COMPOSITIO MATHEMATICA

FOUAD ELZEIN

Résidus en géométrie algébrique

Compositio Mathematica, tome 23, nº 4 (1971), p. 379-405

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_4_379_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 4, 1971, pag. 379–405
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

RESIDUS EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE [1]

par

Fouad Elzein

5th Nordic Summer-School in Mathematics
Oslo, August 5–25, 1970

Table des matières

Notations

Les anneaux considérés sont commutatifs à élément unité.

Si $k \subset K$ est une extension de corps, $\mathrm{tr}_k K$ est le degré de transcendance de K sur k.

Un anneau de valuation R_v de K admet K pour corps des fractions. Si R_v contient k, $\kappa(R_v)$ est le corps résiduel de R_v et $\dim_k R_v = \mathrm{tr}_k \kappa(R_v)$ est la dimension de R_v; $\mathrm{tr}_k(R_v) = \mathrm{tr}_k K$. Le rang de R_v est le cardinal des idéaux premiers de R_v, non nuls. La valuation v est discrète si elle est à valeurs dans Z^l où $l \in N$.

Si X est un préschéma, O_X est son faisceau structural, $\Gamma(X, O_X)$ ses sections sur X. Si X est intègre, K_X est son corps des fractions rationnelles. Si $f: X \to Y$ est un morphisme de préschémas, $f^*: O_Y \to f_*(O_X)$ est le morphisme correspondant. L'adhérence de $x \in X$ est notée $\bar{x}$. Enfin, dans une somme Σ l'indice sous chapeau : $\wedge$ n'intervient pas.

[1] Thèse présentée à la faculté des Sciences de Nice pour obtenir le diplôme de Docteur de Spécialité (3ième cycle). Ce travail a été subventionné par le Conseil National de Recherches Scientifiques Libanais.

A mes Professeurs

Tous les élèves de Monsieur le Professeur A. Douady connaissent l'intérêt qu'il s'efforce de susciter en eux pour la recherche mathématique. Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, pour ses conseils, et surtout pour l'intéressant problème qu'il m'a posé.

Ma plus profonde reconnaissance va à Monsieur C. Houzel pour l'aide efficace qu'il m'a apportée dans la direction de mon travail. Je voudrais plus particulièrement le remercier pour les idées qu'il m'a suggérées dans les nombreuses discussions que nous avons eues. Par ses connaissances et son savoir, il m'a permis de mieux comprendre les problèmes mathématiques que j'ai rencontrés.

Je remercie également Messieurs J. Dieudonné, A. Martineau et J. Frisch, qui, par leur présence et la qualité de leur enseignement, ont largement contribué à développer la recherche mathématique à Nice.

Ma reconnaissance va en outre à Monsieur le Professeur F. Oort qui m'a encouragé à exposer ce travail au Séminaire du: '5$^{\text{th}}$ Nordic Summer School, 1970' à Oslo, et à M. Laudal l'un des organisateurs de ce séminaire.

Introduction

Le but de ce travail est de traiter le problème du calcul des Résidus en Géométrie algébrique.

Leray dans [4] a défini le Résidu en Géométrie analytique ainsi:

THÉORÈME 1. *Soit X une variété analytique complexe et S une sous-variété analytique complexe de X de codim* 1. *Pour tout $x \in X$, soit l_x une équation de S au voisinage de x, faisant partie d'un système de coordonnées locales. Une forme $\omega \in \Gamma(X-S, \Omega^i_{X/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C})$ de degré i à coefficients numériques complexes indéfiniment dérivables (resp. $\omega \in \Gamma(X-S, \Omega^i_{X/\boldsymbol{C}})$ holomorphe de degré i) a une singularité d'ordre* 1 *en x si et seulement si $l_x \omega$ est régulière au voisinage de x.*

Alors si on suppose une telle forme ω fermée, il existe des formes φ et Ψ régulières au voisinage de x (resp. holomorphes), tel que, au voisinage U de x : $\omega/U = (dl/l) \wedge \Psi + \varphi$. La restriction de Ψ à $S \cap U$:

$$\Psi/S \cap U \in [\Omega^{i-1}_{S \cap U/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}] \quad (resp.\ \Psi/S \cap U \in \Omega^{i-1}_{S \cap U/\boldsymbol{C}})$$

ne dépend que de ω, c'est le résidu de Ψ au voisinage de x.

THÉORÈME 2: *Une forme ω indéfiniment dérivable sur $X-S$, fermée, est cohomologue dans $H^*(X, \boldsymbol{C})$ à des formes fermées ayant sur S une singularité d'ordre* 1. *L'ensemble de leurs formes résidus est une classe de cohomologie dans $H^*(S, \boldsymbol{C})$ qui ne dépend que de ω.*

Note: Le théorème 2 est faux si on se restreint aux formes holomorphes au lieu des formes indéfiniment différentiables.

Grothendieck dans [3] a défini le symbole suivant:
Soit $f: X \to Y$ un morphisme lisse de schémas de dimension relative n. Soit $t_1, \cdots, t_n \in \Gamma(X, O_X)$ des fonctions telles que le sous-schéma Z défini par l'idéal $I = (t_1, \cdots, t_n)$ soit fini sur Y. Alors pour tout $\omega \in \Gamma(X, \Omega^n_{X/Y})$ on définit le symbole Rés $[t_1, \cdot \overset{\omega}{\cdot} \cdot, t_n] \in \Gamma(Y, O_Y)$. Enfin Tate a traité le problème des Résidus sur une courbe par des méthodes nouvelles inspirées par le résidu de Grothendieck, voir [7].

Ce travail consiste essentiellement en une définition du résidu sur un préschéma X au-dessus d'un préschéma Y, en un sous-préschéma S, qui approche le Résidu de Leray quand il est défini si X est une variété algébrique au-dessus de $\boldsymbol{C}$, et le Résidu de Grothendieck dans des conditions de définition communes.

– Le § 1 contient des préliminaires destinés à faire mieux comprendre les 2 aspects algébriques et géométriques du problème.

– Au § 2 on trouve au n° 0 les définitions algébriques du Résidu, qu'on développe au n° 2 et n° 3 en langage des schémas avec diverses généralisations en caractéristique 0.

– En application, on constate au § 3 que le théorème des Résidus est vrai dans le cas relatif d'un morphisme de dimension relative 1, à fibres régulières complètes.

Le lecteur remarquera le désir de définir le Résidu comme un morphisme de complexes des faisceaux de formes différentielles.

Il est encore souhaitable de trouver une définition unique du Résidu qui s'applique aux différents cas rencontrés ici, et surtout d'étudier la régularité du Résidu, ce qui permettrait probablement d'obtenir un morphisme de degré -1, de la cohomologie de De Rham de $X - S$, à valeurs dans la cohomologie de De Rham de S, à condition que S soit assez régulier.

1. Préliminaires

1. Relations entre les sous-préschémas fermés intègres d'un préschéma X intègre de point générique P, et les anneaux de valuation du corps $k(P)$.

DÉFINITIONS. *Soit X un préschéma intègre de point générique P:*

i) *Une suite de spécialisation de X est une suite de points $(x_0, \cdots, x_i \cdots)_{i \in \boldsymbol{N}}$ de X tel que, pour tout indice i, le point $x_{i+1} \in (\overline{x_i})$ et $x_i \neq x_{i+1}$. Une telle suite est de longueur n si elle s'arrête à l'indice n; alors on dit qu'elle est au-dessus de x_n.*

ii) *Une suite de spécialisation $(x_0, \cdots, x_i \cdots)$ de X est maximale (resp.*

normale) si pour tout $i \in N$, *codim* $(\overline{x_{i+1}}, \overline{x_i}) = 1$ *et* $x_0 = P$ *(resp.* $O_{(\overline{x_i}), x_{i+1}}$ *est intégralement clos).*

DÉFINITION. Si Y est une partie fermée irréductible d'un préschéma X, de point générique y, on note $O_{X,Y}$ l'anneau local de Y dans X (ou de X le long de Y) égal à $O_{X,y}$.

PROPOSITION 1. *Soit X un préschéma localement noethérien, normal en un point x tel que codim* $((\bar{x}), X) = 1$, alors l'anneau local $O_{X,x}$ *est de valuation discrète de rang* 1. (EGA, N° 8, II, 7.1.5 *et* 7.1.6).

PROPOSITION 2. *Soit X un préschéma intègre, localement noethérien de point générique P et $(x_0, \cdots, x_l)$ une suite de spécialisation de X maximale et normale. Alors, il existe un seul anneau de valuation R_v de $k(P)$ dont le spectre est formé d'une suite de spécialisation $(z_0, z_1, \cdots z_l)$, et un morphisme f : Spec $(R_v) \to X$ tel que $f(z_i) = x_i$.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition est une variante du théorème démontré dans [6], volume II, p. 106. L'anneau local $O_{(\overline{x_h}), x_{h+1}}$ est de valuation discrète de $k(x_h)$, de rang 1, car codim $(\overline{x_{h+1}}, \overline{x_h}) = 1$; de plus $k(x_h)$ est isomorphe au corps résiduel de $O_{(\overline{x_{h+1}}), x_h}$. On a donc une chaîne de valuation au sens de [6]. Ce qui donne une construction explicite de l'anneau de valuation cherché.

PROPOSITION 3. *Soit k un corps et R_v un anneau de valuation contenant k de rang l, de degré de transcendance r sur k et de dimension $r-l$, donc le spectre de R_v se compose d'une suite de spécialisation $(z_0, \cdots, z_l)$ maximale et normale. Alors il existe un schéma X affine, intègre, de point générique x_0, de type fini sur k et un morphisme f : Spec $(R_v) \to X$ tel que $f(z_0) = x_0$, que la suite de spécialisation $(f(z_0), \cdots, f(z_l))$ de X soit maximale, normale, et que f^* induise un isomorphisme: $O_{\overline{f(z_i)}, f(z_{i+1})} \to O_{\overline{z_i}, z_{i+1}}$. Donc $O_{\overline{z_i}, z_{i+1}}$ est de valuation discrète de rang* 1.

