COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Structure galoisienne de limites projectives d’unités locales

Compositio Mathematica, tome 42, nº 1 (1980), p. 89-103
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__42_1_89_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 42, Fasc. 1, 1981, pag. 89–103

STRUCTURE GALOISIENNE DE LIMITES PROJECTIVES D'UNITES LOCALES

Jean-Pierre Wintenberger

1. Introduction

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit K_∞ une extension abélienne de K. On note G le groupe de Galois de K_∞ sur K. On suppose que G est le produit direct d'un groupe fini Δ d'ordre premier à p et d'un groupe Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$, pour r entier ≥ 1. On note U_∞ (respectivement Z_∞) la limite projective des groupes des unités fondamentales (resp. des complétions p-adiques des groupes multiplicatifs: pour la définition voir 3) des extensions finies de K contenues dans K_∞, les morphismes de transition étant induits par la norme. Les groupes U_∞ et Z_∞ sont de manière naturelle des modules sur l'algèbre Λ des mesures p-adiques sur G (l'algèbre Λ est aussi souvent appelée algèbre d'Iwasawa de G). Pour $r = 1$, la structure de ces modules a été étudiée par Iwasawa, cf. §12 de [1]. Notre problème est d'étudier cette structure pour $r \geq 2$. Notre réponse est partielle, mais nous semble suffire pour les applications concernant les extensions abéliennes des corps quadratiques imaginaires (cf. un travail de Yager à paraître).

C'est avec plaisir que je remercie J.-M. Fontaine pour ses nombreux conseils. Mes plus vifs remerciements vont aussi à J. Coates pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses remarques lors de la rédaction. Je tiens à signaler que Coleman et Yager ont obtenu séparément des résultats (non publiés) sur le sujet.

0010-437X/81/01089-15$00.20/0

2. L'algebre Λ des mesures p-adiques sur G

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $G_n = G/p^n\Gamma$. On a: $\Lambda = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p[G_n]$, où $\mathbb{Z}_p[G_n]$ est l'algèbre sur $\mathbb{Z}_p$ du groupe fini G_n. On identifie G á un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de Λ.

On pose $A = \mathbb{Z}_p[\Delta]$. Comme Δ est d'ordre premier à p, les idempotents e_Φ associés aux différents caractères irréductibles de Δ à valeur dans $\mathbb{Q}_p$, appartiennent à A. Si pour chaque Φ, on pose $A_\Phi = e_\Phi A$ et $\Lambda_\Phi = e_\Phi \Lambda$, les algèbres A et Λ se décomposent respectivement en les produits $\Pi_\Phi A_\Phi$ et $\Pi_\Phi \Lambda_\Phi$. Pour chaque Φ, $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_\Phi$ est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré le degré Φ et A_Φ s'identifie à l'anneau de ses entiers. Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ des générateurs de Γ (en tant que module sur $\mathbb{Z}_p$); on pose $T_i = \sigma_i - 1$ pour $1 \leq i \leq r$. L'algèbre Λ_Φ s'identifie à l'algèbre des séries formelles $A_\Phi[[T_1, T_2, \ldots, T_r]]$.

Pour chaque Φ, on munit Λ_Φ de la topologie $\mathcal{M}_\Phi$-adique, où $\mathcal{M}_\Phi$ est l'idéal maximal de Λ_Φ. La topologie produit sur $\Lambda = \Pi_\Phi \Lambda_\Phi$ coïncide avec la topologie limite projective $\Lambda = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p[G_n]$, les $\mathbb{Z}_p[G_n]$ étant munis de leur topologie p-adique.

Si M est un Λ-module, on pose $M_\Phi = e_\Phi M$. On a: $M = \Pi_\Phi M_\Phi$, et pour $\Phi \neq \Phi'$ l'action de Λ_Φ sur $M_{\Phi'}$ est triviale.

3. Les Λ-modules U_∞ et Z_∞

Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on appelle *complétion p-adique du groupe multiplicatif* de F et on note $\widehat{F^*}$ le groupe $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} F^*/F^{*p^t}$, la limite projective étant prise pour les applications évidentes. Le groupe $\widehat{F^*}$ est clairement un module sur $\mathbb{Z}_p$; si π est une uniformisante de F, on a $\widehat{F^*} \simeq \pi^{\mathbb{Z}_p} \times U_F^+$ où U_F^+ est le groupe des unités fondamentales de F.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par K_n le corps des points fixes de K_∞ par $p^n\Gamma$. On a $Z_\infty = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \widehat{K_n^*}$, les morphismes de transition étant induits par la norme. Pour chaque n, le groupe $\widehat{K_n^*}$ est de manière naturelle un module topologique compact sur $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Par passage à la limite projective, on en déduit une structure de Λ-module topologique compact sur Z_∞. Clairement, $U_\infty = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} U_{K_n}^+$ est un sous-Λ-module compact de Z_∞.

4. Enonce des résultats

On note $\bar{\chi}$ le caractère de Δ à valeurs dans les racines $(p-1)$-ième de l'unité de $\mathbb{Q}_p$, donnant l'action de Δ sur les racines p-ième de l'unité de K_∞.

Si F est une extension de $\mathbb{Q}_p$, on note $\mu_{p^\infty}(F)$ le groupe des racines de l'unité de F d'ordre une puissance de p.

