COMPOSITIO MATHEMATICA

ERNST-ULRICH GEKELER

Über Drinfeld'sche modulkurven vom Hecke-Typ

Compositio Mathematica, tome 57, n° 2 (1986), p. 219-236
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__57_2_219_0>

Compositio Mathematica 57 (1986) 219–236.

ÜBER DRINFELD'SCHE MODULKURVEN VOM HECKE-TYP

Ernst-Ulrich Gekeler

0. Einleitung

Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der Drinfeld'schen Modulkurve $X_0(n)$, wobei (n) eine endliche Primstelle des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{F}_q(T)$ bezeichnet.

Ein wesentlicher Aspekt ist die Entartung bei Reduktion modulo (n). Wie im klassischen Fall [3] ergibt sich, dass die Reduktion zwei rationale Kurven als irreduzible Komponenten besitzt, die sich in supersingulären Stellen transversal schneiden. Dies gibt eine geometrische Interpretation der Ergebnisse von [6]. Nachdem in [8] die Hilfsmittel bereitgestellt wurden (vgl. auch [11], [12]), kann durch Kombination einer Idee von Ogg [16] mit den Ergebnissen von Raynaud über die Spezialisierung der Jacobischen [17] die Ordnung der Spitzendivisorklassen bestimmt werden. Das Ergebnis hängt im wesentlichen nur von der Parität des Grades d von n ab.

Welche Konsequenzen sich für die Arithmetik von $X_0(n)$ ergeben (Eisenstein-Quotient, Existenz von rationalen Punkten...), ist noch nicht klar.

Zur Organisation der Arbeit: Die ersten beiden Abschnitte dienen der Vorbereitung und stellen die benötigten Definitionen und Ergebnisse aus [4] sowie [5], [8] zusammen. Im dritten Teil werden einige allgemeine Aussagen über Modulkurven vom Hecke-Typ bewiesen, die die Spitzen und die Atkin-Lehner-Involution betreffen. Der vierte Abschnitt untersucht die Spitzendivisorklasse (0)-(∞) und gibt eine Abschätzung für ihre Ordnung. Diese ist scharf, wie sich aus der Betrachtung der degenerierten Fasern im fünften Teil ergibt.

Im Text werden ohne weitere Definition folgende Bezeichnungen verwendet:
$\bar{K}$ = algebraischer Abschluss des Körpers K,
$\#(S)$ = Kardinalität der Menge S,
Aut( ), End( ) = Automorphismengruppe bzw. Endomorphismenring der Struktur ( ),
R^*, R/n = multiplikative Gruppe bzw. Faktorring R/nR des Rings R.
$X_{|K}$ deuted an, dass die Varietät X mit ihrer K-Struktur betrachtet wird.

1. Drinfeld-Moduln über $\mathbb{F}_q(T)$ ([4], [5], [10])

Es seien:

$\mathbb{F}_q$ = endlicher Körper mit q Elementen,
A = $\mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring,
K = $\mathbb{F}_q(T)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten T,
K_∞ = $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ die Komplettierung von K an der Stelle ∞,
C = Komplettierung von $\overline{K}_\infty$ bzgl. des auf $|T| = q$ normierten Absolutbetrags "$|\ |$",
Ω = $C \setminus K_\infty$ die "obere Halbebene",
Γ = $GL(2, A)$.

Für $n \in A$ sei $\Gamma(n)$ (bzw. $\Gamma_0(n)$) die Gruppe der $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod n (bzw. $c \equiv 0$ mod n). Γ operiert durch gebrochen-lineare Transformationen auf Ω. Für Kongruenzuntergruppen Γ' von Γ ist die rigid-analytische Mannigfaltigkeit $\Gamma' \setminus \Omega$ die Menge der C-wertigen Punkte einer affin-algebraischen Kurve $Y_{\Gamma'}$, die durch Anheften von endlich vielen Spitzen zu einer nichtsingulären projektiven Kurve X_Γ, vervollständigt werden kann.

Sei ϕ: $A \to L$ ein Körper über A. Der Endomorphismenring $\mathrm{End}_L(G_a)$ der additiven Gruppe über L ist der Ring der additiven Polynome

$$\sum_{i \geqslant 0} a_i X^{p^i}$$

mit Koeffizienten in L. (p = Charakteristik von $\mathbb{F}_q$; die Multiplikation ist durch Einsetzen definiert.)