DÉMONSTRATION. Pour tout $z_i \in$ Spec (R_v) le corps $k(z_i)$ est de type fini sur k([6], vol. II, p. 90, coroll.). La relation $r-l = \mathrm{tr}_k\, k(z) < \cdots < \mathrm{tr}_k k(z_0) = r$ implique que $\mathrm{tr}_k k(z_i) = r-i$. Soit $P_i : R_v \to k(z_i)$ la projection canonique. Il existe des éléments $x_l^1, \cdots, x_l^{r-l}$ de R_v, d'images algébriquement indépendants dans $k(z_l)$, comme la clôture intégrale dans $k(z_l)$ de l'algèbre engendrée par $P_l(x_l^1), \cdots, P_l(x_l^{r-l})$ est de type fini sur k, il existe $x_l'^1, \cdots, x_l'^{j_l}$ dans R_v qui engendrent avec $x_l^1 \cdots x_l^{r-l}$ une algèbre A_l tel que $P_l(A_l)$ soit intégralement close de corps des fractions $k(z_l)$. De même pour tout indice i on construit une k-algèbre $A_i \subset R_v$, contenant A_{i+1}, tel que $P_i(A_i)$ soit intégralement close de corps des fractions $k(z_i)$. On prend pour X le spectre de A_0. Les injections de A_0 dans R_v et de A_i dans A correspondent respectivement à des morphismes

$f : \operatorname{Spec}(R_v) \to X$ et $f_i : X \to \operatorname{Spec} A_i$, tel que par construction

$$O_{\overline{(f_i[f(z_i)])},\, f_i(f(z_{i+1}))} \subset O_{\overline{(f(z_i))},\, f(z_{i+1})} \subset O_{\overline{(z_i)},\, z_{i+1}}$$

le premier de ces anneaux étant de valuation discrète de rang 1, ces 3 anneaux sont égaux.

2. Singularités d'une forme différentielle méromorphe

2.1. *Rappels sur les formes différentielles relatives*

DÉFINITIONS. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas.*

i) *Soit $\Delta : X \to X \times_Y X$ et $\Delta^* : \Delta^{-1}(O_{X \times_Y X}) \to O_X$ le morphisme diagonal. Si on note $I = \ker \Delta^*$, les formes différentielles relatives de degré 1 sont les sections du faisceau $I/I^2 = \Omega^1_{X/Y}$.*

ii) *On appelle fibré tangent de X relativement à Y, le fibré vectoriel $T_{X/Y} = V(\Omega^1_{X/Y})$ associé au faisceau de O_X-modules quasi-cohérent $\Omega^1_{X/Y}$.* (EGA, IV, 16.5).

PROPRIÉTÉS. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas.*

i) *Si f est un morphisme de S préschémas, on lui associe fonctoriellement un morphisme $f^* : f^*(\Omega^1_{Y/S}) \to \Omega^1_{X/S}$.*

La suite $f^*(\Omega^1_{Y/S}) \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$ est exacte (correspondant dans le cas affine d'un morphisme $B \to C$ de A algèbres à la suite exacte $(C \otimes_B \Omega^1_{B/A}) \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0$).

ii) *$\Omega^1_{X/Y}$ est compatible avec tout changement de base $Y' \to Y$:*

Pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X \times Y' \arrow[l, "P"'] \arrow[d, "Y"] \\ Y & Y' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

on a $P^*[\Omega^1_{X/Y}] \simeq \Omega^1_{X \times_Y Y'/Y'}$

iii) *Si f est un morphisme lisse, $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de rang fini. Alors si Y est un préschéma régulier, X l'est aussi.*

REMARQUE. *Le morphisme $f : X \to Y$ se factorise en $\bar{f} : X \to \overline{f(X)}$ et $i : \overline{f(X)} \to Y$. D'après* i), *$\Omega^1_{\overline{f(X)}/Y} = 0$ entraîne $\Omega^1_{X/\overline{f(X)}} \simeq \Omega^1_{X/Y}$.*

Pour tout O_X-module F sur un préschéma X, on définit le faisceau $\bigwedge^n_{O_X} F$ comme étant le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert $U \subset X$ fait correspondre $\bigwedge^n_{\Gamma(U, O_X)} \Gamma(U, F)$.

DÉFINITION. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas.*

i) *Le complexe $\Omega^*_{X/Y}$ des formes différentielles sur X relatives à Y est la suite des $\Omega^n_{X/Y} = \bigwedge^n_{O_X} \Omega^1_{X/Y}$ munie de la différentielle extérieure.*

ii) *Si X est intègre de point générique P, on note K_X le faisceau constant des fonctions méromorphes, de fibre $k(P)$. Les formes différentielles méromorphes de X de degré n sont les sections du faisceau constant*

$$K_X(\Omega^n_{X/Y}) = K_X \underset{O_X}{\otimes} \Omega^n_{X/Y} \simeq K_X \underset{O_X}{\otimes} \Omega^n_{X/\overline{f(X)}}$$

$$\simeq \Omega^n_{K_X/K_{\overline{f(X)}}} \; de\,fibre \; \Omega^n_{k(p)/k(f(p))}.$$

Pour plus de détail voir EGA, IV, 16.3.

2.2. Définitions. *Soit $f: X \to Y$ un morphisme de préschémas. Supposons X intègre et soit $\varphi : \Omega^n_{X/Y} \to K_X(\Omega^n_{X/Y})$ le morphisme canonique.*

i) *Une forme $\omega \in K_X(\Omega^n_{X/Y})$ est définie en un point $x \in X$ si $\omega \in \varphi(\Omega^n_{O_{X,x}/O_{Y,f(x)}})$.*

ii) *Si φ est injectif, on appelle idéal des dénominateurs de ω l'annulateur $I_\omega \subset O_X$ de la section $\bar{\omega}$ image de ω dans $K_X(\Omega^n_{X/Y})/\varphi(\Omega^n_{X/Y})$.*

Proposition. *Dans les conditions* ii) *de la définition précédente.*

i) *L'idéal I_ω est quasi-cohérent et définit le sous-préschéma fermé S_ω des singularités de la forme ω, complémentaire du domaine de définition de ω.*

ii) *Si de plus $f: X \to Y$ est lisse et X est régulier, l'idéal I_ω est à fibres principales (i.e., S_ω est une hypersurface).*

La démonstration de i) est dans (EGA, IV, 20.2.14). Avant de démontrer ii) on établit:

Lemme. *Soit X un préschéma localement factoriel (i.e. pour tout $x \in X$ l'anneau $O_{X,x}$ est factoriel). Soit x un point de X, un voisinage ouvert U de x, et $g \in \Gamma(U, O_X)$. Alors, le germe g_x est irréductible dans $O_{X,x}$ si et seulement si x appartient à 1 seule composante irréductible du sous-préschéma $V(g)$ de U défini par l'idéal (g) et $V(g)$ est réduit en x.*

Ce lemme est évident à partir des 2 remarques suivantes:

1) Un élément irréductible d'un anneau factoriel engendre un idéal premier.

2) Un point z d'un préschéma Z appartient à 1 seule composante irréductible de Z si et seulement si le nilidéal de $O_{Z,z}$ est premier.

Corollaires. 1) *L'ensemble des points x de $V(g)$ tel que g_x soit irréductible est ouvert dans $V(g)$.*

2) *Soit W un ouvert de X et $g \in \Gamma(W, O_X)$. Si $V(g) \subset W$ est irréductible et si pour tout $x \in V(g)$ le germe g_x est irréductible, alors $g \in \Gamma(W, O_X)$ est irréductible.*

3) *Soit $x \in X$ et $g_x = a_x s_{1,x} \cdots s_{i,x} \cdots s_{n,x}$ une décomposition de g_x dans $O_{X,x}$ en un élément inversible a_x et des éléments irréductibles $s_{i,x}$, alors les $V(s_i)$ sont les composantes irréductibles de $V(g)$ passant par x.*

4) *Supposons X localement intègre et soit $x \in X$. Une fraction rationnelle f/g sous forme réduite en x est nécessairement sous forme réduite au voisinage de x.*

Suite de la démonstration: Pour tout $x \in X$ l'anneau $O_{X,x}$ est factoriel et il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\Omega^1_{U/Y}$ soit libre de base $dt_1 \cdots dt_m$; on peut mettre la restriction de ω à U sous la forme

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_n} \frac{f_{i_1 \cdots i_n}}{g_{i_1 \cdots i_n}} dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_n}$$

tel que les germes des fractions $(f_{i_1 \cdots i_n})/(g_{i_1 \cdots i_n})$ soient sous forme réduite en tout point de U (restreindre U au besoin). Alors le produit des éléments irréductibles intervenant avec leur plus haut exposant dans la décomposition des $g_{i_1 \cdots i_n}$ en un point y de U, engendre I_ω au voisinage de y.

Corollaire. *Soit $f: X \to Y$ et F un sous-préschéma fermé de X. Si on suppose f lisse, X localement noethérien et régulier et F de codimension $\geqq 2$ dans X, alors pour tout entier P on a $\Gamma(X-F, \Omega^p_{X/Y}) = \Gamma(X, \Omega^p_{X/Y})$.*

3. Le morphisme Trace ou le Résidu en dimension relative 0

3.1. Lemme. *Soit $f: X \to Y$ un morphisme dominant, localement de type fini, entre 2 préschémas intègres de points génériques $x \in X$ et $y = f(x) \in Y$. Si on suppose $k(x)$ algébrique sur $k(y)$, alors pour tout fermé irréductible $F \subsetneqq X$, on a $\overline{f(F)} \neq Y$.*

Démonstration. Soit x' le point générique de F et supposons $f(x') = y$. Alors $k(x')$ et $k(x)$ sont des extensions algébriques finies de $k(y)$. On a:

$$\mathrm{tr}_{k(y)} O_{X,x'} = \mathrm{tr}_{k(y)} k(x) = \mathrm{tr}_{k(y)} k(x') = \mathrm{tr}_{k(y)} O_{X,x'}/m_{x'};$$

ce qui implique que la projection canonique: $O_{X,x'} \to k(x')$ est un isomorphisme ([6] vol. I. ch. II, § 12, th. 29); et par conséquent $x' = x$ absurde.

Proposition. *Soit $f: X \to Y$ un morphisme dominant, de type fini, entre 2 préschémas localement noethériens, intègres, de points génériques $x \in X$ et $y \in Y$. On suppose $k(x)$ algébrique (donc une extension finie) sur $k(y)$.*

i) *Il existe un ouvert $V \subset Y$ d'algèbre B tel que $f^{-1}(V) \subset X$ soit affine d'algèbre A libre et finie sur B.*

ii) *Si de plus, $k(x)$ est séparable sur $k(y)$, on peut supposer A de la forme $B[u]$.*

Démonstration. Soit V_0 un ouvert affine de Y et U_0 un ouvert affine dans $f^{-1}(V_0)$, $\complement_{f^{-1}\{V_0\}} U_0$ est une réunion finie de fermés irréductibles qui ne dominent pas V_0. Donc il existe un ouvert affine $V \subset V_0$ d'algèbre B tel que $f^{-1}(V) \subset U_0$ soit affine d'algèbre A de type fini sur B.

Si $\omega_1, \cdots, \omega_n$ forment une base de $k(x)$ sur $k(y)$, on peut restreindre V pour que A soit un module libre de base $\omega_1, \cdots, \omega_n$, sur B.