Si $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ est infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ième de l'unité de K_∞. On note $T(\mu_{p^\infty})$ le module de Tate $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}$. Pour chaque n, le groupe $\mu_{p^\infty}(K_n)$ est un module sur Λ par l'intermédiaire du quotient $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Par passage à la limite projective, on en déduit une structure de Λ-module sur $T(\mu_{p^\infty})$.

Les homomorphismes d'augmentation: $\mathbb{Z}_p[G_n] \to \mathbb{Z}_p$, définissent un homomorphisme de Λ dans $\mathbb{Z}_p$. On note encore $\mathbb{Z}_p$ le groupe $\mathbb{Z}_p$ avec action de Λ à travers cet homomorphisme.

THÉORÈME: *On pose $d = [K : \mathbb{Q}_p]$. On note Φ_0 le caractère trivial de Δ.*

(i) *Supposons $r = 2$. Let Λ_Φ-module $Z_{\infty,\Phi}$ est libre de rang d, pour tout caractère irréductible Φ de Δ si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$, et pour tout $\Phi \neq \bar{\chi}$ si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$. Si $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ est infini, et si $p \neq 2$ ou $\mu_4 \subset K$, on a une suite exacte de $\Lambda_{\bar{\chi}}$-modules:*

(I) $0 \to Z_{\infty,\bar{\chi}} \to L_{\bar{\chi}} \to T(\mu_{p^\infty}) \to 0,$

où $L_{\bar{\chi}}$ est libre de rang d sur $\Lambda_{\bar{\chi}}$.

(ii) *Si $r \geq 3$, le Λ_Φ-module $Z_{\infty,\Phi}$ est libre de rang d pour tout Φ distinct de Φ_0 et de $\bar{\chi}$.*

(iii) *Pour r quelconque, on a $Z_{\infty,\Phi} = U_{\infty,\Phi}$, pour tout Φ si le corps résiduel de K_∞ est infini, et pour tout $\Phi \neq \Phi_0$ si le corps résiduel de K_∞ est fini. Dans le second cas, et pour $\Phi = \Phi_0$, on a une suite exacte de Λ_{Φ_0}-modules:*

(II) $0 \to U_{\infty,\Phi_0} \to Z_{\infty,\Phi_0} \to \mathbb{Z}_p \to 0.$

REMARQUES:

(1) Pour $r = 2$, $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ infini, et $p \neq 2$ ou $\mu_4 \subset K$, la suite exacte (I) décrit entièrement la structure de $\Lambda_{\bar{\chi}}$-module de $Z_{\infty,\bar{\chi}}$. On voit facilement que l'on a $Z_{\infty,\bar{\chi}} \approx \mathscr{A} \oplus \Lambda_{\bar{\chi}}^{d-1}$, où $\mathscr{A}$ est l'annulateur dans $\Lambda_{\bar{\chi}}$ de $T(\mu_{p^\infty})$.

(2) De même, supposons $r = 2$ et le corps résiduel de K_∞ fini. Si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ ou si $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$ et $\bar{\chi} \neq \Phi_0$ (c'est-à-dire si $\mu_{p^\infty}(K) = \{1\}$),

la suite exacte (II) décrit entièrement la structure de Λ_{Φ_0}-module de U_{∞,Φ_0}: on a $U_{\infty,\Phi_0} \approx \mathcal{I}_{0,\Phi_0} \oplus \Lambda_{\Phi_0}^{d-1}$, où $\mathcal{I}_0$ est l'idéal de Λ engendré par T_1 et T_2.

(3) Si $r \geq 3$, le Λ_{Φ_0}-module Z_{∞,Φ_0} n'est pas libre (voir la remarque du (5.5.1)).

PROPOSITION: *Notons $\mathcal{I}_0$ l'idéal de Λ engendré par les T_i pour $1 \leq i \leq r$.*

(i) *Pour r quelconque et $\Phi \neq \Phi_0$, le noyau de la projection de $Z_{\infty,\Phi}$ dans $\widehat{K_{0,\Phi}^*}$ est $\mathcal{I}_0 Z_{\infty,\Phi}$.*

(ii) *Pour $r = 2$, le noyau de l'homomorphisme de $Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_0 Z_{\infty,\Phi_0}$ dans $\widehat{K_{0,\Phi_0}^*}$ induit par la projection est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.*

5. Démonstrations

(5.1) *Interprétation par la théorie du corps de classe local*

On se fixe une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et tous les corps considérés sont des sous-corps de cette clôture algébrique.

Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on pose $Z(F) = \widehat{F^*}$. Si F' est une extension finie de F, la norme induit un homomorphisme de $Z(F')$ dans $Z(F)$; on le désigne par $N_{F'/F}$. On note $M(F)$ la p-extension maximale abélienne de F. L'application d'Artin définit un isomorphisme:

$$\psi_F\colon Z(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(M(F)/F). \tag{1}$$

De plus, si F' est une extension finie de F, nous avons le diagramme commutatif classique:

$$\begin{array}{ccc} Z(F') & \xrightarrow{\psi_{F'}} & \mathrm{Gal}(M(F')/F') \\ {\scriptstyle N_{F'/F}}\downarrow & & \downarrow \\ Z(F) & \xrightarrow{\psi_F} & \mathrm{Gal}(M(F)/F) \end{array} . \tag{2}$$

où la flèche verticale de droite est l'homomorphisme naturel défini par l'inclusion $M(F) \subset M(F')$. Supposons de plus F'/F galoisienne. Comme $M(F')/F$ est alors galoisienne, $\mathrm{Gal}(F'/F)$ opère sur $\mathrm{Gal}(M(F')/F')$ par automorphismes intérieurs (si $\sigma \in \mathrm{Gal}(F'/F)$ et $x \in \mathrm{Gal}(M(F')/F')$, alors $\sigma \cdot x = \gamma x \gamma^{-1}$, où γ est un quelconque élément de $\mathrm{Gal}(M(F')/F)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(F'/F)$ est σ). D'autre part, le groupe $\mathrm{Gal}(F'/F)$ opère sur $Z(F')$ de manière naturelle. Il est bien connu que $\psi_{F'}$ est un $\mathrm{Gal}(F'/F)$-homomorphisme.