Sei $\tau \in \mathrm{End}_L(G_a)$ das Polynom X^q. Für a aus L gilt

$$\tau a = a^q \tau.$$

Sei $L\{\tau\} \subset \mathrm{End}_L(G_a)$ der von τ erzeugte nichtkommutative Polynomring. Ein *Drinfeld-Modul* Φ vom Rang $r \in \mathbb{N}$ über L ist ein Ringhomomorphismus

$$\Phi: A \to L\{\tau\}$$

$$a \mapsto \Phi_a,$$

wobei für $0 \neq a \in A$ gilt:

(i) deg $\Phi_a = r \cdot \deg a$ (deg Φ_a = Grad von Φ_a in τ).
(ii) Das "Absolutglied" von Φ_a ist $\phi(a)$.

Ein *Homomorphismus* von Drinfeld-Moduln u: $\Phi \to \Psi$ ist ein $u \in \operatorname{End}_L(G_a)$ mit $\Psi_a \circ u = u \circ \Phi_a$ für a aus A. Nichttriviale Homomorphismen gibt es nur für Drinfeld-Moduln Φ, Ψ gleichen Rangs; sie heissen *Isogenien*. Mittels Φ wird $\bar{L}$ zu einem A-Modul. Das A-Modul-Schema $\operatorname{Ker} \Phi_a$ zu $a \in A$ heisst *Schema der a-Teilungspunkte*. Ist ϕ: $A \to L$ injektiv, so ist $\operatorname{Ker} \Phi_a(\bar{L})$ ein freier A/a-Modul der Dimension $r =$ Rang Φ.

Wie bei abelschen Mannigfaltigkeiten definiert man zu $n \in A$ eine Niveau-n-Struktur auf Drinfeld-Moduln und erhält:

$$\text{Der Funktor} \left\{ \begin{matrix} \text{Drinfeld-Moduln vom Rang } r \\ \text{mit einer Niveau-}n\text{-Struktur} \end{matrix} \right\}$$

ist darstellbar durch ein Schema $M^r(n)$, falls n mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt. Ein solches n heisst *zulässig*. $M^r(n)$ ist ein reguläres r-dimensionales Schema von endlichem Typ über A; der Morphismus $M^r(n) \to \operatorname{Spec} A$ ist glatt ausserhalb der Primstellen, die n teilen. Auf $M^r(n)$ operiert die Gruppe $G(n) = GL(r, A/n)$. Einer Untergruppe $H \subset G(n)$ entspricht eine Niveau-H-Struktur, und $H \backslash M^r(n)$ ist in jedem Fall ein grobes Modulschema des zugehörigen Modulproblems. Für ein nicht zulässiges n sei m zulässig mit $n \mid m$. Wir setzen $M(n) = H \backslash M(m)$ mit $H = \operatorname{Ker}(G(m) \to G(n))$.

Drinfeld-Moduln über C können analytisch beschrieben werden: Sei Λ ein diskreter, freier r-dimensionaler A-Untermodul von C (kurz: ein r-Gitter). Das Product

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

konvergiert auf ganz C und definiert eine holomorphe, $\mathbb{F}_q$-lineare, Λ-periodische Function e_Λ. Zu $a \in A$ sei Φ_a^Λ das additive Polynom, das folgendes Diagramm mit exakten Zeilen kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda & \to & C & \xrightarrow{e_\Lambda} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow \Phi_a^\Lambda & & \\ 0 & \to & \Lambda & \to & C & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

Dann ist $a \mapsto \Phi_a^\Lambda$ ein Ringhomomorphismus

$$\Phi^\Lambda \colon A \to \operatorname{End}_C(G_a),$$

und $\Lambda \mapsto \Phi^\Lambda$ ist eine Bijektion der Menge der r-Gitter in C mit der Menge der Drinfeld-Moduln des Rangs r über C. Dabei sind Φ^Λ und $\Phi^{\Lambda'}$ genau dann isomorph, when $\Lambda' = c \cdot \Lambda$ mit einem $c \in C^*$ ist.

Ist $r=2$, so kann Λ durch Skalarmultiplikation auf die Form $\Lambda = \langle \omega, 1 \rangle$ gebracht werden mit $\omega \in \Omega$. ("$\langle\ \rangle$" bezeichnet den A-Spann.) Deshalb sind die Komponenten von $M^2(n)(C)$ as rigid-analytische Mannigfaltigkeiten isomorph zu $\Gamma(n)\backslash\Omega$.