Si $k(x)$ est séparable sur $k(y)$, il existe un élément $u \in k(x)$ tel que $k(x) = k(y)[u]$, alors on peut restreindre V pour avoir $A = B[u]$.

COROLLAIRES. *Sous les conditions de la proposition, avec l'hypothèse de séparabilité.*

1) *Il existe un ouvert $V \subset Y$ non vide tel que $f/f^{-1}(V) : f^{-1}(V) \to V$ soit un revêtement étale.*

2) *Si X et Y sont au-dessus d'un préschéma S, il existe un ouvert $V \subset Y$ non vide tel que*

$$[f/f_{(V)}^{-1}]^*(\Omega^1_{V/S}) \simeq \Omega^1_{f^{-1}(V)/S}.$$

On a,

$$f^* : K_X \underset{K_Y}{\otimes} K_Y(\Omega^1_{Y/S}) \simeq K_X(\Omega^1_{X/S}).$$

DÉMONSTRATION. Il existe un ouvert $U \subset X$ non vide tel que f restreint à U soit étale; voir (EGA IV 18.4.1 et 18.4.2); d'après le lemme on peut supposer $U = f^{-1}(V)$ où V est ouvert dans Y. Ce qui démontre la 1ère partie, la 2ème devient alors évidente.

3.2. DÉFINITION. *Soit k un corps, K_Y une extension de k et K_X une extension séparable, finie de K_Y. La multiplication par un élément a dans K_X définit un endomorphisme K_Y-linéaire $\tilde{a}$. On définit la trace* $\mathrm{tr}^0 : K_X \to K_Y$ *par* $\mathrm{tr}^0(a) = \text{trace}\,(\tilde{a})$ *et* $\mathrm{tr}^p : \Omega^p_{K_X/k} \to \Omega^p_{K_Y/k}$ *comme le composé des morphismes suivants*:

$$\Omega^p_{K_X/k} \simeq K_X \underset{K_Y}{\otimes} \Omega^p_{K_Y/k} \xrightarrow{\mathrm{tr}^0 \otimes \mathrm{id}} K_Y \underset{K_Y}{\otimes} \Omega^p_{K_Y/k} \simeq \Omega^p_{K_Y/k}.$$

Si K_X est inséparable sur K_Y le morphisme tr^p *est nul.*

REMARQUE. *Avec les notations de la proposition précédente, si $a \in K_X$ est entier sur B, alors* $\mathrm{tr}^0(a)$ *est entier sur B dans K_Y. Si B est intégralement clos,* tr^p *induit un morphisme de $\Omega^p_{A/k}$ dans $\Omega^p_{B/k}$ (on suppose A et B des k-algèbres). Pour plus de détail, voir* (EGA IV. 18.2).

Interprétation géométrique du morphisme Trace.

Soit $f: X \to Y$ un morphisme entre 2 variétés algébriques intègres au-dessus d'un corps k algébriquement clos, tel que K_X soit une extension séparable de K_Y de degré n.

Soit $a \in K_X$, il existe un ouvert $V \subset Y$ non vide tel que $\mathrm{Tr}^0(a)$ soit régulier sur V et a soit régulier sur $f^{-1}(V)$. Alors, en tout point $y \in V$ tel que $f^{-1}(y)$ se compose de n points distincts:

$$[\mathrm{Tr}^0(a)](y) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} a(x_i).$$

De même si on suppose V tel que pour tout $x \in f^{-1}(V)$ le morphisme tangent $T_x f : T_x X \xrightarrow{\sim} T_{f(x)} Y$ soit un isomorphisme et si

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} d[f^*(l_{i_1})] \wedge \cdots \wedge d[f^*(l_{i_p})] \in \Omega^p_{f^{-1}(V)/k}$$

où on suppose $\Omega^1_{V/k}$ libre de base (dl_i) pour $i \in [1 \cdots m]$; alors on a:

$$\mathrm{Tr}^p(\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{Tr}^0(a_{i_1 \cdots i_p}) dl_{i_1} \Lambda \cdots \Lambda dl_{i_p},$$

c'est-à-dire

$$[\mathrm{Tr}^p \omega](y) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y)} \omega(x_i) \circ (T_{x_i} f)^{-1}.$$

2. Résidus

0. Résidus en algèbre

0.0. HYPOTHÈSE. *Dans tout ce numéro, on considère un corps K, un anneau C et un anneau R_v de valuation discrète dans K, de rang* 1, *muni d'une structure de C-algèbre. On désigne par $k = \kappa(R_v)$ le corps résiduel de R_v, par m_v l'idéal maximal de R_v et par $p : R_v \to (R_v/m_v) \cong k$ la projection canonique. Enfin on suppose qu'il existe un morphisme de C-algèbres $i : k \to R_v$ tel que $P \circ i = id_k$, on identifiera souvent k et $i(k)$.*

L'anneau R_v s'injecte dans un anneau de séries formelles à une indéterminée:

D'après un théorème de Krull $\bigcap_{n \in N} m_v^n = 0$ ([6], vol. II, th. 9, p. 262). Donc R_v s'injecte dans son complété pour la topologie m_v adique. Comme le complété contient son corps résiduel k, il est isomorphe à un anneau $k[[l]]$ où l est une uniformisante ([6], vol. II, corol. p. 307). Cette injection se prolonge en une extension : $K \to k((l))$.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on note * le morphisme k-linéaire de K dans $k((l))$ tel que pour tout $f \in K$: $*^n(f) = f^{*^n}$ soit le coefficient de l^n dans le développement de f en série formelle. Si $f, g \in K$, on a $(fg)^{*^n} = \sum_{P \in \mathbf{Z}} f^{*^P} g^{*^{n-P}}$, la somme étant toujours finie.

REMARQUE. $*$ est défini par $(f - \sum_{h=1}^{q} i(f^{*^h}) l^h) \in (l^{q+1})$, et dépend de i.

0.1. *Le morphisme Résidu en R_v de $\Omega^1_{K/C}$ dans k.*

On rappelle le:

THÉORÈME SUIVANT (*Tate*). *Soit k un corps, K une k-algèbre, V un K-module et A un k sous-espace vectoriel de V tel que pour tout $f \in K$: $(fA + A)/A$ soit de dimension finie sur k. Soit E_1 (resp. E_2) $= \{\Theta \in \mathrm{End}_k(V)$:*

$(\Theta(V)+A)/A$, (*resp*: $\Theta(A)$), *soit de dimension finie sur* k. *Il existe alors une seule application* k*-linéaire* $\text{Rés}_A^V : \Omega^1_{K/k} \to k$ *tel que pour tout* $f, g \in K$, $\text{Rés}_A^V(f, dg) = \text{Tr}\,[f_1, g_1]$ *où* $[f_1, g_1] = f_1 \circ g_1 - g_1 \circ f_1$ *quel que soit* $f_1, g_1 \in \text{End}_K(V)$ *vérifiant les conditions suivantes*:

1) $f \equiv f_1 (\text{mod}\, E_2)$ *et* $g \equiv g_1 (\text{mod}\, E_2)$. 2) *Soit* $f_1 \in E_1$, *soit* $g_1 \in E_1$.[3]

Il existe donc un morphisme $\text{rés}^K_{R_v} : \Omega^1_{K/k} \to k$. Soit q la projection de $\Omega^1_{K/C}$ sur $\Omega^1_{K/k} \simeq \Omega^1_{K/C}/[K \otimes_k \Omega^1_{k/C}]$.

DÉFINITION. *Sous l'hypothèse* 0.0, *et avec les notations précédentes, le morphisme Résidu sur* $\Omega^1_{K/C}$ *est*: $\text{Rés}^K_{R_v} = \text{rés}^K_{R_v} \circ q : \Omega^1_{K/C} \to \Omega^1_{K/k} \to k$. Noter que le Résidu $\text{Rés}^K_{R_v}$ s'annule sur $K \otimes_k \Omega^1_{k/C}$.

0.2. *Extension de la définition du Résidu au complexe* $\Omega^*_{K/C}$.

La différentielle $d : \Omega^n_{K/C} \to \Omega^{n+1}_{K/C}$ est définie par $d(fdg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_n) = df \Lambda dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_n$, d est C linéaire, $d \circ d = 0$ et si $\alpha \in \Omega^n_{K/C}$, $\beta \in \Omega^m_{K/C} \cdots$, $d(\alpha \Lambda \beta) = [d\alpha]\Lambda\beta + (-1)^n \alpha \Lambda d\beta$.

THÉORÈME 1. *Sous l'hypothèse* 0.0, *il existe un seul morphisme Résidu en* $R_v : R^K_{R_v}$ (*ou* R *simplement*) : $\Omega^*_{K/C} \to \Omega^*_{k/C}$, *tel que pour toute uniformisante* u *de* R_v, *et pour tout* $f, (g_i)_{i=1 \cdots p} \in K$:

$$R(f\, dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p) = \sum_{i \in [1,\, p]} (-1)^{i-1} \times \sum_{n_1 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p \in \mathbf{Z}^{p-1}} [R(f u^{(n_1 + \cdots \hat{\imath} + \cdots + n_p)} dg_i)] dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p}$$

g^{*^n} *est le coefficient de* u^n *dans le développement de* g *dans* $K((u))$. $R(fu^{(n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} dg_i)$ *est le résidu* $\text{Rés}^K_{R_v}$ *d'une forme de degré* 1.

DÉMONSTRATION. On écrit d'abord R_u, puis on démontre que R_u ne dépend pas de u. Soit $R_u : (K \times K)^p \to \Omega^{p-1}_{K/C}$ tel que

$$R_u((f_1, g_1), \cdots, (f_p, g_p)) = \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \times \sum_{n_1 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p \in \mathbf{Z}^{p-1}} [R((f_1 \cdots f_p) u^{(n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} dg_i)] dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda_e dg_p^{*n_p}$$

C'est une somme finie, en effet si n_j est assez petit pour un certain j, alors $g_j^{*n_j} = 0$, et si $n_1 + \cdots \hat{\imath} + \cdots + n_p$ est assez grand

$$R((f_1 \cdots f_p) u^{(n_1 + \cdots \hat{\imath} + \cdots n_p)} dg_i) = 0.$$

Etant C-multilinéaire, l'application R_u induit un morphisme sur $(K \otimes_C K)^p$. Soit H_j le C-module engendré par les éléments: $(f_j \otimes k_j h_j - f_j k_j \otimes h_j - f_j h_j \otimes k_j)$ dans $(K \otimes K)_j$, pour un indice $j \in [1 \cdots P]$.

[3] $[f_1, g_1]$ est un morphisme fini-potent et sa trace est définie dans V, voir [7].