Si F est une extension algébrique quelconque de $\mathbb{Q}_p$, on note toujours $M(F)$ la p-extension maximale abélienne de F; on pose $Z(F) = \varprojlim Z(E)$, où E décrit les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans F et où, pour $E \subset E'$, l'homomorphisme de transition est $N_{E'/E}$. Par passage à la limite, les faits rappelés ci-dessus concernant les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ s'étendent aux extensions algébriques quelconques de $\mathbb{Q}_p$. En particulier, nous avons l'isomorphisme (1) et pour $F \subset F'$, le diagramme commutatif (2), où $N_{F'/F}$ est induit par les homomorphismes $N_{E/E\cap F}$, où E décrit les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ contenues dans F'.

Revenons à notre extension K_∞. Notons comme précédemment $\mathcal{I}_0$ l'idéal de Λ engendré par $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Soit N le corps des points fixes de $M(K_\infty)$ par $\psi_{K_\infty}(\mathcal{I}_0 Z_\infty)$. Comme $M(K_0)$ est une extension abélienne de K_0, on a $(\sigma \cdot x)x^{-1} \in \mathrm{Gal}(M(K_\infty)/M(K_0))$ pour tout $\sigma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathrm{Gal}(M(K_\infty)/K_\infty)$. Par suite $\psi_{K_\infty}(\mathcal{I}_0 Z_\infty) \subset \mathrm{Gal}(M(K_\infty)/M(K_0))$, et donc:

$$K_0 \subset K_\infty \subset M(K_0) \subset N \subset M(K_\infty).$$

Pour tout i avec $1 \leq i \leq r$, choisissons dans $\mathrm{Gal}(N/K_0)$ un élément τ_i dont l'image dans $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)$ est σ_i. Comme $M(K_0)$ est l'extension maximale abélienne de K_0 contenue dans N, on voit facilement que $\mathrm{Gal}(N/M(K_0))$ est engendré sur $\mathbb{Z}_p$ par les $\theta_{i,i'}$ où, pour $1 \leq i < i' \leq r$: $\theta_{i,i'} = \tau_i \tau_{i'} \tau_i^{-1} \tau_{i'}^{-1}$.

Remarque: Il est vrai, mais plus délicat à prouver, que les $\theta_{i,i'}$ forment une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Gal}(N/M(K_0))$. Pour $r = 2$, cela résulte de la proposition du §4.

Lemme 5.2: *Soit F et F' deux extensions de K contenues dans K_∞ avec $F \subset F'$ et* $\mathrm{Gal}(F'/F) \approx \mathbb{Z}_p$. *Soit σ un élément de G dont l'image dans* $\mathrm{Gal}(F'/K)$ *est un générateur de* $\mathrm{Gal}(F'/F)$. *Alors:*

(i) *le noyau de $N_{F'/F}: Z(F') \to Z(F)$ est $(\sigma - 1)Z(F')$,*

(ii) *si Z' est l'image de $N_{F'/F}$, alors le quotient $Z(F)/Z'$ est isomorphe, en tant que Λ-module, à $\mathbb{Z}_p$* (cf. 4),

(iii) *la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(F')$.*

Démonstration du (i): Soit P le corps des points fixes de $M(F')$ par $\psi_{F'}((\sigma - 1)Z(F'))$. Il s'agit de montrer que $P = M(F)$. Clairement, $M(F) \subset P$. Tout revient donc à montrer que P/F est abélienne. Soit τ un élément de $\mathrm{Gal}(P/F)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(F'/F)$ coïncide avec celle de σ. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(P/F')$ provenant via l'application d'Artin de $z \in Z(F')/(\sigma-1)Z(F')$, le commutateur $\tau\gamma\tau^{-1}\gamma^{-1}$ provient de $(\sigma-1)z$, qui clairement est nul. On voit donc que τ commute à tout élément de $\mathrm{Gal}(P/F')$. Comme le groupe $\mathrm{Gal}(P/F)$ est engendré par τ et les éléments de $\mathrm{Gal}(P/F')$, il en résulte que $\mathrm{Gal}(P/F)$ est commutatif. Cela prouve le (i).

Démonstration du (ii): On a la suite exacte:

$$1 \to \mathrm{Gal}(M(F)/F') \to \mathrm{Gal}(M(F)/F) \to \mathrm{Gal}(F'/F) \to 1.$$

Puisque F'/K est abélienne, G agit trivialement sur $\mathrm{Gal}(F'/F)$ et la suite exacte ci-dessus donne la suite exacte de Λ-modules:

$$0 \to Z' \to Z(F) \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

Cela prouve le (ii).

