COMPOSITIO MATHEMATICA

B. MALGRANGE

Réduction d'un système microdifférentiel aux points génériques. I

Compositio Mathematica, tome 44, nº 1-3 (1981), p. 133-143

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__44_1-3_133_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 44, Fasc. 1-3, 1981, pag. 133–143
© 1981 Sijthoff & Noordhoff International Publishers – Alphen aan den Rijn
Printed in the Netherlands

REDUCTION D'UN SYSTEME MICRODIFFERENTIEL AUX POINTS GENERIQUES. I.

B. Malgrange

Cet article est dédié à la mémoire d'Aldo Andreotti; comme beaucoup d'autres mathématiciens, j'ai eu souvent l'occasion de profiter de son exceptionnelle ouverture d'esprit, de sa culture, et de son amitié. Je ne peux que dire ici l'émotion que j'éprouve à rappeler ces souvenirs.

Introduction

(0.1) Soit X une variété analytique complexe, et $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ son cotangent; on notera ici $\mathscr{E}$, au lieu de la notation usuelle $\hat{\mathscr{E}}$, le faisceau des opérateurs microdifférentiels formels sur $T^*X - \{0\}$ (voir [4], où ce faisceau est noté $\hat{\mathscr{P}}$; on trouvera aussi un résumé des propriétés fondamentales de $\mathscr{E}$ dans [1]).

Rappelons, pour fixer les notations, comment $\mathscr{E}$ peut être défini en coordonnés locales; soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur X, et (x, ξ), $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, le système de coordonnées qui lui est canoniquement associé sur T^*X; prenons un point $w = (x^0, \xi^0) \in T^*X - \{0\}$; alors $\mathscr{E}_w$ est isomorphe à l'ensemble des séries formelles $a(x, \xi) = \Sigma_{q \le q_0} a_q(x, \xi)$ $(q \in \mathbb{Z})$, où les a_p sont holomorphes sur un même voisinage de w, et a_p homogène de degré p par rapport à ξ; il est usuel de noter $a(x, \partial)$ l'élément de $\mathscr{E}_w$ ainsi défini et d'appeler "symbole total" ou "symbole" l'application $\sigma : a(x, \partial) \mapsto a(x, \xi)$; enfin $\mathscr{E}_w$ est muni de l'addition évidente, et de la multiplication obtenue par la formule suivante, extension des relations de commutation usuelles $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$:

$$\sigma(a(x, \partial)b(x, \partial)) = \sum \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a(x, \xi) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha b(x, \xi) \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n).$$

0010–437X/81/07133–11$00.20/0

Soit $\mathscr{E}(p)$ le sous-faisceau des éléments de degré $\leq p$ de $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire ceux qui vérifient $a_q = 0$ pour $q > p$). Cette filtration possède les propriétés suivantes

i) Le gradué associé $\bigoplus \mathscr{E}(p)/\mathscr{E}(p-1)$ est isomorphe, par $gr\,\sigma$ à $\bigoplus \mathcal{O}(p)$, $\mathcal{O}(p)$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*X - \{0\}$, homogènes de degré p.

ii) L'isomorphisme précédent est invariant par changement de coordonnées, contrairement à σ pour lequel la formule de changement de variables est plus compliquée (voir loc. cit.); on identifie donc $\mathscr{E}(p)/\mathscr{E}(p-1)$ à $\mathcal{O}(p)$; pour $a \in \mathscr{E}(p)$, on appelle symbole principal (sous-entendu: de degré p) de a et l'on note $\bar{\sigma}(a)$ sa classe dans $\mathcal{O}(p)$.

(0.2) Je renvoie aux articles cités pour les propriétés fondamentales de $\mathscr{E}$ (cohérence, théorème de préparation, extension à $\mathscr{E}$ des transformations canoniques). Soit U un ouvert de $T^*X - \{0\}$, qu'on peut supposer conique, i.e. stable par l'action de $\mathbb{C}^*$ dans la fibre, et soit M un $\mathscr{E}|U$ – Module cohérent. Désignons par Λ le support ou ("variété caractéristique") de M, qui est un sous-ensemble analytique conique de U. Notre but est de donner un théorème de structure de M "aux points génériques de Λ", c'est-à-dire aux points d'un ouvert conique dense de Λ, pour la topologie usuelle; en fait, en modifiant convenablement les démonstrations, on pourrait établir que ces propriétés sont vraies sur un ouvert Zariski-dense, mais je laisserai de côté ce point qui alourdirait sérieusement les démonstrations sans apporter d'idée nouvelle.