Le morphisme R_u *s'annule sur*

$$\prod_{l=1}^{j-1}(K \underset{C}{\otimes} K)_l \times H_j \times \prod_{l=j+1}^{p}(K \underset{C}{\otimes} K)_l :$$

Soit $f = f_1 \times \cdots \times f_p$, en développant $d(k_j h_j)^{*n_j}$ en $\sum_{q \in \mathbf{Z}}(k_j^{*(n_j-q)}) dh_j^{*q} + h_j^{*q} dk_j^{*(n_j-q)})$ et en utilisant la k-linéarité du résidu d'une forme de degré 1; on a (voir page suivante).

On a vérifié ainsi que R_u est défini sur $[\Omega^1_{K/C}]^p$.

Il reste à voir que R_u *est bien défini sur* $\Omega^p_{K/C}$: on remarque tout d'abord que R_u passe sur $\otimes^p_K \Omega^1_{K/C}$. Si pour $\omega = f_1 dg_1 \otimes \cdots \otimes f_p dg_p \in \otimes^p_K \Omega^1_{K/C}$, $g_i = g_j$ et $f_i = f_j$ pour 2 indices distincts, alors dans $R_u(\omega)$, les termes suivants sont nuls:

$$\begin{aligned}&[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{h}+\cdots n_p} dg_h)] dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{h} \cdots dg_i^{*n_i} \cdots dg_j^{*n_j} \cdots dg_p^{*n_p}\\ &+[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{h}+\cdots+n_p)} dg_h)] dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{h} \cdots dg_i^{*n_j} \cdots dg_j^{*n_i} \cdots dg_p^{*n_p},\end{aligned}$$

et $R_u(\omega)$ est nul.

Finalement, on obtient un morphisme R_u sur $\Omega^p_{K/C}$, k linéaire et nul sur $\mathrm{Im}\,(K \otimes_k \Omega^p_{k/C})$.

L'indépendance du Résidu de l'uniformisante.

LEMME 1: *Soit* u_0 *une uniformisante de* R_v *et* $\overline{du_0} : K \otimes_k \Omega^{p-1}_{k/C} \to \Omega^p_{K/C}$ *le morphisme défini par* $\overline{du_0}(\omega) = du_0 \Lambda \varphi(\omega)$ *où* $\varphi : K \otimes_k \Omega^{p-1}_{K/C} \to \Omega^{p-1}_{K/C}$ *est induit par l'injection de k dans K. On a*

$$\Omega^p_{K/C} = \mathrm{Im}\,(K \underset{k}{\otimes} \Omega^p_{k/C}) + \mathrm{Im}\,((1/u_0 \times R_v) \underset{R_v}{\otimes} \Omega^p_{R_v/C}) + du_j(K \underset{k}{\otimes} \Omega^{p-1}_{k/C})$$

où Im *désigne l'image dans* $\Omega^p_{K/C}$.

Le module $1/u_0 \times R_v$, image dans K de R_v par la multiplication par $1/u_0$, est indépendant du choix de u_0. Soit $\omega = f dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p \in \Omega^p_{K/C}$, si on remplace f par $\sum_{h \in \mathbf{Z}} f^{*h} u_0^h$, g_j par $\sum_{-\infty < < h < n} g_j^{*h} u_0^h + g_{j,n}$ avec f^{*h}, $g_j^{*h} \in k$ et $g_{j,n} \in m_v^n$, la forme ω s'écrit comme somme de termes des 3 types suivants:

1) Les termes contenant un $dg_{j,n}$ appartiennent à $\mathrm{Im}\,((1/u_0 \times R_v) \otimes_{R_v} \Omega^p_{R_v/C})$ pour n assez grand.

2) Des termes dans $\mathrm{Im}\,(K \otimes_k \Omega^p_{k/C})$

3) Des termes du type

$$a_{n_{j_1} \cdots n_{j_{p-1}}} u_0^h du_0 \Lambda dg_{j_1}^{*n_{j_1}} \Lambda \cdots \Lambda dg_{j_{p-1}}^{*n_{j_{p-1}}} \in \overline{du_0}(K \underset{k}{\otimes} \Omega^{p-1}_{k/C});\ a_{n_{j_1} \cdots n_{j_{p-1}}} \in K.$$

LEMME 2: *Le Résidu* R_u *qui est nul sur* $\mathrm{Im}\,(K \otimes_k \Omega^p_{k/C})$ *est indépendant de l'uniformisante u, sur*

$$R_u(\cdots,f_j\otimes k_j h_j,\cdots)-R_u(\cdots,f_j k_j\otimes h_j,\cdots)-R_u(\cdots,f_j h_j\otimes k_j,\cdots)=$$

$$= 0\{(-1)^{j-1}\sum_{n_1\cdots\hat{\jmath}\cdots,n_p\in\mathbf{Z}^{p-1}}\begin{bmatrix}[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{\jmath}\cdots+n_p)}d(k_jh_j))]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\jmath}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\\ -[R(fk_ju^{(n_1+\cdots\hat{\jmath}\cdots+n_p)}dh_j)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\jmath}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\\ -[R(fh_ju^{(n_1+\cdots\hat{\jmath}+\cdots n_p}dk_j)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\jmath}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\end{bmatrix}$$

$$+\sum_{i\in[1\cdots\hat{\jmath}-p]}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{n_1\cdots\hat{\imath}\cdots,n_p\\ \in\mathbf{Z}^{p-1}}}\begin{bmatrix}\sum_{q\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots+n_p)}h_j^{*(n_j-q)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots\wedge dk_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\\ +[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots+n_p)}k_j^{*n_j-q}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dh_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*np}\end{bmatrix}\\ -[R(fh_ju^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots+n_p)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dk_j^{*n_j}\wedge\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\\ -[R(fk_ju^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots+n_p)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dh_j^{*n_j}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\end{bmatrix}$$

(posant $n_j = q+s$)

$$=\sum_{i\in[1\hat{\jmath}p]}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{n_1\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots n_p\\ \in\mathbf{Z}^{p-2}}}\sum_{q\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(\sum_{s\in\mathbf{Z}}[R(fh_j^{*s}u^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots n_p+q)}u^sdg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dk_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p})\\ -[R(fh_ju^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots n_p+q)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dk_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\end{bmatrix}\\ +\\ \begin{bmatrix}\sum_{s\in\mathbf{Z}}[R(fk_j^{*s}u^su^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots+n_p+q)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dh_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p})\\ -[R(fk_ju^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots n_p+q)}dg_i)]dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dh_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i\in[1\cdots\hat{\jmath}\cdots p]}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{n_1\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots n_p\\ \in\mathbf{Z}^{p-2}}}\sum_{q\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}[R(fu^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots+n_p+q)}((\sum_{s\in\mathbf{Z}}h_j^{*s}u^s)-h_j)dg_i)]\\ [R(fu^{(n_1+\cdots\hat{\imath}\cdots\hat{\jmath}\cdots+n_p+q)}((\sum_{s\in\mathbf{Z}}k_j^{*s}u^s)-k_j)dg_1)]\end{matrix}}_{\text{forme régulière}}\begin{matrix}dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dk_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\\ dg_1^{*n_1}\wedge\cdots\hat{\imath}\cdots dh_j^{*q}\cdots\wedge dg_p^{*n_p}\end{matrix}\end{bmatrix}$$

$$= 0.$$

$$\operatorname{Im}\{(1/u_0 \times R_v) \underset{R_v}{\otimes} \Omega^p_{R_v/C}\} + \overline{du_0}(K \underset{k}{\otimes} \Omega^{p-1}_{k/C}).$$

Si $\omega = fdg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p \in \operatorname{Im}((1/u_0 \times R_v) \otimes_{R_v} \Omega^p_{R_v/C})$,

$$R_u(\omega) = \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} R(f\, dg_i) dg_1^{*0} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots dg_p^{*0},$$

les autres termes étant nuls. Or pour tout $g \in R_v$, le coefficient $g^{*0} = P(g)$ est indépendant du choix de u. Si $\omega = fdu_0 \Lambda db_1 \Lambda \cdots \Lambda db_{p-1} \in du_0$ $(K \otimes_k \Omega^{p-1}_{k/C})$ où $b_j \in k$ pour $j \in [1, \cdots, (p-1)]$.

Le résidu $R_u(\omega) = R(fdu_0) db_1 \Lambda \cdots \Lambda db_{p-1}$ est indépendant de u, les autres termes étant nuls.

Fin de la démonstration du Th. 1.

Corollaire 1. *Le résidu R s'annule sur $\Omega^p_{R_v/C}$ et si $f = \sum_{h \in \mathbf{Z}} f^{*h} u^h$, $g_j = \sum_{h \in \mathbf{Z}} g_j^{*h} u^h$ pour f, $g_j \in k$ et $j \in [1 \cdots p]$, on a (calcul pratique du Résidu)*,

$$R(f\, dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p) = \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1}$$
$$\times \sum_{n_1 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p} \Big(\sum_{h + h_i = -(n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} h_i g_i^{*h_i} f^{*h} \Big) dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p}$$

Corollaire 2. *Supposons qu'il existe $n+1$ éléments $(u, (u_j)_{j=1 \cdots n})$ vérifiant les conditions suivantes*: 1) *l'élément u est une uniformisante de R_v*, 2) *pour tout $j \in [1 \cdots n]$, $u_j = i \circ p(u_j)$ et du, $(du_j)_{j \in [1 \cdots n]}$ forment une base de $\Omega^1_{R_v/C}$ alors si*

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1}} \Big(\sum_{i \in \mathbf{Z}} f^{*i}_{i_1 \cdots i_{p-1}} u^i \Big) du \Lambda du_{i_1} \Lambda \cdots \Lambda du_{i_{p-1}} + \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p} du_{i_1} \Lambda \cdots \Lambda du_{i_p}$$

$$R(\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1}} f^{*-1}_{i_1 \cdots i_{p-1}} du^{*0}_{i_1} \Lambda \cdots \Lambda du^{*0}_{i_{p-1}}$$

On retrouve ainsi le Résidu tel que J. Leray l'a défini pour une singularité d'ordre 1.

Remarque. Le complété de R_v (resp. K) est $\hat{R}_v = k[[l]]$ (resp. $\hat{K} \cong k((l))$), on peut calculer $\text{Rés}^K_{R_v} : \Omega^*_{k((l))/C} \to \Omega^*_{k/C}$.

