{-2\nu} \sqrt{\pi}\, K_{2\nu}(w)\, J_{2\nu}(w),$$

$$(63) \quad S_3\left(-\frac{1}{2}\nu-1,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\nu-\frac{3}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) = \\ = 2^{3\nu+5} w^{-2\nu-2} \sqrt{\pi} K_{2\nu+1}(w) J_{2\nu+1}(w)$$

und

$$(64)\quad S_3\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right)\cos\nu\pi =$$
$$= 2^{1-3\nu}w^{2\nu}\sqrt{\pi}\,K_{2\nu}(w)\left\{J_{2\nu}(w)+J_{-2\nu}(w)\right\}.$$

Aus (10) ergibt sich überdies noch mit Rücksicht auf (5), (6), (52) und (53)

$$(65)\quad S_3\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{8}w^2\right) =$$
$$= -\,2^{2-3\nu}w^{2\nu}\sqrt{\pi}\,K_{2\nu}(w)\left\{J_{2\nu}(w)\sin\nu\pi+Y_{2\nu}(w)\cos\nu\pi\right\},$$

$$(66)\quad S_3\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-1;\ \frac{1}{8}w^2\right) =$$
$$= 2^{5-3\nu}w^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,K_{2\nu-1}(w)\left\{J_{2\nu-1}(w)\sin\nu\pi+Y_{2\nu-1}(w)\cos\nu\pi\right\},$$

$$(67)\quad S_3\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ 0;\ \frac{1}{8}w^2\right) =$$
$$= -\,4\sqrt{\pi}\,K_\nu(w)\left\{J_\nu(w)\sin\frac{1}{2}\nu\pi+Y_\nu(w)\cos\frac{1}{2}\nu\pi\right\}$$

und

$$(68)\quad S_3\left(0,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) =$$
$$= 4\sqrt{\pi}\,K_\nu(w)\left\{J_\nu(w)\cos\frac{1}{2}\nu\pi-Y_\nu(w)\sin\frac{1}{2}\nu\pi\right\}.$$

Nun folgt aus (10)

$$S_4\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ t\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\sin 2\nu\pi}\left\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}S_3\left(\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2};\ te^{\frac{1}{2}\pi i}\right)\right.$$
$$\left.-\,e^{-\frac{3}{2}\nu\pi i}S_3\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ te^{\frac{1}{2}\pi i}\right)\right\}.$$

Infolge (61) und (60) hat man also

$$(69)\quad S_4\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right) =$$
$$= \frac{2^{2-3\nu}w^{2\nu}\pi^{\frac{3}{2}}}{\sin 2\nu\pi}K_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})\left\{e^{\nu\pi i}J_{-2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})-e^{-\nu\pi i}J_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})\right\}.$$

Aus (2) und (4) ergibt sich aber mit Rücksicht auf (6)

$$\frac{\pi}{\sin 2\nu\pi}\left\{e^{\nu\pi i}J_{-2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})-e^{-\nu\pi i}J_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})\right\} = 2K_{2\nu}(we^{-\frac{1}{4}\pi i}).$$

Wegen (69) gilt daher

$$(70)\quad S_4\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}w^2\right)=$$

$$=2^{3-3\nu}w^{2\nu}\sqrt{\pi}\,K_{2\nu}(we^{\frac{1}{4}\pi i})K_{2\nu}(we^{-\frac{1}{4}\pi i}).$$

§ 4.

Spezialfälle der Sätze.

Ich werde jetzt einige merkwürdige Spezialfälle der Sätze 3—14 mitteilen. Diese Spezialfälle — zum Teil schon bekannt — können in zwei Klassen verteilt werden [15]).

Spezialfälle der ersten Klasse.

Ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$, bzw. $\Re(\nu) < 0$, so folgt aus (18) (mit z^2 statt z, $v = u^2$ und $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$, bzw. $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$ angewendet) mit Rücksicht auf (50), bzw. (51) [16])

$$(71)\qquad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{8\cos\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty J_{-\nu}(u^2)\,K_{2\nu}(2zu)u\,du,$$

bzw.

$$(72)\quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{8\cos\nu\pi}{\pi z}\int_0^\infty J_{-\nu-1}(u^2)\,K_{2\nu+1}(2zu)u^2\,du.$$

Ist $z \neq 0$ und $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, bzw. $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$, so folgt aus (19) (mit z^2 statt z, $v = u^2$ und $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$, bzw. $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$ angewendet) mit Rücksicht auf (47), bzw. (48) [17])

$$(73)\qquad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_\nu(u^2)\,J_{2\nu}(2zu)u\,du,$$

bzw.

$$(74)\qquad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi z}\int_0^\infty K_{\nu+1}(u^2)\,J_{2\nu+1}(2zu)u^2\,du.$$

---

[15]) Die Hankelsche Umkehrungsformeln der Relationen (71), (72), (79) und (80) kommen vor in meiner Arbeit [7] (26—28, Beispiele 9, 10, 3 und 4).