Le cas où codim $\Lambda = 0$ est évident: génériquement M est libre de rang fini sur $\mathscr{E}$ (ceci se voit en se ramenant, par le théorème de préparation, au résultat analogue pour un $\mathcal{O}(0)$-Module cohérent). Dans cet article, je traiterai le cas où codim $\Lambda = 1$, cas dans lequel l'essentiel de la difficulté est concentrée; dans un article ultérieur, j'examinerai les cas de codimension supérieure, et aussi les problèmes qui se posent lorsqu'on travaille avec des opérateurs microdifférentiels convergents et non plus formels.

Si codim $\Lambda = 1$, génériquement Λ est lisse; en un point "non dégénéré" de Λ, i.e. en un point où la forme fondamentale $\lambda = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$ de T^*X ne s'annule pas, on peut par une transformation canonique, se ramener au cas où Λ est défini par $\xi_1 = 0$. Nous ferons donc désormais cette hypothèse. La démonstration est une variante d'une des démonstrations possibles du théorème classique de réduction formelle d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'une singularité, à savoir celle qui est donnée dans [2] et [3]; cette dernière démonstration n'est elle-même qu'une variante de la méthode bien connue pour trouver le développement de Puiseux d'une courbe à partir de son polygône de Newton. Ici, les ramifications que l'on doit faire intervenir seront exprimées au moyen d'opérateurs microdifférentiels d'ordre fractionnaire; pour terminer cette introduction, je vais dire quelques mots à ce sujet, qui serviront à fixer les notations.

(0.3) Soit p un entier ≥ 1. Le faisceau des opérateurs microdifférentiels (formels) d'ordre p-fractionnaire, qui sera noté $\mathscr{E}_p$, est défini comme $\mathscr{E}$, à partir de symboles $a = \sum_{q_0}^{-\infty} a_q(x, \xi)$, avec ici $q \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$, a_q homogène de degré q, les a_q convergeant sur un même voisinage de (x^0, ξ^0). Les propriétés fondamentales de $\mathscr{E}_p$ sont analogues à celles de $\mathscr{E}$, et s'obtiennent en recopiant les démonstrations faites dans ce dernier cas; je les utiliserai donc librement, même si je n'ai pas toujours de référence explicite à en fournir. A noter qu'ici, pour $a \in \mathscr{E}_p(q)$, $\left(q \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}\right)$, il y a lieu de distinguer entre deux notions de symbole principal

i) le "symbole principal" tout court $\bar{\sigma}(a) \in \mathscr{E}_p(q)/\mathscr{E}_p\left(q - \frac{1}{p}\right) = \mathcal{O}(q)$.

ii) le "symbole principal large" $\bar{\bar{\sigma}}(a) \in \mathscr{E}_p(q)/\mathscr{E}_p(q-1)$; au point de vue additif et multiplicatif, ce dernier espace s'identifie à $\bigoplus_{q \leq p} \mathcal{O}(q) / \bigoplus_{q \leq p-1} \mathcal{O}(q)$ $\left(q \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}\right)$, et ceci d'une manière indépendante du choix des coordonnées; du point de vue additif, on peut encore l'identifier, si l'on veut, à $\bigoplus_{p-1<q\leq p} \mathcal{O}(q)$.

1. Polygone de Newton

(1.1) On prend ici $X = \mathbb{C}^n$, et U un ouvert conique connexe dans $T^*X - \{0\}$. Soit $\tilde{\mathscr{E}}$ le sous-faisceau de $\mathscr{E}$ formé des éléments dont le symbole est indépendant de ξ_1. Soit $a \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1](U)$; on a donc $a = \sum_0^m a_i \partial_1^i$, avec $a_i \in \tilde{\mathscr{E}}(U)$.

Soit d'autre part $\mathfrak{q}$ le "troisième quadrant" de $\mathbb{R}^2$, i.e. l'ensemble des $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient $u \leq 0$, $v \leq 0$; pour $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathfrak{q}(u_0, v_0)$ le translaté de $\mathfrak{q}$ par (u_0, v_0). On considère alors l'ensemble $M(a)$ dans $\mathbb{R}^2$ réunion des quadrants $\mathfrak{q}(i, \deg a_i)$ (si $a_i = 0$, on convient que $\deg a_i = -\infty$); par définition, le polygone de Newton $N(a)$ est l'enveloppe convexe de $M(a)$.

Au lieu d'utiliser $N(a)$, il sera commode (cf. p. ex. [3]) de considérer la "fonction de valuation" $v(a, t)$, définie pour $t \geq 0$ par la formule suivante

(1.1.1) $v(a, t) = \sup_i (\deg a_i + ti)$.