0.3. *Propriétés du Résidu*

Proposition 4. *Sous l'hypothèse* 0-0, *soit d la différentielle de $\Omega^*_{K/C}$ et R le résidu. Alors on a*: $d \circ R + R \circ d = 0$

Soit $\omega = fdg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p \in \Omega^p_{K/C}$.

$$
\begin{aligned}
R \circ d(\omega) &= \sum_{n_1 \cdots n_p \in \mathbf{Z}^p} [R(u^{(n_1 + \cdots + n_p)} df)] dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \Lambda dg_p^{*n_p} \\
&+ \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \sum_{n_0 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p} [R(u^{(n_0 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} dg_i)] df^{*n_0} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p} \\
&= \sum_{n_1 \cdots n_p} -(n_1 + \cdots + n_p) f^{*-(n_1 + \cdots + n_p)} dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \Lambda dg_p^{*n_p} \\
&- \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \sum_{n_0 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p} \\
&\quad -(n_0 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p) g_i^{*-(n_0 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} df^{*n_0} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d \circ R(\omega) &= \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \\
&\quad \times \sum_{n_1 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p} \; \sum_{n_0 + n_i = -(n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} d(n_i g_i^{*n_i} f^{*n_0}) dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p} \\
&\quad = \underbrace{\sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \sum_{n_1 \cdots n_p} n_i f^{*-(n_1 + \cdots + n_p)} dg_i^{*n_i} \Lambda dg_1^{*n_1} \cdots \hat{\imath} \cdots dg_p^{*n_p}}_{(1)} \\
&\quad + \sum_{i \in [1 \cdots p]} (-1)^{i-1} \sum_{n_0 n_1 \cdots \hat{\imath} \cdots n_p} \\
&-(n_0 + n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p) g_i^{*-(n_0 + n_1 + \cdots \hat{\imath} \cdots + n_p)} df^{*n_0} \Lambda \cdots \hat{\imath} \cdots \Lambda dg_p^{*n_p}.
\end{aligned}
$$

Le terme (1) s'écrit

$$\sum_{n_1 \cdots n_p} (n_1 + \cdots + n_p) f^{*-(n_1 + \cdots + n_p)} dg_1^{*n_1} \Lambda \cdots \Lambda dg_p^{*n_p},$$

et la proposition devient claire.

PROPOSITION 5. *Sous l'hypothèse* 0.0, *on considère un corps* K', *un anneau de valuation discrète* R_v *de* K', *de rang* 1, *muni d'une structure de* C *algèbre, d'idéal* m_v, *et une injection de* C*-algèbres* $\varphi : R_v \to R_{v'}$. *On note* $P' : R_{v'} \to k' = \kappa(R_{v'})$ *la projection canonique. On suppose qu'il existe une injection de* C*-algèbres* $i' : k' \to R_{v'}$ *telle que* $P' \circ i' = id_{k'}$, *telle que les conditions suivantes soient vérifiées*:

1) $[\varphi(m_v)] R_{v'} = m_{v'}$
2) Le diagramme

$$
\begin{array}{ccc}
k' & \xrightarrow{i'} & R_{v'} \\
{\scriptstyle \varphi^0} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \varphi} \\
k & \xrightarrow[i]{} & R_v
\end{array}
$$

est commutatif (φ^0 *est induit par* φ).

Alors, si $\varphi_* : \Omega^*_{K/C} \to \Omega^*_{K'/C}$ (resp. $\varphi^0_* : \Omega^*_{k/C} \to \Omega^*_{k'/C}$) *correspond à* φ (resp. φ^0). *On a*: $\varphi^0_* \circ \text{Rés}^K_{R_v} = \text{Rés}^{K'}_{R_{v'}} \circ \varphi_*$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si $f = \sum_{h \in \mathbf{Z}} f^{*h} l^h \in K$, alors $\varphi(f) = \sum_{h \in \mathbf{Z}} \varphi_*(f^{*h})[\varphi(l)]^h$ où l est une uniformisante de R_v et $\varphi(l)$ en est une dans $R_{v'}$.

Dépendance de l'injection de k dans K en caractéristique 0 *de k.*

PROPOSITION 6. *Sous l'hypothèse* 0.0, *soit car* $(k) = 0$. *Considérons* 2 *injections* i *(resp.* i'*) de* k *dans* R_v *telles que* $P \circ i = P \circ i' = id_k$, *et les morphismes résidus correspondants* R_i *(resp.* $R_{i'}$*). Il existe alors une homotopie*

$$H_i^{i'} : \Omega^*_{K/C} \to \Omega^*_{K/C} \text{ telle que } R_i - R_{i'} = H_i^{i'} \circ d - d \circ H_i^{i'}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\delta : (K \times K)^p \to \Omega^{p-1}_{K/C}$ le morphisme défini comme suit:

$$\delta[(f_1, g_1), \cdots, (f_p, g_p)]$$
$$= \sum_{j \in [1 \cdots p]} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{n, n_1 \cdots n_p \in \mathbf{Z}^{p+1} \\ (n+n_1+\cdots+n_p)<0}} \frac{n_j}{(n+n_1+\cdots+n_p)} li(g_j^{*n_j})$$
$$\times i(f_1 \cdots f_p)^{*n} d(i(g_1^{*n_1})) \Lambda \cdots \hat{\jmath} \cdots d(i(g_p^{*n_p}))$$

où pour tout $a \in K$, a^{*n} désigne le coefficient de l^n dans le développement de a en série formelle à l'aide de l'injection i.

Une démonstration analogue à celle du théoréme 1, no 0.2 permet de vérifier que δ est bien défini sur $\Omega^p_{K/C}$. Il suffit de prendre alors

$$H_i^{i'} = (R_i - R_{i'}) \circ \delta.$$

En effet, soit $\omega = f dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p$, $d\omega = df \Lambda dg_1 \Lambda \cdots dg_p$.

$$\delta \circ d(\omega)$$
$$= \sum_{j \in [1 \cdots p]} (-1)^j \sum_{n+n_1 \cdots +n_p<0} \frac{n_j}{(n+n_1+\cdots+n_p)} l^{(n+n_1+\cdots+n_p)}$$
$$\times i(g_j^{*n_j}) di(f^{*n}) \Lambda di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots \hat{\jmath} \cdots di(g_p^{*n_p})$$
$$+ \sum_{(n+n_1+\cdots+n_p)<0} \frac{n}{n+n_1+\cdots+n_p} l^{(n+n_1+\cdots+n_p)}$$
$$\times i(f^{*n}) di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots di(g_p^{*n_p}).$$

$$d \circ \delta(\omega) = \sum_{j \in [1 \cdots p]} (-1)^{j-1}$$

$$\times \left[\begin{aligned} & \sum_{(n+n_1+\cdots+n_p)<0} n_j i(g_j^{*n_j}) \\ & \qquad \times i(f^{*n}) l^{(n+n_1+\cdots+n_p)-1} dl \Lambda di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots \hat{j} \cdots di(g_p^{*n_p}) \\ & + \sum_{(n+n_1+\cdots+n_p)<0} \frac{n_j}{(n+n_1+\cdots+n_p)} i(g_j^{*n_j}) \\ & \qquad \times l^{(n+n_1+\cdots+n_p)} di(f^{*n}) \Lambda di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots \hat{j} \cdots di(g_p^{*n_p}) \\ & + \sum_{(n+n_1+\cdots+n_p)<0} \frac{n_j}{(n+n_1+\cdots+n_p)} l^{(n+n_1+\cdots+n_p)} \\ & \qquad \times i(f^{*n}) di(g_j^{*n_j}) \Lambda di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots \hat{j} \cdots di(g_p^{*n_p}) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned} & \omega - (\delta \circ d + d \circ \delta)(\omega) = \\ & f dg_1 \Lambda \cdots \Lambda dg_p - \sum_{(n+n_1+\cdots+n_p)<0} l^{(n+n_1+\cdots+n_p)} i(f^{*n}) di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots di(g_p^{*n_p}) \\ & - \sum_{(n+n_1+\cdots n_p)<0} (-1)^{j-1} \\ & \qquad \times n_j i(f^{*n}) i(g_j^{*n_j}) l^{(n+n_1+\cdots+n_p)-1} dl \Lambda di(g_1^{*n_1}) \Lambda \cdots \hat{j} \cdots di(g_p^{*n_p}) \end{aligned}$$

et appartient donc à

$$\Omega^p_{R_v/C} + \frac{dl}{l} \Lambda \Omega^{p-1}_{R_v/C}$$

où le 2ème membre désigne l'image de $\Omega^{p-1}_{R_v/C}$ dans $\Omega^p_{K/C}$, par la multiplication extérieure par dl/l. On vérifie facilement que le résidu est indépendant de l'injection de k dans R_v sur l'espace: $(\Omega^p_{R_v/C} + dl/l \, \Lambda \Omega^{p-1}_{R_v/C})$, ce qui implique:

$$(R_i - R_{i'})[\omega - (\delta \circ d + d \circ \delta)(\omega)] = 0$$

et

$$(R_i - R_{i'})(\omega) = [(R_i - R_{i'}) \circ \delta \circ d - d \circ (R_i - R_{i'}) \circ \delta](\omega).$$

1. Calcul du résidu sur un préschéma

1.0. *Hypothèse*

Dans tout ce numéro, on considère un préschéma X localement noethérien, intègre de point générique P, un préschéma de base Y, un morphisme structural $f : X \to Y$ localement de type fini et enfin un sous-préschéma S fermé dans X, intègre, de point générique q, tel que (P, q) soit une suite de spécialisation, maximale et normale. On note $i : S \to X$ l'immersion et on suppose $f[i(q)] = f(p)$.

Résumé des résultats à obtenir dans ce numéro:

1. *X se rétracte sur S : définir* $\text{Rés}_S^X = K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_S(\Omega^*_{S/Y})$ *de degré*-1.
2. *Cas général, avec* $\text{car}(k(f(P))) = 0$, *définir*

$$[\text{Rés}_S^X] : K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_S(\Omega^*_{S/Y})$$

comme la classe d'homotopie d'un morphisme de degré -1.

1.1. *Cas particulier d'un préschéma et d'une immersion admettant une rétraction*

DÉFINITION. *Soit X un préschéma, $i : S \to X$ une immersion. Une rétraction de X sur S est un morphisme $r : X \to S$, vérifiant $r \circ i = id_S$.*

Si on suppose dans l'hypothèse 1.0 que X se rétracte par r sur S, alors le corps résiduel $k(q)$ de l'anneau local $O_{X,q}$ de X le long de S (de valuation discrète dans $k(P)$ de rang 1) s'injecte dans $O_{X,q}$ par $r^* : k(q) \to O_{X,q} \subset k(P)$.