[16]) In (18) ist ν außerdem noch der Bedingung $2\nu \neq 0, -1, -2, \ldots$ unterworfen; von dieser Beschränkung kann man sich aber in (71) und (72) durch Grenzübergang befreien.

[17]) Man beachte auch, daß $K_{-\mu} = K_\mu$ ist (siehe (6)).

Die Integraldarstellungen (71), (72), (73) und (74) kommen schon vor in einer vorigen Arbeit [18]) des Verfassers.

Ich betrachte jetzt die drei Spezialfälle mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu$, bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu - 1$, oder $\alpha = \frac{1}{2}\nu - 1$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu$ von (25). Diese drei Spezialfälle liefern, wenn ich überdies noch z durch z^2 $(z>0)$ und v durch u^2 ersetze und außerdem die Formeln (47), bzw. (48) oder (49) verwende,

$$J_\nu(z^2) = 2\int_0^\infty J_\nu(u^2)\,J_{2\nu}(2zu)u\,du \tag{75}$$

$\left(\text{wo } \Re(\nu) > -\frac{1}{2} \text{ ist}\right)$, bzw.

$$J_\nu(z^2) = \frac{2}{z}\int_0^\infty J_{\nu+1}(u^2)\,J_{2\nu+1}(2zu)u^2\,du \tag{76}$$

$\left(\text{wo } \Re(\nu) > -\frac{3}{2} \text{ ist}\right)$, oder

$$J_\nu\,(z^2) = \frac{2}{z}\int_0^\infty J_{\nu-1}(u^2)\,J_{2\nu-1}(2zu)u^2\,du \tag{77}$$

(wo $\Re(\nu) > 0$ ist).

Formel (75) rührt von Bateman [19]) her; sie ist auch von Hardy [20]) und von van der Pol und Niessen [21]) abgeleitet worden. Die Spezialfälle mit $\nu = -\frac{1}{2}$ von (76) und mit $\nu = \frac{1}{2}$ von (77) sind schon von Mitra [22]) gegeben worden [23]).

Spezialfälle der zweiten Klasse.

Ist $z \neq 0$ und $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$, so folgt aus (17) $\left(\text{mit } z^2 \text{ statt } z,\ v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2} \text{ angewendet}\right)$ mit Rücksicht auf (61)

$$\mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+2}\,z^{2\nu}\cos\nu\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right)K_{2\nu}(zu)\,J_{-2\nu}(zu)u^{2-2\nu}\,du. \tag{78}$$

---

18) Meijer, [5], 747—749; in [5] habe ich irrtümlich behauptet, daß (73) und (74) für alle Werte von ν gültig seien.

19) Bateman, [2], 185.

20) Hardy, [4], 190.

21) Van der Pol und Niessen, [9], 558.

22) Mitra, [8], 87—88.

23) Diese zwei Spezialfälle werden besonders einfach; denn es gilt

$$J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\zeta,\quad J_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\zeta.$$

Ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$, so folgt aus (18) $\left(\text{mit } z^2 \text{ statt } z,\ v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2} \text{ angewendet}\right)$ mit Rücksicht auf (70)

$$(79)\quad \mathbf{H}_\nu(z^2) - Y_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+2} z^{2\nu} \cos \nu\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(z u\, e^{\frac{1}{4}\pi i}) K_{2\nu}(z u\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}) u^{2-2\nu} du.$$

Ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, so folgt aus (20) $\left(\text{mit } z^2 \text{ statt } z,\ v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2} \text{ angewendet}\right)$ mit Rücksicht auf (60)

$$(80)\quad I_\nu(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu)\, u^{2-2\nu} du.$$

Ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$, so folgt aus (21) $\left(\text{mit } z^2 \text{ statt } z,\ v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2} \text{ angewendet}\right)$ mit Rücksicht auf (64)

$$(81)\quad I_{-\nu}(z^2) - \mathbf{L}_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) \{J_{2\nu}(zu) + J_{-2\nu}(zu)\}\, u^{2-2\nu} du.$$

Die Beziehungen (79) und (80) habe ich früher [24]) auf andre Weise abgeleitet. Der Spezialfall mit $\nu = 0$ von (78) und der gemeinsame Spezialfall mit $\nu = 0$ von (80) und (81) kommen auch bei Herrn Mitra [25]) vor.

Ich wende nun Formel (22) sechsmal an, nämlich mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$ und $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$, mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$ und $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - 1$, mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\beta = 0$ und mit $\alpha = 0$ und $\beta = -\frac{1}{2}$. Ich finde dann, wenn ich ferner noch z durch z^2 und v durch $\frac{1}{2}u^2$ ersetze und überdies die Beziehungen (62), (63), (65), (66), (67) und (68) successive benutze,

$$(82)\quad K_\nu(z^2) = 2^{-\nu} z^{-2\nu} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu)\, u^{2\nu+2} du$$

$\left(\text{wo } \Re(\nu) > -\frac{1}{2} \text{ ist}\right)$ [26]),

---

[24]) Meijer, [5], Formeln (49) und (53).

[25]) Mitra, [8], Formeln (19) und (15).