Il est immédiat de vérifier que, si $a \neq 0$, v est une fonction de t continue, affine par morceaux, convexe, et croissante, et qu'elle est déterminée par $N(a)$; les valeurs > 0 de t où la dérivée de v est discontinue sont les pentes des côtes du polygone de Newton, changées de signe; on les appellera "valeurs exceptionnelles de t". Inversement, le graphe φ de $N(a)$ (auquel on donne la valeur $-\infty$ pour $u > m$) s'exprime à partir de v par la classique formule d'inversion de Legendre $\varphi(u) = \inf_{t \geq 0} (v(a, t) - tu)$.

Les principales propriétés de v sont les suivantes:

(1.1.2) soit $b \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1](U)$; alors on a $v(a + b, t) \leq \sup(v(a, t), v(b, t))$, avec égalité si $v(a, t) \neq v(b, t)$ (Evident).

(1.1.3) Soit $c \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1](U)$ défini par le produit ordinaire des symboles de a et b, i.e. $\sigma(c) = \sigma(a)\sigma(b)$; on a $v(ab - c, t) \leq v(a, t) + v(b, t) - t$.

En effet, il suffit de démontrer la formule lorsque a et b sont des monômes, disons $a = a_i\partial_1^i$, $b = b_j\partial_1^j$; alors la formule de Leibniz donne

$$ab - c = a_i \sum_{k \geq 1} \binom{i}{k} \frac{\partial^k b_j}{\partial x_1^k} \partial_1^{i+j-k},$$

d'où immédiatement le résultat.

Cette formule nous montre en particulier ceci: pour $t > 0$ fixé, si l'on filtre $\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$ par la valuation $v(a, t)$, le gradué associé est commutatif. D'autre part, il est classique que, pour tout $t \geq 0$, on a $v(c, t) = v(a, t) + v(b, t)$ (il suffit, par continuité, de traiter le cas d'une valeur de t qui ne soit exceptionnelle ni pour a, ni pour b; alors, il y a un seul monôme à considérer dans a et dans b, et le résultat est immédiat). Par conséquent, on aura aussi $v(ab, t) = v(a, t) + v(b, t)$ (pour $t > 0$, donc pas continuité pour $t = 0$); il est facile de vérifier que cette dernière égalité s'écrit aussi $N(ab) = N(a) + N(b)$.

(1.2) Reprenons $a = \sum_0^m a_i\partial_1^i$ comme ci-dessus, et supposons qu'on ait $a_m = 1$, $\deg a_i < m - i$ $(i \leq m - 1)$; alors le symbole principal de a est ξ_1^m, donc la variété caractéristique Λ de $\mathscr{E}/\mathscr{E}a$ est $U \cap \{\xi_1 = 0\}$; on suppose Λ non vide (sinon la situation est triviale), et connexe, quitte à rétrécir U s'il le faut. On va montrer qu'on peut décomposer génériquement $\mathscr{E}/\mathscr{E}a$ en des modules analogues où les opérateurs qui interviennent ont un polygone de Newton à une seule pente. Ceci s'obtient par récurrence à partir de la construction suivante:

Soient $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_m$ les valeurs exceptionnelles de t; à remarquer que les hypothèses faites sur a impliquent qu'on a $t_m < 1$. Choisissons un $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ et un s vérifiant $t_k < s < t_{k+1}$; soit i l'unique entier pour lequel $v(a, s) = \deg a_i + si$; on a nécessairement $1 \leq i \leq m-1$ (se voit immédiatement sur un dessin). Soit encore Λ' l'ensemble des $w \in \Lambda$ où le symbole principal de a_i ne s'annule pas; Λ' est Zariski-dense dans Λ, et l'on a la proposition suivante.

PROPOSITION (1.2.1).

1) *Sur Λ' il existe une décomposition unique $a = cb$ possédant les propriétés suivantes:*

i) on a $b = \partial_1^i + \sum_{j<i} b_j \partial_1^j, \quad c = \partial_1^{m-i} + \sum_{k<m-i} c_k \partial_1^k, \quad b_j, c_k \in \tilde{\mathscr{E}}(\Lambda')$.

ii) *Les valeurs exceptionnelles de b (resp. c) sont $t_1, \ldots, t_k$ (resp. $t_{k+1}, \ldots, t_m$).*

2) *Sur Λ', on a $\mathscr{E}/\mathscr{E}a \simeq \mathscr{E}/\mathscr{E}b \oplus \mathscr{E}/\mathscr{E}c$.*