DÉFINITION. *Sous l'hypothèse* 1.0, *le résidu* Rés_S^X, *d'un préschéma X en une immersion fermée $i : S \to X$ admettant une rétraction r, est le morphisme de complexes de faisceaux constants $R^{K_X}_{O_{X,S}} : K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_S(\Omega^*_{S/Y})$, de degré -1, induisant sur les fibres*:

$$R^{k(P)}_{O_{X,q}} : \Omega^*_{k(P)/k(f(P))} \to \Omega^*_{k(q)/k(f[i(q)])}, \qquad (f(P) = f[i(q)]),$$

défini au no 0.2, *Th.* 1.

Remarque sur la régularité du résidu: Si de plus X est affine d'algèbre A, Y affine d'algèbre C, et S défini par un idéal principal Al, alors $O_{X,q}$ est nécessairement de valuation discrète dans $k(P)$ de rang 1. Le morphisme r^* induit une injection de A dans $B[[l]]$ où $B = A/Al$. Le résidu Rés_S^X induit pour tout $n \in N$, un morphisme de $\text{Im}(A \times 1/l^n \otimes_A \Omega^*_{A/C})$ (image dans $K_X(\Omega^*_{X/Y})$) dans $\text{Im}(\Omega^*_{B/C})$ (image dans $K_S(\Omega^*_{S/Y})$).

Interprétation:

PROPOSITION. *Sous les hypothèses de la définition précédente, pour tout $\omega \in K_X(\Omega^1_{X/Y})$, il existe un ouvert U de X contenant P, ayant les propriétés suivantes*:

1) *Pour tout $s \in S \cap U$, la fibre $r^{-1}(s) = X_s$ est une courbe intègre au voisinage de s, régulière en s.*

2) $\text{Rés}\,(\omega) \in \Gamma(U \cap S, O_S)$.

On a alors $[\text{Rés}\,\omega](s) = \text{Rés}_s(\omega/X_s^c) \in k(s)$; *ou X_s^c est la composante irréductible de X_s contenant s et ω/X_s^c est la restriction de ω.*

Soit $\omega = f\,dg$ où $f \neq 0$ et $g \in K_X$. On choisit un ouvert affine $U \subset X$ d'algèbre A tel que $S \cap U$ soit un préschéma défini par un idéal principal

$(Al) \neq A$ (ce qui est possible car $O_{X,S}$ est de valuation discrète de rang 1) et tel que U soit dans $D(f) \cup S$ et $g \in \Gamma(U, O_X)$. Soit $s \in U \cap S$ et $m_{S,s}$ l'idéal maximal de $O_{S,s}$. On a $O_{S,s} \simeq (O_{X,s}/(l_s)$ où (l_s) est l'idéal de $O_{X,s}$ engendré par le germe de l en s. Le morphisme $r^* : O_{S,s} \to O_{X,s}$ correspond à la rétraction et $O_{X,s}/(r^*(m_{S,s}))$ est l'anneau local $O_{X_s,s}$ de X_s en s. Le morphisme r^* induit une injection $k(s) \to O_{X_s,s}$. On vérifie facilement que $(r^*(m_{S,s})) + (l_s) = m_{X,s}$. Donc $O_{X_s,s}$ est un anneau local, noethérien, d'idéal maximal principal engendré par l_s, par conséquent c'est un anneau de valuation discrète de rang 1 (intègre de dimension 1).

Soit X_s^c la composante irréductible de X_s contenant s, $P_s : O_{X,X_s^c} \to K_{X_s^c}$ la projection canonique et

$$P_{s,*} : O_{X,X_s^c} \underset{O_X}{\otimes} \Omega^1_{X/Y} \to K_{X_s^c}(\Omega^1_{X_s^c/Y})$$

le morphisme engendré par P_s. On peut écrire $\omega \in O_{X,X_s^c} \otimes_{O_X} \Omega^1_{X/Y}$ sous la forme

$$\Big(\sum_{i\in\mathbf{Z}} f^{*i} l^i\Big) d\Big(\sum_{i\in\mathbf{Z}} g^{*i} l^i\Big) \text{ où } f^{*i}, g^{*i} \in K_S$$

sont réguliers en s. $\text{Rés}_S^X(\omega) = \sum_{i+j=0} (jg^{*i} f^{*i})$ est régulier en s et

$$[\text{Rés}_S^X(\omega)](s) = \sum_{i+j=0} jg^{*j}(s) f^{*i}(s) = \text{Res}_s^{X_s^c}(P_{s,*}(\omega)).$$

1.2. *Cas général en caractéristique* 0

LEMME 1. *Soit X un préschéma localement noethérien, intègre de point génerique P, localement de type fini au-dessus d'un préschéma Y. L'ensemble des points $x \in X$ tel que $\Omega^1_{X/Y,x}$ soit un module libre sur $O_{X,x}$ est ouvert, non vide, dans X.*

En effet, si le faisceau cohérent $\Omega^1_{X/Y}$ admet une fibre libre en $x \in X$, il est libre au voisinage de x. La fibre $\Omega^1_{X/Y,P}$ est toujours libre sur $k(P)$.

LEMME 2. *Soit k un corps de caractéristique* 0 *et K une extension de type fini sur k. Alors les* 2 *assertions suivantes sont équivalentes*:

i) *Les éléments $l_1, \cdots l_n$ de K forment une base de transcendance sur k.*

ii) *Les éléments $l_1 \cdots l_n$ sont tels que $dl_1 \cdots dl_n$ forment une base de $\Omega^1_{K/k}$ sur K.*

ii) implique i): Soi*t* la suite exacte

$$K \underset{k(l_1 \cdots l_n)}{\otimes} \Omega^1_{k(l_1 \cdots l_n)/k} \to \Omega^1_{K/k} \to \Omega^1_{K/k(l_1 \cdots l_n)} \to 0.$$

Comme $dl_1 \cdots dl_n$ engendrent $\Omega^1_{K/k}$, on a $\Omega^1_{K/k(l_1 \cdots l_n)} = 0$, donc K est algébrique sur $k(l_1 \cdots l_n)$(EGA. IV. 17.4.1). Si $l_{i_1} \cdots l_{i_P}$ forment une base de transcendance, $dl_{i_1} \cdots dl_{i_p}$ engendreraient $\Omega^1_{K/k}$ donc $p = n$. i) implique ii): $dl_1 \cdots dl_n$ forment une base de $\Omega^1_{k(l_1 \cdots l_n)/k}$, d'après la meme suite exacte, ils engendrent $\Omega^1_{K/k}$, donc on peut en extraire une base $dl_{i_1} \cdots dl_{i_p}$; d'après la 1ère partie du raisonnement $l_{i_1} \cdots l_{i_p}$ forment une base de transcendance, donc $p = n$.

LEMME 3. *Sous l'hypothèse* 1.0, *si*, $\operatorname{car}(k(f(p)) = 0$ *et si* S *est défini par une équation* $l \in \Gamma(X, O_X)$, *pour tout point* $s \in S$ *tel que* $\Omega^1_{S/Y,s}$, *soit libre de base* $di^*(l_1), \cdots di^*(l_n)$ *la fibre* $\Omega^1_{X/Y,s}$ *est libre de base* dl, $dl_1 \cdots dl_n$.

Soit $s \in S$ un tel point, la suite exacte:

$$O_{S,s} \underset{O_{X,s}}{\otimes} lO_{X,s} \xrightarrow{1 \otimes d} O_{S,s} \underset{O_{X,s}}{\otimes} \Omega^1_{X/Y,s} \to \Omega^1_{S/Y,s} \to 0$$

et le lemme de Nakayama, impliquent que $\Omega^1_{X/Y,s}$ est engendré par dl, $dl_1 \cdots dl_n$ sur l'anneau $O_{X,s}$. Soit $L = O_{S,s} - (0)$ et $M = O_{X,s} - (0)$. On a: $L^{-1}(\Omega^1_{S/Y,s}) \simeq \Omega^1_{k(q)/k(f(p))}$ est un espace vectoriel de base $di^*(l_1) \cdots di^*(l_n)$. Comme $k(q) = O_{X,q}/(l)$, les éléments dl, $dl_1 \cdots dl_n$ forment une base de $M^{-1}[\Omega^1_{X/Y,s}] \simeq \Omega^1_{k(p)/k(f(p))}$, donc dl, $dl_1 \cdots dl_n$ sont libres dans $\Omega^1_{X/Y,s}$ sur l'anneau $O_{X,s}$.

PROPOSITION 7. *Sous l'hypothèse* 1-0 *et si de plus* $\operatorname{car}[k(f(p))] = 0$, *il existe un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, shift right, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ S_U \arrow[ur, shift right, "j"'] \arrow[rr, "i"'] & & U \end{tikzcd}$$

de préschémas au-dessus de Y, *vérifiant les propriétés suivantes*:

1) *On désigne par* V *un préschéma localement noethérien, localement de type fini sur* Y, *intègre de point générique* t, *par* U *un ouvert de* X *contenant le point générique* q *de* S, *et par* P_2 *un morphisme dominant de dimension relative* 0 (*i.e.* $P_2(t) = P$ *et* $k(t)$ *est une extension algébrique de* $k(P)$).

2) *On désigne par* j *une immersion fermée de* $S_U = S \cap U$ *dans* V *tel que* $P_2 \circ j = i$ *et que le préschéma* $j(S_U)$ *soit identique au préschéma* $P_2^{-1}(i(S_U))$.

3) *La suite de spécialisation* $(t, j(q))$ *est maximale, normale et* P_1 *est une rétraction de* V *sur* S_U.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse et la proposition 1, N° 1, § 1, l'anneau local $O_{X,S}$ de X le long de S est de valuation discrète K_X, de rang 1. Donc il existe un ouvert U de X isomorphe au spectre d'un anneau A, noethérien, de type fini au-dessus d'un ouvert Y_0 de Y isomorphe au spectre d'un anneau C, tel que $S_U = S \cap U \neq \emptyset$ soit défini par un idéal principal premier Al de A.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,(A/Al) \simeq S_U \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & U \simeq \mathrm{Spec}\,(A) \arrow[d] \\ & Y_0 \simeq \mathrm{Spec}\,(C) \end{tikzcd}$$

D'après les lemmes 1 et 3 précédents, on peut restreindre U pour que $\Omega^1_{U/Y}$ soit un faisceau de O_{S_U} - Module libre de base $d[i^*(l_1)], \cdots, d[i^*(l_n)]$, et que $\Omega^1_{U/Y}$ soit libre de base $dl, dl_1 \cdots dl_n$ sur O_U. Soit $Z = \mathrm{Spec}\, C[X_1 \cdots X_n]$ et $(\pi : U \to Z, \pi^* : C[X_1 \cdots X_n] \to A)$ le morphisme défini par $\pi^*(X_i) = l_i$ pour $i \in [1 \cdots n]$. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dash, "P_2"] \arrow[d, shift right, "P_1"'] & U \arrow[d, "\pi"] \\ S_U \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[r, dash, "\pi \circ i"'] & Z \end{tikzcd}$$

W est le produit fibré (noethérien) de S_U et U sur Z et P_1, P_2 sont les projections canoniques,

$$W \simeq \mathrm{Spec}\,(A/Al \underset{C[X_1 \cdots X_n]}{\otimes} A).$$

1) $\pi(i(q)) = \pi(P)$.