Démonstration du (iii): Supposons tout d'abord $F/\mathbb{Q}_p$ finie. Dans ce cas, le résultat découle immédiatement du théorème d'Iwasawa, cf. th. 25 de [1], donnant la structure de $Z(F')$ en tant que module sur l'algèbre des mesures sur $\mathrm{Gal}(F'/F)$: si $\mu_{p^\infty}(F')$ est fini, le module $Z(F')$ se plonge dans un module libre (avec un quotient isomorphe à $\mu_{p^\infty}(F')$), si $\mu_{p^\infty}(F')$ est infini, le module $Z(F')$ est somme directe d'un module libre et du module de Tate $T(\mu_{p^\infty})$.

Passons au cas général. Choisissons E_0 et E_0' extensions de K avec E_0/K finie, $E_0 \subset F$, $E_0 \subset E_0' \subset F'$, $E_0' \cap F = E_0$ et $E_0'F = F'$. Pour chaque extension finie E de E_0 contenue dans F, il résulte du cas particulier précédemment traité que la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(E_0'E)$. Comme $Z(F') = \varprojlim Z(EE_0')$, il en résulte que la multiplication par $\sigma - 1$ est injective dans $Z(F')$. Cela achève la démonstration du lemme.

(5.3) *Démonstration de la proposition*

Démonstration du (i): Raisonnons par récurrence sur r. Pour $r = 1$, le noyau de $N_{K_\infty/K_0}: Z_\infty \to \widehat{K_0^*}$ est T_1Z_∞, cf. (i) du lemme précédent. Cela prouve le résultat dans ce cas.

Supposons $r \geq 2$. Notons F le corps des points fixes de K_∞ par σ_r et Z' l'image de Z_∞ dans $Z(F)$. Le noyau de $N_{K_\infty/F}: Z_\infty \to Z(F)$ est T_rZ_∞, cf. (i) du lemme précédent. On a donc $Z' \approx Z_\infty/T_rZ_\infty$. Comme, cf. (ii) du lemme précédent, le quotient $Z(F)/Z'$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ en tant que Λ-module, on a $Z(F)_\Phi = Z'_\Phi$, pour tout $\Phi \neq \Phi_0$. Alors, $Z(F)_\Phi \approx Z_{\infty,\Phi}/T_rZ_{\infty,\Phi}$ et:

$$Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_0 Z_{\infty,\Phi} \approx Z(F)_\Phi/T_1 Z(F)_\Phi + \cdots + T_{r-1} Z(F)_\Phi.$$

Comme, d'après l'hypothèse de récurrence, le noyau de la projection de $Z(F)_\Phi$ dans $\widehat{K^*_{0,\Phi}}$ est $T_1 Z(F)_\Phi + \cdots + T_{r-1} Z(F)_\Phi$, on en déduit que le noyau de la projection de $Z_{\infty,\Phi}$ dans $\widehat{K^*_{0,\Phi}}$ est $\mathcal{I}_0 Z_{\infty,\Phi}$. Cela prouve le (i).

Démonstration du (ii): Soit F le corps des points fixes de K_∞ par σ_2. Notons Z' l'image de Z_∞ dans $Z(F)$. On a, cf. (ii) du lemme précédent, la suite exacte:

$$0 \to Z' \to Z(F) \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

La multiplication par T_1 est injective dans $Z(F)$, cf. (iii) du lemme précédent. On déduit alors de la suite exacte ci-dessus, la suite exacte:

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to Z'/T_1 Z' \to Z(F)/T_1 Z(F) \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

D'après le (i) du lemme précédent, l'homomorphisme $N_{K_\infty/F}$ induit un isomorphisme de $Z_\infty/T_2 Z_\infty$ sur Z'; de même, N_{F/K_0} induit une injection de $Z(F)/T_1 Z(F)$ dans $\widehat{K^*_0}$. Par suite, la suite exacte ci-dessus donne:

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to Z_\infty/T_1 Z_\infty + T_2 Z_\infty \to \widehat{K^*_0}.$$

On en déduit que le noyau de l'homomorphisme de $Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_0 Z_{\infty,\Phi_0}$ dans $\widehat{K^*_{0,\Phi_0}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Cela achève la démonstration de la proposition.

(5.4) *Un lemme concernant les modules sur les anneaux de séries formelles*

Lemme: *Soit p un nombre premier. Soit B un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathcal{M}$. On suppose que $p \in \mathcal{M}$. Soit $S = B[[X_1, X_2, \ldots, X_k]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans B et en les k indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Pour tout entier j avec $1 \leq j \leq k$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons: $s_{n,j} = (1 + X_j)^{p^n} - 1$. Soit $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de S. Soit M un module sur S, séparé et complet pour sa topologie $\mathfrak{M}$-adique. On suppose qu'il existe un entier h tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le B-module $M/s_{n,1}M + s_{n,2}M + \cdots + s_{n,k}M$ est libre de rang hp^{kn}. Alors M est libre de rang h sur S.*

Démonstration: Soit $x_1, x_2, \ldots, x_h$ des éléments de M relevant une base de $M/X_1 M + X_2 M + \cdots + X_k M$ en tant que module sur B.

Un raisonnement par approximations successives facile montre que les x_i engendrent M, en tant que module sur S. Considérons alors l'homomorphisme surjectif i de S-module de S^h dans M, qui à $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ associe $\Sigma_{i=1}^{i=h} \alpha_i x_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il induit un homomorphisme surjectif i_n de $(S/s_{n,1}S + s_{n,2}S + \cdots + s_{n,k}S)^h$ dans $M/s_{n,1}M + s_{n,2}M + \cdots + s_{n,k}M$. Pour $1 \leq j \leq k$, le polynôme $s_{n,j}$ est un polynôme distingué de $B[[X_j]]$, le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que $S/s_{n,1}S + s_{n,2}S + \cdots + s_{n,k}S$ est libre de rang p^{nk} sur B. Par suite $(S/s_{n,1}S + s_{n,2}S + \cdots + s_{n,k}S)^h$ est libre de rang hp^{nk}. Il en est de même de $M/s_{n,1}M + s_{n,2}M + \cdots + s_{n,k}M$ par hypothèse. On voit donc que les i_n, dont on sait déjà qu'ils sont surjectifs, sont des isomorphismes.