DÉMONSTRATION DE 1: Filtrons $\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$ par $v(., s)$; alors les hypothèses faites sur b et c impliquent les conditions suivantes:

iii) le terme dominant de b est ∂_1^i, et celui de c est c_0. On établit alors l'existence et l'unicité de b et c vérifiant $a = cb$, i) et iii) par récurrence sur la filtration précédente; et regardant les termes de poids maximum, on trouve qu'on doit avoir $\bar{\sigma}(c_0) = \bar{\sigma}(a_i)$; supposons maintenant la décomposition établie modulo les poids $\leq v$, et cherchons à l'étendre modulo les poids $< v$; on devra trouver des $\beta_j(x, \xi')$ et des $\gamma_k(x, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ avec $0 \leq j \leq i-1$, $0 \leq k \leq m-i$, homogènes respectivement de degrés $v - tj - \deg c_0$ et $v - t(i+k)$ qui vérifient

$$(\Sigma \beta_j \xi_1^j) \bar{\sigma}(c_0) + (\Sigma \gamma_k \xi_1^k) \xi_1^i = (\text{un polynôme en } \xi_1 \text{ de degré } \leq m, \text{ connu}).$$

Comme $\bar{\sigma}(c_0)$ est inversible, cette équation a une solution et une seule, ce qui établit le résultat cherché; enfin ii) résulte immédiatement des propriétés vérifiées par b et c et de (1.1.3).

DÉMONSTRATION DE 2: On a sur Λ' une suite exacte

$$0 \to \mathscr{E}/\mathscr{E}c \to \mathscr{E}/\mathscr{E}a \to \mathscr{E}/\mathscr{E}b \to 0$$

où la première flèche (resp. la seconde) est définie par passage au quotient à partir de la multiplication à droite par b (resp. à partir de l'identité). On va montrer que cette suite se scinde d'une manière unique; pour cela, il suffit d'établir qu'on a $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}/\mathscr{E}b, \mathscr{E}/\mathscr{E}c) = 0$ pour

$i = 0, 1$; en considérant la résolution $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{E}b \to 0$, il revient au même démontrer que, dans $\mathscr{E}/\mathscr{E}c$, la multiplication à gauche par b est bijective; enfin, comme le théorème de préparation donne un isomorphisme $\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]/\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]c \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}/\mathscr{E}c$, il suffit démontrer la mème assertion pour $\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]/\tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]c$.

i) *Surjectivité.* Soit $d \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$; il s'agit d'établir qu'il existe e et $f \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$ vérifiant $d = be + fc$; le théorème de préparation montre qu'on a $d = qc + r$, avec $\deg_{\partial_1} r \leq m - i - 1$; on peut donc se limiter aux d de degré $\leq m - i - 1$, et a fortiori de degré $\leq m - 1$. L'assertion résulte alors du lemme suivant, qui se démontre au moyen de la filtration $v(., s)$ par le même calcul qu'en 1):

LEMME (1.2.2): *Soit $d \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$, avec $\deg_{\partial_1} d \leq m - 1$; alors il existe e et $f \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$ vérifiant $\deg_{\partial_1} e \leq m - i - 1$, $\deg_{\partial_1} f \leq i - 1$ et $d = be + fc$.*

ii) *Injectivité.* Soient e et $f \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$, vérifiant $be = fc$; il s'agit de démontrer qu'il existe $g \in \tilde{\mathscr{E}}[\partial_1]$ vérifiant $e = gc$; par le théorème de préparation, on se ramène au cas où $\deg_{\partial_1} e < m - i = \deg_{\xi_1} c$; montrons qu'on a alors $e = 0$. Sinon, l'égalité $v(b, t) + v(e, t) = v(f, t) + v(c, t)$, jointe au fait que les valeurs exceptionnelles de b et celles de c sont distinctes, montre que, aux valeurs exceptionnelles $t_{k+1}, \ldots, t_m$ de c, la dérivée $v'(e, t)$ a un saut supérieur ou égal à celui de $v'(c, t)$; or, en $t_l (l = k + 1, \ldots, m)$, le saut de $v'(c, t)$ est égal à la longueur de la première projection du côté de pente $-t_l$ de $N(c)$; on en déduit que $N(e)$ contient un côté de pente $-t_l$, de longueur supérieure ou égale au côte correspondant de $N(c)$; en particulier, on a $\deg_{\partial_1} e \geq \deg_{\partial_1} c$, contraitement à l'hypothèse. Ceci achève la démonstration.

2. Reduction formelle en codimension 1

(2.1) Soit $w \in T^*\mathbb{C}^n - \{0\}$, avec $\xi_1(w) = 0$, et soit p un entier ≥ 1; on note $\tilde{\mathscr{E}}_p$ le sous-faisceau de $\mathscr{E}_p$ formé des éléments dont le symbole est indépendant de ξ_1.