Soit $f^* : C \to A$ et $I = \ker f^*$, comme $f(q) = f(P)$, on a $I = f^{*-1}(Al)$. D'après le lemme 2 précédent la famille $(l_i)_{i \in [1 \cdots n]}$ forme une base de transcendance de $k(q)$ sur $k(f(p))$, donc

$$\pi^* : C/I\,[X_1 \cdots X_n] \to A/Al$$

est injectif, c'est-à-dire $\bar{\pi}^{*-1}(Al) = \bar{\pi}^{*-1}(0)$. On note que $k(q)$ est algébrique sur $k(f(P))$.

2) $O_{w, j(q)}$ *est un anneau de valuation discrète de rang* 1, *d'uniformisante* l *et de corps résiduel* $k(q)$:

La suite $\pi^*(\Omega^1_{Z/Y_0}) \to \Omega^1_{U/Y_0} \to \Omega^1_{U/Z} \to 0$ est exacte. L'image de $\pi^*(\Omega^1_{Z/Y_0})$ dans Ω^1_{U/Y_0} est le sous-module engendré par $(dl_i)_{i \in [1, n]}$. Donc $\Omega^1_{U/Z}$ est libre de base dl sur O_U.

Comme le faisceau des formes différentielles est compatible avec l'extension de la base, Ω^1_{W/S_U} est libre de base $d[P_2^*(l)]$ sur O_W.

Si on note $\overline{W}$ le sous-préschéma de W défini par l'idéal principal engendré par $P_2^*(l)$, on a $\Omega^1_{\overline{W}/S_U} = 0$ et par conséquent $O_{\overline{W}, j(q)}$ est un corps, extension finie de $k(q)$, (EGA IV th. 17.4.1). L'immersion j se factorise à travers $\overline{W}$, car $j^*(P_2^*(l)) = i^*(l) = 0$, et j^* induit un isomorphisme de $O_{\overline{W}, j(q)}$ sur $k(q)$.

L'anneau $O_{W,\,j(q)}$ est noethérien, local, d'idéal maximal principal engendré par $P_2^*(l)$, de corps résiduel $k(q)$, donc c'est un anneau de valuation discrète, et P_1^* est une injection de $k(q)$ dans $O_{W,\,j(q)}$.

Il existe une seule composante irréductible dans W, contenant $j(q)$ et un voisinage ouvert V de $j(q)$ de point générique t, qui se rétracte sur $j(S_U) \cap V$.

3) *P_2 restreint à V est dominant, de dimension relative* 0.

Le morphisme $P_2^* : O_{U,q} \to O_{V,\,j(q)}$ est injectif car il induit un isomorphisme sur les corps résiduels et fait correspondre les uniformisantes de ces 2 anneaux de valuation discrète, donc $P_2(t) = P$. La suite exacte

$$(\pi \circ i)^*(\Omega^1_{Z/Y_0}) \to \Omega^1_{S_U/Y_0} \to \Omega^1_{S_U/Z} \to 0$$

montre que $\Omega^1_{S_U/Z} = 0$, par changement de base $\Omega^1_{W/U} \simeq P_1^*(\Omega^1_{S_U/Z}) = 0$. Donc $\Omega^1_{V/U} = 0$ et $k(t)$ est une extension finie séparable de $k(p)$. (EGA, IV, 17, 4.1).

Définition du Résidu en caractéristique 0

DÉFINITION. *Sous l'hypothèse* 1.0 *et si* $\mathrm{car}(k(f(p)) = 0$, *on considère un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, shift left, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ S_u \arrow[ur, shift left, "j"] \arrow[rr, "i"'] & & U \end{tikzcd}$$

de préschémas au-dessus de Y, vérifiant les propriétés de la proposition 7. *Alors le Résidu de X en S est la classe d'homotopie* $(\mathrm{Rés}_S^X]$ *du morphisme de complexes de faisceaux constants de degré*-1:

$$j^* \circ \mathrm{Rés}^V_{j(S_u)} \circ P_2^* : K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_S(\Omega^*_{S/Y})$$

où

$$P_2^* : \Omega^*_{k(P)/k(f(P))} \to \Omega^*_{k(t)/k(f(p))}\ (resp : j^* : \Omega^*_{k(j(q))/k(f(p))} \xrightarrow{\sim} \Omega^*_{k(q)/k(f(p))})$$

est engendré par P_2 (resp. j)

PROPOSITION. *Le Résidu ne dépend pas du diagramme choisi pour sa définition.*

DÉMONSTRATION. Soit 2 tels diagrammes:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, shift left, "P_1"] \arrow[dr, "P_2"] & \\ S_u \arrow[ur, shift left, "j"] \arrow[rr, "i"'] & & U \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & V' \arrow[dl, shift left, "P'_1"] \arrow[dr, "P'_2"] & \\ S_{U'} \arrow[ur, shift left, "j'"] \arrow[rr, "i"'] & & U' \end{tikzcd}$$

notons: $V_{UU'} = P_2^{-1}(U \cap U')$; $V'_{UU'} = P_2'^{-1}(U \cap U')$; $S_{UU'} = S \cap U \cap U'$ et t, t', P, q les points génériques respectifs de V, V', X et S.

Considérons le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[r, "P'"] \arrow[dd, "P"] & V_{UU'} \arrow[dd, "P'_2"] \arrow[dll, shift left, "P'_1"] \\
S_{UU'} \arrow[ur, "j''"] \arrow[urr, shift left, "j'"] \arrow[dr, shift left, "j"] & & \\
 & V_{UU'} \arrow[ul, shift left, "P_1"] \arrow[r, dash, "P_2"'] & U \cap U'
\end{tikzcd}$$

où $W = V_{UU'} \times_{U \cap U'} V'_{UU'}$; j'' est l'immersion fermée tel que $P' \circ j'' = j'$ et $P \circ j'' = j$; $P'_1 \circ P'$ et $P_1 \circ P$ sont 2 rétractions de W sur $S_{UU'}$.

Par hypothèse

$$S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V_{UU'} \simeq S_{UU'} \simeq S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V'_{UU'}$$

donc

$$S_{UU'} \underset{V_{UU'}}{\times} W \simeq S_{UU'} \underset{V_{UU'}}{\times} V'_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V_{UU'} \simeq S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V_{UU'} \simeq S_{UU'}$$

de même

$$S_{UU'} \underset{V'_{UU'}}{\times} W \simeq S_{UU'} \text{ et; } S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} W \simeq S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V'_{UU'}$$
$$\simeq S_{UU'} \underset{U \cap U'}{\times} V'_{UU'} \simeq S_{UU'};$$

donc j'' est un isomorphisme sur l'image réciproque de $S_{UU'}$ considéré comme sous-préschéma de $V_{UU'}$, $V'_{UU'}$ ou $U \cap U'$.

Si l désigne une uniformisante de $O_{X,S}$, l'anneau $O_{w, j''(q)}$ est noethérien, local, d'idéal maximal principal engendré par $P^* \circ P_2^*(l)$, donc c'est un anneau de valuation discrète et il existe une seule composante irréductible W^c dans W, de point générique ω tel que $(\omega, j''(q))$ soit une suite de spécialisation maximale, normale, que $P(\omega) = t$ et $P'(\omega) = t'$.

Notons. $\text{Rés}^{W^c}_{1/S_{UU'}}$ le résidu calculé avec la rétraction $P_1 \circ P : W^c \to S_{UU'}$ et $\text{Rés}^{W^c}_{2, S_{UU'}}$ celui calculé avec $P'_1 \circ P'$; $P^* : K_V(\Omega^*_{V/Y}) \to K_{W^c}(\Omega^*_{W^c/Y})$ le morphisme engendré par P, et $P'^* : K_{V'}(\Omega^*_{V'/Y}) \to K_{W^c}(\Omega^*_{w^c/Y})$ celui qui est engendré par P'.

Alors on a:

$$\text{Rés}^V_{S_V} = \text{Rés}^{V_{UU'}}_{S_{UU'}} = \text{Rés}^{w^c}_{1, S_{UU'}}, \text{ car } S_{UU'} \underset{V_{UU'}}{\times} W^c \simeq S_{UU'}$$

$$\text{Rés}^{V'}_{S_u} = \text{Rés}^{V'_{UU'}}_{S_{UU'}} = \text{Rés}^{W^c}_{2, S_{UU'}} \text{ car } S_{UU'} \underset{V'_{UU'}}{\times} W^c \simeq S_{UU'}.$$

(prop. 5 du § 2).

Ces résidus calculés avec 2 rétractions différentes sont homotopes. (Prop. 6 du § 2).

Remarques. 1) Si S est définie localement par une équation dans X et si il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, shift left] \arrow[dr] & \\ S \arrow[ur, shift left] \arrow[rr] & & U \end{tikzcd}$$

où U est un voisinage de S, on peut définir alors:

$$[\text{Rés}_S^X] : \Omega^*_{(X-S)/Y} \to \Omega^*_{S/Y}$$

2) D'après le corollaire 1 de la proposition du N° 3.1 § 1, on peut restreindre U pour que $P_2 : V \to U$ soit un revêtement étale, donc on peut considérer seulement les revêtements étales de U qui se rétractent sur S_U.

2. Exemples de généralisations

Le Résidu en une suite de spécialisation maximale, normale.

2.1. Définition. *Soit X un préschéma localement noethérien, intègre, de point générique x_0, un préschéma de base Y, un morphisme structural $f: X \to Y$ localement de type fini, et $(x_0, \cdots, x_n)$ une suite de spécialisation maximale, normale tel que $f(x_0) = \cdots = f(x_n)$.*

On suppose car $(k(f(x_0)) = 0$. *Alors on définit* $[\text{Rés}^X_{(x_0 \cdots x_n)}] : K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_{\overline{x_n}}(\Omega^*_{\overline{x_n}/Y})$ *comme étant le composé des* $[\text{Rés}_{\overline{x_i/x_{i+1}}}]$ *définis au numéro précédent pour* $i \in [1 \cdots n]$.

Remarque. L'idée est de définir le résidu en un sous-préschéma S du préschéma X à l'aide d'une suite de spécialisation au-dessus de S, seulement le résidu dépend de cette suite.