Une récurrence facile montre que, puisque $p \in \mathcal{M}$, on a $s_{n,j} \in \mathfrak{M}^{n+1}$. Comme S et M sont séparés et complets pour leur topologie $\mathfrak{M}$-adique, on en déduit que $S = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} S/s_{n,1}S + s_{n,2}S + \cdots + s_{n,k}S$ et $M = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/s_{n,1}M + s_{n,2}M + \cdots + s_{n,k}M$. Comme les i_n sont des isomorphismes, il en résulte que i est aussi un isomorphisme, et $M \simeq S^h$. Cela prouve le lemme.

(5.5) *Démonstration des* (i) *et* (ii) *du théorème*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout i avec $1 \leq i \leq r$, on pose $\omega_{n,i} = (1 + T_i)^{p^n} - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_n$ l'idéal de Λ engendré par les $\omega_{n,i}$ pour $1 \leq i \leq r$.

LEMME 5.5.1: *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Le* A_Φ-*module* $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}$ *est libre de rang* $\mathrm{d}p^{nr}$ *dans les cas suivants: si* $r = 2$ *et* $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ *pour tout* Φ, *si* $r = 2$ *et* $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$ *pour tout* $\Phi \neq \bar{\chi}$, *si* $r \geq 3$ *pour tout* Φ *distinct de* $\bar{\chi}$ *et de* Φ_0. *Si* $r = 2$, *le rang sur* $A_{\bar{\chi}}$ *de* $Z_{\infty,\bar{\chi}}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\bar{\chi}}$ *modulo torsion est* $\mathrm{d}p^{2n}$.

DÉMONSTRATION: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Z_n l'image dė Z_∞ dans $\widehat{K_n^*}$. Si M est une module et type fini sur en anneau principal B, désignons par $rg_B(M)$ le rang de M modulo torsion.

Appliquons la proposition à l'extension de groupe de Galois $p^n\Gamma \times \Delta$: pour $r \geq 2$ et $\Phi \neq \Phi_0$, on a $Z_{n,\Phi} \simeq Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}$; pour $r = 2$, le noyau de l'homomorphisme de $Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_0}$ dans $\widehat{K_n^*}$ est isomorphe à Z_p. On a donc:

$$\text{(I)}: \begin{cases} rg_{A_\Phi}(Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}) = rg_{A_\Phi}(Z_{n,\Phi}), \text{ pour } \Phi \neq \Phi_0, \\ rg_{A_{\Phi_0}}(Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_0}) = rg_{A_{\Phi_0}}(Z_{n,\Phi_0}) + 1, \text{ pour } r = 2. \end{cases}$$

Le groupe Z_n est isomorphe, par la théorie du corps de classe, à $\mathrm{Gal}(M(K_n)/K_\infty)$ et donc le quotient $\widehat{K_n^*}/Z_n$ à $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$. Par suite:

$$\text{(II)}: \begin{cases} rg_{A_\Phi}(Z_{n,\Phi}) = rg_{A_\Phi}(\widehat{K^*_{n,\Phi}}), \text{ si } \Phi \neq \Phi_0, \\ rg_{A_{\Phi_0}}(Z_{n,\Phi_0}) = rg_{A_{\Phi_0}}(\widehat{K^*_{n,\Phi_0}}) - r. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{O}_n$ l'anneau des entiers de K_n et U_n le groupe des unités fondamentales de K_n. On sait qu'il existe un sous $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module V_n de U_n d'indice fini tel que le logarithme p-adique induise un isomorphisme de V_n sur un sous-$\mathbb{Z}_p[G_n]$-module d'indice fini de $\mathcal{O}_n$. On a alors: $rg_{\mathbb{Z}_p}(U_{n,\Phi}) = rg_{\mathbb{Z}_p}(V_{n,\Phi}) = rg_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{n,\Phi}) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(K_{n,\Phi})$. Comme K_n est libre de rang d sur $\mathbb{Q}_p[G_n]$, on en déduit que $rg_{\mathbb{Z}_p}(U_{n,\Phi}) = d[Q_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_\Phi : \mathbb{Q}_p]p^m$, d'où: $rg_{A_\Phi}(U_{n,\Phi}) = \mathrm{d}p^m$ et:

$$\text{(III)}: \begin{cases} rg_{A_\Phi}(\widehat{K^*_{n,\Phi}}) = \mathrm{d}p^m, \text{ si } \Phi \neq \Phi_0, \\ rg_{A_{\Phi_0}}(\widehat{K^*_{n,\Phi_0}}) = \mathrm{d}p^m + 1. \end{cases}$$

De (I), (II) et (III) résulte immédiatement que $rg_{A_\Phi}(Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}) = \mathrm{d}p^m$, pour tout Φ si $r = 2$, et pour tout $\Phi \neq \Phi_0$ si $r \geq 3$.