Soit $\lambda \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$, avec $\deg \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$; on pose $F_{\lambda,w} = \tilde{\mathscr{E}}_{p,w}/\tilde{\mathscr{E}}_{p,w}(\partial_1 - \lambda)$, et on note F_λ le $\tilde{\mathscr{E}}_p$-Module cohérent défini par $F_{\lambda,w}$ au voisinage de w.

PROPOSITION (2.1.1)

1) *$F_{\lambda,w}$ est indécomposable.*

2) *$F_{\lambda,w}$ et $F_{\mu,w}$ sont isomorphes si et seulement si $\deg(\lambda - \mu) \leq 0$ (ce qu'on écrira $\lambda \sim \mu$).*

3) *Si $\lambda \not\sim \mu$, on a $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{E}}_{p,w}}(F_{\lambda,w}, F_{\mu,w}) = 0$.*

4) *On a $\mathrm{Ext}^1_{\tilde{\mathscr{E}}_{p,w}}(F_{\lambda,w}, F_{\lambda,w}) = 0$.*

DÉMONSTRATION

1) Le théorème de préparation montre que $F_{\lambda,w}$ est libre de rang 1 sur $\tilde{\mathscr{E}}_w$; il suffit donc de voir que $\tilde{\mathscr{E}}_w$ est indécomposable en tant que module sur lui-même; or, si l'on a $\tilde{\mathscr{E}}_w = G \oplus H$, on a $1 = g + h$, $g \in G$, $h \in H$, d'où $g = g^2 + gh$ et $gh \in G$; comme on a aussi $gh \in H$, on a $gh = 0$, d'où $g = 0$ ou $h = 0$; comme $G = \mathscr{E}_w g$, $H = \mathscr{E}_w h$, on a $G = 0$ ou $H = 0$.

3) Soit e l'image dans $F_{\mu,w}$ de $1 \in \mathscr{E}_w$; e vérifie $(\partial_1 - \mu)e = 0$, et c'est le générateur de $F_{\mu,w}$ en tant module libre de rang 1 sur $\tilde{\mathscr{E}}_w$; un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{p,w}}(F_{\lambda,w}, F_{\mu,w})$ est donc défini par un $a \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$ vérifiant $(\partial_1 - \lambda)ae = 0$, ou encore $(\partial_1 - \lambda)a = b(\partial_1 - \mu)$, $b \in \mathscr{E}_{p,w}$; posant $b = a + c$, ceci s'écrit encore $[\partial_1, a] - \lambda a + \mu a = c(\partial_1 - \mu)$; comme le symbole du premier membre est indépendant de ξ_1, le théorème de préparation montre qu'on a $c = 0$, donc $[\partial_1, a] - \lambda a + \mu a = 0$; si $\deg(\lambda - \mu) > 0$, en prenant les symboles principaux de degré $= \deg(\lambda - \mu) + \deg a$ dans l'expression précédent, on trouve $\bar{\sigma}(\lambda - \mu)\bar{\sigma}(a) = 0$, d'où $\bar{\sigma}(a) = 0$ et donc $a = 0$.

2) Il résulte de la démonstration précédente que, pour $\lambda \not\sim \mu$, $F_{\lambda,w}$ et $F_{\mu,w}$ ne sont pas isomorphes. Montrons réciproquement que, si l'on a $\mu = \lambda + \nu$, $\deg \nu \leq 0$, alors $F_{\lambda,w}$ et $F_{\mu,w}$ sont isomorphes. En raisonnant comme ci-dessus, il suffit de trouver $a \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,0}$, de degré 0, avec $\bar{\sigma}(a)$ inversible, et vérifiant $\dfrac{\partial a}{\partial x_1} - \lambda a + a\mu = 0$, ou encore $\dfrac{\partial a}{\partial x_1} = [\lambda, a] + a\nu$; par récurrence sur le degré des termes du symbole de a, on trouve une solution et une seule de cette équation vérifiant $a_0(x_1^0, x_2, \ldots, x_n, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1$ $(x_1^0 = x_1(w))$; d'où le résultat.

4) En considérant la résolution $0 \to \mathscr{E}_{p,w} \to \mathscr{E}_{p,w} \to F_{\mu,w} \to 0$, on se ramène comme en (1.2.1) à démontrer ceci: soit $a \in \mathscr{E}_{p,w}$; alors il existe b et $c \in \mathscr{E}_{p,w}$ tels qu'on ait $a = (\partial_1 - \lambda)b + c(\partial_1 - \lambda)$; le théorème de préparation montre qu'il suffit de traiter le cas où l'on a $a \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$. Il suffit donc de voir qu'on a $a = [\partial_1 - \lambda, b]$, avec $b \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$, ou encore $a = \dfrac{\partial b}{\partial x_1} - [\lambda, b]$; or, la partie principale de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_1} - [\lambda, .]$ est $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$; on résoud alors cette équation différentielle par récurrence sur le degré des symboles.