2.2.0. Hypothèse. *Soit k un corps de caractéristique* 0, *une extension K de k de type fini, de transcendance $n+1$ sur k et R un anneau local contenant k, de corps des fractions K et de corps résiduel K_1.*

2.2.1. Définition. *Sous l'hypothèse* 2.2.0, *on suppose que R est de valuation discrète de dimension $n+1-s$ sur k et de rang s donc* Spec $(R) \simeq (z_0, z_1 \cdots, z_s)$. *Soit X et f :* Spec $(R) \to X$ *vérifiant les propriétés de la proposition* 3, *n°* 1, § 1. *Soit* $f^{*-1} : \Omega^*_{K/k} \to \Omega^*_{K_X/k}$ (*resp.* $f_s^* : \Omega^*_{k(f(z_s))/k} \to \Omega^*_{K_1/k}$), *les morphismes correspondants à f, (resp. à la restriction f_s de f à z_s). On définit*

$$[\text{Rés}_R^K] = f_s^* \circ [\text{Rés}^X_{(f(z_0),\cdots,f(z_s))}] \circ f^{*-1}.$$

PROPOSITION. $[\text{Rés}_{R_v}^K]$ *ne dépend pas du choix de* X.

DÉMONSTRATION. Soit f: Spec $(R) \to X$ et f' : Spec $(R) \to X'$, 2 tels choix. Notons f_i la restriction de f à $\overline{z_i}$, on a $f_i^* \circ f'^{*-1}$:

$$O_{\overline{f'(z_i)}, f'(z_{i+1})} \simeq O_{\overline{f(z_i)}, f(z_{i+1})}.$$

Comme X et X' sont de type fini sur k, pour tout $i \in [0, s-1]$, il existe un voisinage ouvert U_i de $f(z_{i+1})$ dans $\overline{f(z_i)}$, un voisinage U_i' de $f'(z_{i+1})$ dans $\overline{f'(z_i)}$ et un isomorphisme $g_i : U_i' \simeq U_i$ tel que $g_i[f_i'(z_{i+1})] = f_i(z_{i+1})$. Donc

$$\left[\text{Rés}\,\frac{\overline{f(z_i)}}{f(z_{i+1})}\right] \text{ et } \left[\text{Rés}\,\frac{\overline{f'(z_i)}}{f'(z_{i+1})}\right]$$

correspondent par l'isomorphisme g_i.

2.2.2. DÉFINITION. PROPOSITION. *Sous l'hypothèse* 2.2.0, *supposons* R *noetherien et* K_1 *de transcendance* n *sur* k. *Il existe alors un nombre fini d'anneaux de valuation dominant* R, *soit* $(R_{v_i})_{i\in[1\cdots m]}$. *Si on pose* $K_\iota = (R_{v_i}/m_{v_i})$, *on définit*:

$$[\text{Rés}_R^K] = \sum_{i=1}^m [\text{Tr}_{K_1}^{K_i}] \circ [\text{Rés}_{R_{v_i}}^K]$$

DÉMONSTRATION. L'idéal maximal de R est l'unique idéal premier non nul dans R, car si P est un idéal premier de R distinct de 0 et de m, on aurait la contradiction

$$n = \text{tr}_k K_1 < \text{tr}_k \frac{R}{P} < \text{tr}_k K = n+1.$$

La clôture intégrale $\bar{R}$ de R dans K est un R module de type fini, donc l'anneau $\bar{R}/m\bar{R}$ est artinien, étant un espace vectoriel de dimension finie sur K_1. Soit $(m_i)_{i\in[1\cdots m]}$ les idéaux maximaux de $\bar{R}$. Les anneaux de valuation $(R_{v_i})_{i\in[1\cdots m]}$ contenant R sont les localisés de $\bar{R}$ en $(m_i)_{i\in[1\cdots m]}$. On a $\bar{R} = \bigcap_{i=1}^m R_{v_i}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. Soit X un préschéma localement noethérien, intègre de point générique p, un préschéma Y et un morphisme structural $f: X \to Y$ localement de type fini tel que, car $(k(f(p))) = 0$. Soit (p, q) une suite de spécialisation maximale quelconque dans X tel que $f(p) = f(q)$. On considère $g : \tilde{X} \to X$ le normalisé de X dans le corps $k(p)$, et les points $q_i \in X$ pour $i \in [1 \cdots m]$ tel que $g(q_i) = q$. On note g_i la restriction de g à $\bar{q}_i$ et on pose:

$$[\text{Rés}_q^X] = \sum_{i=1}^m [\text{Tr}\, g_i] \circ [\text{Rés}_{q_i}^{\tilde{X}}]$$

2.2.3. *Résidu canonique d'un morphisme de dimension relative* 1.

DÉFINITION. *Soit k un corps, $g : k \to K$ une extension de type fini sur k, de transcendance* 1 *et R_v un anneau de valuation discrète contenant k, de corps des fractions K. Alors le théorème de Tate s'applique* (§ 2, n^o 0.1) *et permet de définir*

$$\text{Rés}^g_{R_v} = \text{Rés}^K_{R_v} : \Omega^1_{K/k} \to k.$$

En effet un tel anneau est de rang 1. Il reste à vérifier que pour tout $f \in K$, l'espace vectoriel $(fR_v + R_v)/R_v$ est de dimension finie sur k. Soit $\hat{R}_v$ le complété de R_v pour la topologie m_v adique. L'anneau $\hat{R}_v$, d'égale caractéristique avec son corps résiduel, est isomorphe à $\kappa(R_v)[[l]]$ où l est une uniformisante ([6], vol. II, p. 307). L'espace vectoriel $(fR_v + R_v)/R_v$ s'injecte dans $(f\hat{R}_v + \hat{R}_v)/\hat{R}_v$ et ce dernier est de dimension finie sur $\kappa(R_v)$ donc sur k.

REMARQUES. 1) Si on considère une localité R contenant k, de corps des fractions K (i.e. l'anneau local d'un point d'un préschéma de type fini sur k). On note $(R_{v_i})_{i \in [1 \cdots m]}$ les anneaux de valuation dominant R. On pose:

$$\text{Rés}^g_R = \sum_{i=1}^{m} \text{Rés}^g_{Rv_i}.$$

2) Interpréter géométriquement.

3. Applications

3.1. *Theorème des Résidus pour un morphisme de dimension relative* 1.

HYPOTHÈSE. *Soit X un préschéma localement noethérien, intègre de point générique p, un préschéma Y, un morphisme $f : X \to Y$ localement de type fini, de dimension relative* 1 (*i.e.* $\text{tr}_{k(f(p))}\, k(p) = 1$). *On considère un sous-préschéma S intègre dans X, de point générique q, tel que $f(q) = f(p)$ et que la suite (p, q) soit normale.*

La suite (p, q) est nécessairement maximale. On pose

$$\text{Rés}^f_S = \text{Rés}^{f^*}_{O_{X,q}} : K_X(\Omega^1_{X/Y}) \to k(f(p)),$$

où f^* désigne l'extension $f^* : k(f(p)) \to k(p)$.

THÉORÈME. *Sous l'hypothèse précédente, si la fibre générique $X_{f(p)}$ de f est régulière, propre sur $k(f(p))$ et si on considère la famille $(S_v)_{v \in V}$ des suites de spécialisation $(p, q_v)_{v \in V}$ normales tel que $f(p) = f(q_v)$, alors on a*:

$$\sum_{v \in V} \text{Rés}^f_{q_v} = 0.$$

DÉMONSTRATION. On se ramène au théorème de Tate ([7], th. 3). En effet: La fibre $X_{f(p)} \simeq X \otimes_Y k(f(p))$ est par hypothèse intègre régulière et complète et le Rèsidu de f en S_v est égal au Résidu de $X_{f(p)}$ en q_v.

3.2. *Note*: *Approche du Résidu de Grothendieck.*

Soit X un préschéma localement noethérien, intègre de point générique p, un préschéma Y, un morphisme $f: X \to Y$ lisse de dimension relative n (i.e. $\mathrm{tr}_{k(f(p))}\, k(p) = n$). On considère une suite de spécialisation $(p, q_1, \cdots, q_n)$ maximale, normale tel que les sous-préschémas $\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n$ soient définis successivement par les équations (t_1), $(t_1, t_2) \cdots, (t_1, \cdots t_n)$ et que $\bar{q}_n$ soit fini, plat sur V.

On suppose car $(k(f(p))) = 0$. On a défini au § 2 n° 2.1:

$$[\mathrm{Rés}^X_{(p, q_1, \cdots, q_n)}],$$

on pose

$$[\mathrm{Rés}^f_{(p, q_1 \cdots q_n)}] = [\mathrm{Tr}^{k(q_n)}_{k(f(p))}] \circ [\mathrm{Rés}^X_{(p, q_1, \cdots, q_n)}] : K_X(\Omega^*_{X/Y}) \to K_{\overline{q_n}}(\Omega^*_{\overline{q_n}/Y}) \to k(f(p))$$

$$\begin{tikzcd} K_X(\Omega^*_{X/Y}) = 0 \arrow[r] & K_X \arrow[r] & K_X(\Omega^1_{X/Y}) \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & K_X(\Omega^n_{X/Y}) \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & \cdots 0 \arrow[r] & k(f(p)) \arrow[r] & 0 \cdots & \end{tikzcd}$$

c'est un morphisme de complexes de faisceaux constants de degré-n qui ne *dépend plus de l'homotopie.*

D'ailleurs, avec cette hypothèse, et si de plus S est sans ramification sur Y (i.e. $\Omega^1_{S/Y} = 0$), on peut construire un résidu canonique:

$$\Gamma\Big(X - \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i), \Omega^*_{X/Y}\Big) \to \Gamma(Y, O_Y)$$

où $V(t_i)$ est le sous-préschéma défini par t_i.

BIBLIOGRAPHIE

N. Bourbaki

[1] Algèbre commutative – Hermann –.

A. Grothendieck et J. Dieudonné

[2] Eléments de Géométrie Algébrique. I.H.E.S – Publications mathématiques.

R. Hartshorne

[3] Residues and Duality – Lecture Notes in Mathematics – 1966, No. 20, Springer, p. 195

J. Leray

[4] Problème de Cauchy III – Bulletin de la Société Mathématique de France, 1959.

JP. SERRE

[5] Groupes algébriques et corps de classes, pp 24–35 et 76–81.

SAMUEL-ZARISKI

[6] Commutative Algebra, vol. I and II, Van Nostrand.

J. TATE

[7] Résidues of differentials on Curves. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1968.

(Oblatum 1–X–1970)

Fouad Elzein
18 Av. des Fleurs
NICE, France

Université de Nice
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

This paper also appears in 'Algebraic Geometry, Oslo 1970', Proceedings of the 5th Nordic Summer-School in Mathematics, Wolters-Noordhoff Publishing 1971.