Pour $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$ ou pour $\mu_{p^\infty}(K_\infty) \neq \{1\}$ et $\Phi \neq \bar{\chi}$, le A_Φ-module $Z_{n,\Phi}$ est sans torsion. Il en est de même de $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}$ si $\Phi \neq \Phi_0$ ou $r = 2$, puisque $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi} \simeq Z_{n,\Phi}$ si $\Phi \neq \Phi_0$ et que pour $r = 2$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_0} \to Z_{n,\Phi_0} \to 0.$$

Cela achève de prouver le lemme.

Remarque: On voit facilement que, comme le rang sur $\mathbb{Z}_p$ du noyau de l'homomorphisme de $Z_\infty/\mathcal{I}_n Z_\infty$ dans $\widehat{K_n^*}$ est $r(r-1)/2$, cf. remarque du (5.1), on a $rg_{\mathbb{Z}_p}(Z_{\infty,\Phi_0}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi_0}) = \mathrm{d}p^m + \frac{(r-1)(r-2)}{2}$. Il en résulte que, pour $r > 2$, Z_{∞,Φ_0} n'est pas libre sur Λ_{Φ_0}.

Lemme 5.5.2: *Pour $r = 2$ ou $r \geq 3$ et $\Phi \neq \Phi_0$, le Λ_Φ-module $Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini.*

Démonstration: Comme $Z_{\infty,\Phi}$ est compact et que, d'après le lemme précédent, $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{M}_\Phi Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini sur $\Lambda_\Phi/\mathcal{M}_\Phi$, le lemme résulte d'une version topologique du lemme de Nakayama (voir par exemple p. 126 de [2]).

(5.5.3) *Examen des cas $r = 2$ et $\mu_{p^\infty}(K_\infty) = \{1\}$, $r = 2$ et $\Phi \neq \bar{\chi}$, $r \geq 3$ et Φ distinct de Φ_0 et de $\bar{\chi}$.*

Comme $Z_{\infty,\Phi}$ est de type fini, il est séparé et complet pour sa topologie $\mathcal{M}_\Phi$-adique. Dans chacun des cas considérés, $Z_{\infty,\Phi}/\mathcal{I}_n Z_{\infty,\Phi}$ est libre sur A_Φ de rang dp^m, cf. lemme (5.5.1); le lemme (5.4) montre alors que $Z_{\infty,\Phi}$ est libre de rang d sur Λ_Φ.

(5.5.4) *Examen du cas* $r = 2$, $\mu_{p^\infty}(K_\infty)$ *infini*, $p \neq 2$ *ou* $\mu_4 \subset K$ *et* $\Phi = \bar{\chi}$.

On note χ le caractère de G à valeurs dans les unités de $\mathbb{Z}_p$ donnant l'action de G sur μ_{p^∞} (on voit facilement que $\bar{\chi}$ est la restriction de χ à Δ). On choisit les générateurs σ_1 et σ_2 de Γ de telle sorte que σ_1 engendre le noyau de la restriction de χ à Γ. On note p^{m_0} le cardinal de $\mu_{p^\infty}(K_0)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le corps des points fixes de K_∞ par le groupe engendré par σ_2 et $\sigma_1^{p^n}$. (Donc $F_0 = K_0$; on voit facilement que $\mu_{p^\infty}(F_n) = \mu_{p^{m_0}}$ et que $F_n(\mu_{p^\infty})$ est le corps des points fixes de K_∞ par $\sigma_1^{p^n}$). Pour $m \geq m_0$, la restriction à $\mu_{p^{m+1}}$ de la norme de $F_n(\mu_{p^{m+1}})$ à $F_n(\mu_{p^m})$ est: $\xi \mapsto \xi^p$, si $p \neq 2$, et: $\xi \mapsto -\xi^2$, si $p = 2$. Dans tous les cas, on en déduit un homomorphisme injectif i_n de $T(\mu_{p^\infty})$ dans $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$.

LEMME: *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *désignons par* Z'_n *l'image par* $N_{K_\infty/F_n(\mu_{p^\infty})}$ *de* Z_∞ *dans* $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$ *et par* f_n *l'homomorphisme de* $\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z'_n)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z_\infty)$ *correspondant à la suite exacte:*

$$0 \longrightarrow Z_\infty \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} Z_\infty \longrightarrow Z'_n \longrightarrow 0.$$

(i) *On a* $i_n(T(\mu_{p^\infty})) \subset Z'_n$.

(ii) *D'après le* (i), *on a* $i_n \in \mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z'_n)$; *l'image de* i_n *par* f_n *ne dépend pas de* n.

DÉMONSTRATION: Montrons le (i). Pour $m \geq m_0$, désignons par $Z'_{n,m}$ l'image de Z_∞ dans $\widehat{F_n(\mu_{p^m})}^*$. Le quotient $\widehat{F_n(\mu_{p^m})}^*/Z'_{n,m}$ est isomorphe, via l'application d'Artin, à $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_n(\mu_{p^m}))$. Il est donc sans torsion en tant que module sur $\mathbb{Z}_p$. Par suite μ_{p^m} est inclus dans $Z'_{n,m}$. Un argument de compacité facile prouve que $Z'_n = \varprojlim_{m \geq m_0} Z'_{n,m}$. Il en résulte que $i_n(T(\mu_{p^\infty})) \subset Z'_n$. Cela prouve le (i).