PROPOSITION (2.1.2): *Avec les notations précédentes, supposons $\lambda \not\sim \mu$; en un point w' voisin de w où le symbole principal de $\lambda - \mu$ ne s'annule pas, on a* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{E}_{p,w}}(F_{\lambda,w'}, F_{\mu,w'}) = 0$.

En raisonnant comme ci-dessus, il suffit de voir que tout $a \in \tilde{\mathscr{E}}_{p,w'}$ s'écrit $a = (\partial_1 - \lambda)b - b(\partial_1 - \mu)$, ou encore $a = \dfrac{\partial b}{\partial x_1} - \lambda b + b\mu$; la partie principale de l'opérateur qui figure au second membre est ici

$\bar{\sigma}(\lambda - \mu)$: et par récurrence sur le degré des symboles, on trouve que cette équation a une solution unique.

(2.2) Soit U un ouvert conique de $T^*X\backslash\{0\}$, et soit $\Lambda = U \cap \{\xi_1 = 0\}$; quitte à rétrécir U, on peut supposer Λ connexe, et contenu, par example dans $\{\xi_n \neq 0\}$.

THÉORÈME (2.2.1): *Soit M un $\mathscr{E} \mid U$-Module cohérent, de support égal à Λ; alors il existe un entier $p \geq 1$ et un ouvert dense $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que, en tout point $w \in \Lambda'$, $M_{p,w} = (\mathscr{E}_p \underset{\epsilon}{\oplus} M)_w$ soit somme directe de modules de type $F_{\lambda,w}$.*

REMARQUE (2.2.2): La décomposition précédente est unique au sens suivant:

i) Pour λ fixé, la somme directe $M_{\lambda,w}$ des composantes de type $F_{\lambda,w}$ dans $M_{p,w}$ est indépendante de la décomposition choisie; ceci résulte immédiatement de la proposition (2.1.1), assertion 3).

ii) La multiplicité de $F_{\lambda,w}$ dans $M_{\lambda,w}$ est indépendante de la décomposition choisie; en effet, $F_{\lambda,w}$ est libre de rang 1 sur $\tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$; donc cette multiplicité est égale au rang de $M_{\lambda,w}$ sur $\tilde{\mathscr{E}}_{p,w}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:

a) Quitte à rétrécir U, on peut supposer que M a un nombre fini de générateurs sur $\mathscr{E}$; par récurrence sur le nombre de générateurs, en utilisant (2.1.1), assertion 4), et (2.1.2), on se ramène au cas d'un seul générateur, soit e. Soit $\mathfrak{J}$ l'Idéal Ann(e), et $\bar{\sigma}(\mathfrak{J}) \subset \mathcal{O}(0)$ son symbole principal; comme le support de $\mathscr{E}e$ est égal à Λ, génériquement, $\sigma(\mathfrak{J})$ est engendré par $(\xi_1\xi_n^{-1})^m$, donc $\mathfrak{J}(m)/\mathfrak{J}(m-1)$ par ξ_1^m; soit alors $a \in \mathfrak{J}$, avec $a = \partial_1^m + b$, $\deg b \leq m-1$; on a $\mathfrak{J}(m) = \mathscr{E}(m)a + \mathfrak{J}(m-1)$, donc par Nakayama $\mathfrak{J}(m) = \mathscr{E}(m)a$ et finalement $\mathscr{E}e \simeq \mathscr{E}/\mathscr{E}a$; enfin, le théorème de préparation permet de supposer que l'on a $a = \partial_1^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i\partial^i$, $a_i \in \tilde{\mathscr{E}}$, $\deg a_i < m-i$, c'est-à-dire que a est de la forme considérée au paragraphe 1. En résumé, il suffit d'établir le théorème pour $M = \mathscr{E}/\mathscr{E}a$, a ayant la forme précédente.