[26]) Ich nehme an, daß $z \neq 0$ und $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ ist.

$$K_\nu(z^2) = 2^{-\nu-1} z^{-2\nu-2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu+1}(zu)\, J_{2\nu+1}(zu)\, u^{2\nu+4} du$$

(wo $\Re(\nu) > -1$ ist),

$$K_\nu(z^2) = -2^\nu z^{2\nu} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu}(zu) \times$$
$$\times \left\{J_{2\nu}(zu) \sin \nu\pi + Y_{2\nu}(zu) \cos \nu\pi\right\} u^{2-2\nu} du$$

$\left(\text{wo } |\Re(\nu)| < \frac{1}{2} \text{ ist}\right)$,

$$K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1} z^{2\nu-2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_{2\nu-1}(zu) \times$$
$$\times \left\{J_{2\nu-1}(zu) \sin \nu\pi + Y_{2\nu-1}(zu) \cos \nu\pi\right\} u^{4-2\nu} du$$

$\left(\text{wo } -\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{3}{2} \text{ ist}\right)$,

$$(z^2) = -2\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_\nu(zu) \left\{J_\nu(zu) \sin \frac{1}{2}\nu\pi + Y_\nu(zu) \cos \frac{1}{2}\nu\pi\right\} u\, du$$

(wo $|\Re(\nu)| < 1$ ist) und

$$)\quad K_\nu(z^2) = 2\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{2}u^2\right) K_\nu(zu) \left\{J_\nu(zu) \cos \frac{1}{2}\nu\pi - Y_\nu(zu) \sin \frac{1}{2}\nu\pi\right\} u\, du$$

(wo $|\Re(\nu)| < 2$ ist).

Der gemeinsame Spezialfall mit $\nu = 0$ von (82) und (83) ist schon von Herrn Mitra [27]) gegeben worden [28]).

Ist $z \neq 0$ und $\Re(\nu) < \frac{3}{2}$, so folgt aus (23) $\left(\text{mit } z^2 \text{ statt } z,\ v = \frac{1}{2}u^2 \text{ und } \alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2} \text{ angewendet}\right)$ mit Rücksicht auf (57)

$$\mathbf{H}_\nu(z^2) \sin \nu\pi = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times$$
$$\times \left\{I_{-2\nu}(zu)\, J_{2\nu}(zu) - I_{2\nu}(zu)\, J_{-2\nu}(zu)\right\} u^{2-2\nu} du.$$

Ich wende nun Formel (24) fünfmal an, nämlich mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$ und $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$, mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - 1$ und $\beta = -\frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - \frac{3}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - 1$ und mit $\alpha = 0$ und $\beta = -\frac{1}{2}$. Ich finde dann, wenn ich ferner noch z durch z^2 $(z \neq 0)$ und v durch $\frac{1}{2}u^2$ ersetze und überdies

---

27) Mitra, [8], Formel (14).

28) Mit Hilfe von $K_\nu(z^2) = K_{-\nu}(z^2)$ kann man aus den obigen Integraldarstellungen noch andre ableiten.

die Beziehungen (55), (56), (58), (59) und (54) successive benutze,

$$J_\nu(z^2) = \frac{2^{-\nu}z^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) I_{2\nu}(zu)\, J_{2\nu}(zu) u^{2\nu+2} du$$

$\left(\text{wo } \Re(\nu) > -\frac{1}{2} \text{ ist}\right)$,

$$J_\nu(z^2) = \frac{2^{-\nu-1}z^{-2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) I_{2\nu+1}(zu)\, J_{2\nu+1}(zu) u^{2\nu+4} du$$

(wo $\Re(\nu) > -1$ ist),

$$J_\nu(z^2) \cos \nu\pi = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times$$
$$\times \left\{I_{2\nu}(zu)\, J_{-2\nu}(zu) + I_{-2\nu}(zu)\, J_{2\nu}(zu)\right\} u^{2-2\nu} du$$

(wo $\Re(\nu) < 1$ ist),

$$J_\nu(z^2) \cos \nu\pi = \frac{2^{\nu-2} z^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}u^2\right) \times$$
$$\times \left\{I_{2\nu-1}(zu)\, J_{1-2\nu}(zu) - I_{1-2\nu}(zu)\, J_{2\nu-1}(zu)\right\} u^{4-2\nu} du$$

(wo $\Re(\nu) < 2$ ist) und [29])

$$(84) \qquad J_\nu(z^2) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} I_\nu(zu)\, J_\nu(zu)\, u\, du$$

(wo $\Re(\nu) > -1$ ist).

Formel (84) war schon bekannt [30]).

---

[29]) $K_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta}$.

[30]) Man vergl. WATSON, [12], 395, Formel (1).

LITERATURVERZEICHNIS.

E. W. BARNES.

[1] The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series [Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), 59—116].

H. BATEMAN.

[2] The solution of linear differential equations by means of definite integrals [Trans. Cambridge Phil. Soc. 21 (1912), 171—196].

S. BOCHNER.

[3] Vorlesungen über Fouriersche Integrale (1932).