Montrons le (ii). Soit n' un entier $\geq n$. Comme, sur $\widehat{F_{n'}(\mu_{p^m})}^*$, la multiplication par $\omega_{n',1}/\omega_{n,1}$ coïncide avec $N_{F_{n'}(\mu_{p^m})/F_n(\mu_{p^m})}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\text{(I):}\quad \begin{tikzcd} T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r, "i_n"] \arrow[dr, "i_{n'}"'] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] \\ & Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty \end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant est commutatif et ses lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n,1}"] \arrow[d, equal, "Id"] & Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n',1}"] & Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par suite:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\times\omega_{n',1}/\omega_{n,1}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z_\infty) \arrow[d, equal, "Id"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z_\infty/\omega_{n',1}Z_\infty) \arrow[r, "f_{n'}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T(\mu_{p^\infty}), Z_\infty).
\end{tikzcd}$$

De (I) on déduit alors que $f_n(i_n) = f_{n'}(i_{n'})$. Cela achève la démonstration du lemme.

Soit L l'extension de $T(\mu_{p^\infty})$ par Z_∞ correspondant aux $f_n(i_n)$. Le reste de cette section est consacrée à prouver que $L_{\bar\chi}$ est libre de rang d sur $\Lambda_{\bar\chi}$. Pour cela:

LEMME: *Pour tout entier* $n \geq 0$:

(i) *l'homomorphisme de* $L/\mathcal{I}_nL$ *dans* $L/\mathcal{I}_{n+1}L$ *induit par la multiplication par* $\omega_{n+1,1} \times \omega_{n+1,2}/\omega_{n,1} \times \omega_{n,2}$ *est injectif,*

(ii) *on a la suite exacte:*

$$0 \to \mu_{p^\infty}(K_n) \to Z_\infty/\mathcal{I}_nZ_\infty \to L/\mathcal{I}_nL \to \mu_{p^\infty}(K_n) \to 0,$$

où les trois flèches de droite sont obtenues en appliquant le foncteur $\cdot \otimes_\Lambda \Lambda/\mathcal{I}_n$ *à la suite exacte:*

$$0 \to Z_\infty \to L \to T(\mu_{p^\infty}) \to 0,$$

et où le composé de la flèche de $\mu_{p^\infty}(K_n)$ *dans* $Z_\infty/\mathcal{I}_nZ_\infty$ *avec l'homomorphisme de* $Z_\infty/\mathcal{I}_nZ_\infty$ *dans* $\widehat{K_n^*}$ *induit par* N_{K_∞/K_n} *est l'injection naturelle de* $\mu_{p^\infty}(K_n)$ *dans* $\widehat{K_n^*}$.

DÉMONSTRATION: On vérifie facilement que, pour montrer le (i), il suffit de prouver:

$$
\text{(II)}: \begin{cases} (1)\ \operatorname{Ker}(L/\omega_{n+1,2}L \xrightarrow{\times\omega_{n+1,1}} L/\omega_{n+1,2}L) = 0 \\ (2)\ \operatorname{Ker}(L/\omega_{n,1}L \xrightarrow{\times\omega_{n+1,2}} L/\omega_{n,1}L) = 0. \end{cases}
$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la définition de L, on a un homomorphisme de L dans Z_∞ rendant commutatif le diagramme, cf. [3], chap. IV, §1:

$$
\text{(III)}: \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id"] & L \arrow[r] \arrow[d] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n,1}"] & Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}
$$

On en déduit, puisque la multiplication par $\omega_{n,1}$ est injective dans Z_∞, cf. (iii) du lemme (5.2):

$$
\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L) \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id"] & L/\omega_{n,1}L \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty}) \arrow[r] & 0 \\ & & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r, equal, "Id"] & Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty & & & \end{tikzcd}
$$

Soit l un entier ≥ 0. La multiplication par $\omega_{l,2}$ est injective dans le quotient de $Z(F_n(\mu_{p^\infty}))$ par l'image de $T(\mu_{p^\infty})$, puisque, d'après le théorème d'Iwasawa, cf. th. 25 de [1], ce quotient est libre sur l'algèbre des mesures p-adiques sur $\operatorname{Gal}(F_n(\mu_{p^\infty})/F_n)$. La multiplication par $\omega_{l,2}$ est donc injective dans le quotient de $Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty$ par $i_n(T(\mu_{p^\infty}))$. Comme elle l'est aussi dans $T(\mu_{p^\infty})$, il résulte du diagramme ci-dessus que $\operatorname{Ker}(L/\omega_{n,1}L \xrightarrow{\times\omega_{l,2}} L/\omega_{n,1}L) = 0$. Cela prouve (II), (2).

Prouvons le (II) (1) et le (ii). Pour cela, comme la multiplication par $\omega_{l,2}$ est injective dans $Z_\infty/\omega_{n,1}Z_\infty$ et dans $T(\mu_{p^\infty})$, on déduit de (III):

$$
\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id"] & L/\omega_{l,2}L \arrow[r] \arrow[d] & \mu_{p^{m_0+l}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty \arrow[r, "\times\omega_{n,1}"] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty \arrow[r] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}
$$

Puisque la multiplication par $\omega_{n,1}$ est injective dans $Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty$, on en déduit:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(L/\omega_{l,2}L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L/\omega_{l,2}L) \arrow[dl, bend left] & & & \\
\mu_{p^{m_0+l}} \arrow[r] \arrow[d] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id"] & L/\omega_{l,2}L + \omega_{n,1}L \arrow[r] & \mu_{p^{m_0+l}} \arrow[r] & 0 \\
Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty \arrow[r, equal, "Id"] & Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty & & &
\end{tikzcd}$$