b) A cause des récurrences qui vont intervenir dans la démonstration, on aura besoin de considérer une situation un peu plus générale. Soit U un ouvert connexe de $T^*X - \{0\}$, et posons encore $\Lambda = U \cap \{\xi_1 = 0\}$; soit encore p un entier ≥ 1, et soit $a \in \mathscr{E}_p(U)$, de la forme suivante $a = \partial_1^m + \sum_{i \leq m-1} a_i\partial^i$, avec $a_i \in \tilde{\mathscr{E}}_p(U)$, $\deg a_i < m-i$. Pour abréger, on dira qu'un tel a est "p-distingué". [A noter qu'ici, on ne peut pas travailler dans un voisinage conique; en supposant par exemple U contenu dans la carte $\xi_n \neq 0$, on pourrait aussi travailler plutôt que sur U, sur le revêtement d'ordre p du saturé de U par $\mathbb{C}^*$ défini par les coordonnées $(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \zeta)$ avec $\zeta^p = \xi_n$, mais peu importe ici]. Soit encore $\lambda \in \tilde{\mathscr{E}}_p(U)$, λ de degré $\leq 1 - \frac{1}{p}$, et posons $\bar{\partial}_1 = \partial_1 - \lambda$; on réécrit a sous la forme $\bar{\partial}_1^m + \Sigma \bar{a}_i \bar{\partial}_1^i$ et on lui associe le nouveau symbole $\xi_1^m + \Sigma \sigma(\bar{a}_i)\xi_1^i$; il est possible alors de considérer le polygone Newton $N_\lambda(a)$ et la fonction de valuation modifiés définis par cette nouvelle expression de a; par exemple on pose $v_\lambda(a, t) = \sup_{0 \leq i \leq m} (\deg \bar{a}_i + ti)$, avec $a_0 = 1$; on vérifie immédiatement que les propriétés (1.1.2) et (1.1.3) de v sont encore vraies pour v_λ, et l'on peut recopier la proposition (1.2.1) dans cette nouvelle situation. On dira d'autre part, que "*a est λ-régulier*" si son polygone de Newton, modifié comme il vient d'être dit, n'admet que 0 comme valeur exceptionnelle, autrement dit, si $v_\lambda'(a, t)$ n'a aucune discontinuité pour $t > 0$, ou encore ("condition de Levi modifiée") si $\deg \bar{a}_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. On va alors démontrer les deux lemmes suivants, qui, d'après a) entraineront le théorème (et même sa généralisation aux $\mathscr{E}_p$-Modules).

LEMME (2.2.3): *Il existe un entier p' multiple de p et un ouvert dense $\Lambda' \subset \Lambda$ tels que, en tout point $w \in \Lambda'$, on puisse trouver des a_j p'-distingués et des $\lambda_j \in \tilde{\mathscr{E}}_{p',w}$, $\deg \lambda_j < 1$ possédant les propriétés suivantes:*

1) *a_j est λ_j-régulier.*
2) *On a un isomorphisme $(\mathscr{E}_{p'}/\mathscr{E}_{p'}a)_w \simeq \bigoplus(\mathscr{E}_{p'}/\mathscr{E}_{p'}a_j)_w$.*

LEMME (2.2.4): *Si a est λ-régulier, alors, pour tout $w \in \Lambda$, $(\mathscr{E}_p/\mathscr{E}_p a)_w$ est somme directe d'un nombre fini de copies de $F_{\lambda,w}$.*

c) DÉMONSTRATION DU LEMME (2.2.3): Cette démonstration consiste essentiellement à recopier [2] ou [3]. D'après la proposition (2.2.1), généralisée comme il vient d'être dit, on peut supposer que le polygone de Newton de a, éventuellement modifié par un λ convenable (ceci servira au cours des récurrences) n'a qu'une seule pente exceptionelle, disons t. Si $t = 0$, le résultat est établi; sinon, on va se ramener à ce cas, ou au cas trivial $\deg_{\partial_1} a = 1$, par une double récurrence sur $(\deg_{\partial_1} a, t)$, ordonnés dans l'ordre lexicographique. Posons $pt = \frac{s}{r}$, avec $(s, r) = 1$, et posons $q = rp$. Considérons le symbole principal de a pour la valuation $v_\lambda(., t)$: $\bar{\sigma}_\lambda(a, t) = \xi_1^m + \Sigma \alpha_i \xi_1^{m-i}$, avec α_i = le symbole principal de degré $t(m-i)$ de $\bar{a}_i$; par hypothèse, α_0 n'est pas identiquement nul, donc ptm est entier; en particulier, r divise m.

•c1) Supposons d'abord $r = 1$; sur un ouvert dense Λ' de Λ, la multiplicité des racines de l'équation $\xi_1^m + \Sigma\alpha_i\xi_1^{m-i} = 0$ est constante, et chacunes des racines est homogène en $(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi'$ de degré $t = \dfrac{s}{p}$; au voisinage d'un point $w \in \Lambda'$, prenons une de ces racines, disons $\mu(a, \xi')$, soit $\mu = \mu(x, \partial)$ l'élément de $\tilde{\epsilon}_p$ dont elle est le symbole total, et remplaçons λ par $\lambda' = \lambda + \mu$; on vérifie que le symbole principal $\bar{\sigma}_{\lambda'}(a, t)$ est maintenant égal à $(\xi_1 + \mu(x, \xi'))^m + \Sigma\alpha_i(\xi_1 + \mu(x, \xi'))^i$; il s'annule donc génériquement avec une multiplicité égale à celle de μ; deux cas peuvent alors se produire: ou bien μ est l'unique racine de notre équation; et dans ce cas, les valeurs exceptionnelles de $N_{\lambda'}(a)$ sont toutes $< t$, et en fait $\leq t - \dfrac{1}{m!p}$ (car les valeurs exceptionnelles d'un polynôme distingué de degré m sur $\mathscr{E}_p$ sont visiblement des multiples de $\dfrac{1}{m!p}$). Ou bien μ n'est pas l'unique racine de notre équation: alors une partie de $N_{\lambda'}(a)$ a des pentes $< t$, et une autre garde la pente t; on applique alors la proposition (1.2.1) pour réduire le degré de a.

•c2) Supposons maintenant $r > 1$, et considérons la même équation $\bar{\sigma}_\lambda(a, t) = 0$. Ses racines $\mu(x, \xi)$ sont maintenant homogènes en ξ' de degré $t = \dfrac{s}{q}$, donc elles vont définir des $\mu(x, \partial) \in \tilde{\mathscr{E}}_q$; on procède alors comme précédemment, en travaillant avec $\mathscr{E}_q$ au lieu de $\mathscr{E}_p$. Il importe de noter ici que génériquement, notre équation a plusieurs racines distinctes; en effet, on ne peut avoir $\alpha_i \neq 0$ que si $t(m-i)$ est un multiple de $\dfrac{1}{p}$ ou $(m-i)$ un multiple de r ou encore (puisque r divise m) i un multiple de r; il en résulte que si $\mu(x, \xi)$ est une solution, et θ une racine r-ième de l'unité, $\neq 1$, $\theta\mu(x, \xi')$ sera encore une solution; et elle sera distincte génériquement de la précédente puisque en un point où $\alpha_0(x, \xi') \neq 0$, on a $\mu(x, \xi') \neq 0$. Donc dans ce cas, on pourra décomposer $\mathscr{E}_q/\mathscr{E}_q a$ et se ramener à des équations de degré moindre.

Le lemme résulte alors par récurrence des considérations précédentes (la remarque faite en c2) élimine le cas où t décroitrait indéfiniment sans atteindre la valeur 0, et sans que $\deg_{\partial_1} a$ diminue).

d) Démonstration du lemme (2.2.4): C'est une simple variante d'un résultat classique sur les polynômes distingués vérifiant la condition de Levi; un cas particulier en a d'ailleurs déjà été donné en (2.1.1), assertion 2). Dans le cas général, en un point $w \in \Lambda$, $\mathscr{E}_p/\mathscr{E}_p a$ est libre de rang m sur $\tilde{\mathscr{E}}_p$, et admet une base $e_1, \ldots, e_m$ vérifiant, avec les notations de b),: $\bar{\partial}_1 e_i = e_{i+1}$, $\bar{\partial}_1 e_m = -\sum_{i \le m-1} \bar{a}_i e_{i+1}$; c'est un cas particulier d'un système de la forme $\bar{\partial}_1 e = Ae$ où $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$, et A une matrice à coefficients dans $\tilde{\mathscr{E}}_p(0)$; on cherche S matrice à coefficients dans $\tilde{\mathscr{E}}_p(0)$, avec $S(x_1(w), x_2, \ldots, x_n, \partial_2, \ldots, \partial_n) = id$ telle que le changement de base $e = Sf$ nous ramène à l'équation $\bar{\partial}_1 f = 0$; l'équation que doit satisfaire S est la suivante: $[\partial_1, S] - AS = 0$, ou encore $\frac{\partial S}{\partial x_1} - [\lambda, S] - AS = 0$; la partie principale de l'opérateur figurant au second membre est $\Sigma \mapsto \frac{\partial \Sigma}{\partial x_1} - \bar{\sigma}(A)\Sigma$; on résoud alors cette équation par récurrence sur le degré des symboles. Ceci termine la démonstration du lemme et du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MALGRANGE: L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels, Séminaire Bourbaki 1977/78, n° 522.

[2] B. MALGRANGE: Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières, Notes Multigraphiées, Grenoble, (1979).

[3] P. ROBBA: Lemmes de Hensel Pour des opérateurs différentiels, *L'Enseignement mathématique*, + .26 fasc. 3–4 (1980), p. 279–311.

[4] M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA: Microfunctions and pseudo differential equations, *Lecture Notes in Math.*, n° 287 (1973), pp. 264–529, Springer.

(avril 1981)
(Oblatum 29-IV-1981
& 21-V-1981 & 29-VI-1981)

Laboratoire de Mathématiques Pures – Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de
Grenoble associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)