La flèche de $\mu_{p^{m_0+l}}$ dans $Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty$ se déduit de i_n en prenant le foncteur $\cdot \otimes_\Lambda \Lambda/\omega_{l,2}\Lambda + \omega_{n,1}\Lambda$. Il en résulte facilement que si on la compose avec l'homomorphisme de $Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty$ dans $F_n\widehat{(\mu_{p^{l+m_0}})}^*$ induit par la projection, on obtient l'injection naturelle de $\mu_{p^{l+m_0}}$ dans $F_n\widehat{(\mu_{p^{l+m_0}})}^*$. On en déduit que la flèche de $\mu_{p^{m_0+l}}$ dans $Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty$ est injective. Par suite

$$\mathrm{Ker}(L/\omega_{l,2}L \xrightarrow{\times\omega_{n,1}} L/\omega_{l,2}L) = 0,$$

et on a la suite exacte:

$$0 \to \mu_{p^{m_0+l}} \to Z_\infty/\omega_{l,2}Z_\infty + \omega_{n,1}Z_\infty \to L/\omega_{l,2}L + \omega_{n,1}L \to \mu_{p^{m_0+l}} \to 0.$$

Cela montre (II) (1) et le (ii) et cela achève la démonstration du lemme.

Achevons la démonstration du (i) du théorème.

Prouvons tout d'abord que $L_{\bar\chi}/\mathcal{J}_n L_{\bar\chi}$ est sans torsion, en tant que module sur Z_p. Soit pour cela $x \in L/\mathcal{J}_n L$ avec $px = 0$; montrons que $x = 0$. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & L/\mathcal{J}_n L \arrow[r] \arrow[d] & T(\mu_{p^\infty})/\mathcal{J}_n T(\mu_{p^\infty}) \simeq \mu_{p^{n+m_0}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty \arrow[r] & L/\mathcal{J}_{n+1}L \arrow[r] & T(\mu_{p^\infty})/\mathcal{J}_{n+1}T(\mu_{p^\infty}) \simeq \mu_{p^{n+m_0+1}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont induites par la multiplication par $\omega_{n+1,1} \times \omega_{n+1,2}/\omega_{n,1} \times \omega_{n,2}$; en particulier, la flèche de $\mu_{p^{n+m_0}}$ dans $\mu_{p^{n+m_0+1}}$ est l'élévation à la puissance p. On voit donc que l'image de x dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ appartient à l'image de $Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty$ dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$. L'image de $Z_\infty/\mathcal{J}_{n+1}Z_\infty$ dans $L/\mathcal{J}_{n+1}L$ est sans torsion: cela résulte facilement du diagramme ci-dessous, cf. (ii) du lemme précédent:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^\infty}(K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[dr] & Z_\infty/\mathcal{I}_{n+1}Z_\infty \arrow[r] \arrow[d] & L/\mathcal{I}_{n+1}L \arrow[r] & \mu_{p^\infty}(K_{n+1}) \arrow[r] & 0 \\
 & & \widehat{K^*_{n+1}} & & &
\end{tikzcd}$$

On voit alors que l'image de x dans $L/\mathcal{I}_{n+1}L$ est nulle. Comme, cf. (i) du lemme prédédent, la flèche de $L/\mathcal{I}_nL$ dans $L/\mathcal{I}_{n+1}L$ est injective, c'est que x est nul. Donc $L/\mathcal{I}_nL$ est sans torsion; il en est clairement de même de $L_{\bar{\chi}}/\mathcal{I}_nL_{\bar{\chi}}$.

D'autre part, il résulte immédiatement de la suite exacte du (ii) du lemme précédent que $rg_{A_{\bar{\chi}}}(L_{\bar{\chi}}/\mathcal{I}_nL_{\bar{\chi}}) = rg_{A_{\bar{\chi}}}(Z_{\infty,\bar{\chi}}/\mathcal{I}_nZ_{\infty,\bar{\chi}})$, et donc, cf. lemme (5.5.1), on a $rg_{A_{\bar{\chi}}}(L_{\bar{\chi}}/\mathcal{I}_nL_{\bar{\chi}}) = \mathrm{d}p^{2n}$. Comme $L_{\bar{\chi}}$ est de type fini en tant que module sur $\Lambda_{\bar{\chi}}$, il est séparé et complet pour sa topologie $\mathcal{M}_{\bar{\chi}}$-adique. Le lemme (5.4) montre alors qu'il est libre de rang d. Le (i) et le (ii) du théorème sont complètement démontrés.

Démonstration du (iii) *du théorème*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons v_n l'homorphisme de $\widehat{K^*_n}$ dans $\mathbb{Z}_p$ induit par la valuation; notons e_n l'indice de ramification de K_{n+1} sur K_n et $N_{n+1,n}$ l'homomorphisme N_{K_{n+1}/K_n}. Si U_n est la groupe des unités fondamentales de K_n, on a:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "N_{n+1,n}"] & \widehat{K^*_{n+1}} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "N_{n+1,n}"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "\times p^r/e_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_n \arrow[r] & \widehat{K^*_n} \arrow[r, "v_n"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Avec un argument de compacité facile, on en déduit, passant à la limite projective, la suite exacte:

$$0 \to U_\infty \to Z_\infty \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p \to 0.$$

Si le corps résiduel de K_∞ est infini, on a $e_n = p^{r-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p = 0$. D'où $U_\infty = Z_\infty$ et $U_{\infty,\Phi} = Z_{\infty,\Phi}$ pour tout Φ.