Eine fundamentale Rolle spielt der Drinfeld-Modul Φ des Rangs 1, definiert durch

$$\phi_T = T\tau^0 + \tau = TX + X^q.$$

Φ heisst der *Carlitz-Modul*. (Für die Bedeutung von Φ für die Klassenkörpertheorie von K s. [13]). Sei a ein Element des Grades $d \geqslant 0$ von A mit Leitkoeffizient $a_0 \in \mathbb{F}_q^*$. Das Polynom

$$f_a(X) = \Phi_a(X^{-1})X^{q^d} \in A[X]$$

heisse das *a-te Teilungspolynom*. Es hat Leitkoeffizient a, Absolutglied a_0, Grad $q^d - 1$ und ist in Wirklichkeit ein Polynom in X^{q-1}; die auftretenden Exponenten sind $q^d - q^i$ mit $0 \leqslant i \leqslant d$. Zum Beispiel sind $f_1(X) = 1$, $f_T(X) = TX^{q-1} + 1$, $f_{T^2}(X) = T^2X^{q^2-1} + (T^q + T)X^{q^2-q} + 1$.

2. Modulformen ([5], [12])

Drinfeld-Moduln Ψ des Rangs 2 über C sind gegeben durch

$$\Psi_T = T\tau^0 + g\tau + \Delta\tau^2 = TX + gX^q + \Delta X^{q^2},$$

mit $g \in C$ und $\Delta \in C^*$.

Paare (g, Δ) und (g', Δ') geben genau dann isomorphe Drinfeld-Moduln, wenn

$$\frac{g^{q+1}}{\Delta} = \frac{g'^{q+1}}{\Delta'}$$

ist.

Deshalb setzen wir $j = j(\Psi) = g^{q+1}/\Delta$ und erhalten: Die j-Invariante gibt einen analytischen Isomorphismus von $\Gamma\backslash\Omega$ mit der affinen Geraden über C. Durch Anheften einer Spitze wird $\Gamma\backslash\Omega$ zur projektiven Geraden vervollständigt.

Eine (holomorphe) *Modulform von Gewicht k* für eine Kongruenzuntergruppe Γ' von Γ ist eine Funktion $f\colon \Omega \to C$ mit den Eigenschaften:

(i) Für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ ist $f(\gamma\omega) = (c\omega + d)^k f(\omega)$.

(ii) f ist rigid-analytisch holomorph auf Ω.
(iii) f ist holomorph an den Spitzen.
(Zur genauen Bedeutung von (ii) and (iii) *s*. [5], [10].)

Die Funktionen

$$g\colon \omega \mapsto g(\langle \omega, 1 \rangle)$$

$$\Delta\colon \omega \mapsto \Delta(\langle \omega, 1 \rangle)$$

sind Modulformen des Gewichts $q-1$ bzw. q^2-1 für Γ, und sie erzeugen den Ring der Modulformen für Γ [12]. Δ ist Spitzenform, g nimmt an Spitzen einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert an.

Für die Kongruenzuntergruppen $\Gamma(n)$ konstruiert man wie folgt Modulformen: Sei $0 \neq u = (u_1, u_2) \in (K/A)^2$ mit $nu = 0$. Setze

$$e_u(\omega) = e_\Lambda(u_1\omega + u_2).$$

(e_Λ = Exponentialfunktion zum Gitter $\Lambda = \langle \omega, 1 \rangle$). Dann ist $e_u(\omega)$ ein n-Teilungspunkt des Drinfeld-Moduls Φ^Λ. Es gilt:

(2.1.)
(i) Die e_u sind meromorphe Modulformen vom Gewicht -1, ihre Inversen e_u^{-1} holomorphe Modulformen vom Gewicht 1 für $\Gamma(n)$; für $\gamma \in \Gamma$ ist $e_u(\gamma\omega) = (c\omega + d)^{-1} e_{u\gamma}$.
(ii) Der Körper der meromorphen Funktionen von $\Gamma(n)\backslash\Omega$ wird über C von der j-Funktion und den Funktionen $h_u = g \cdot e_u^{q-1}$ mit $nu = 0$ erzeugt [5].
(iii) Die Körpererweiterung $\mathfrak{K}(n) = K(j, h_u)$ ist galoisch über $K(j)$ mit Gruppe $G(n)/Z$. Für γ aus dieser Gruppe ist $h_u^\gamma = h_{u\gamma}$. (Z ist die Untergruppe $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^*\right\}$ von $G(n) = GL(2, A/n)$.)
(iv) Der algebraische Abschluss von K in $\mathfrak{K}(n)$ ist $K_+(n)$, der maximale an ∞ vollständig zerfallende Unterkörper des Körpers $K(n)$ der n-Teilungspunkte des Carlitz-Moduls [8].

Die C-algebraische Kurve $X(n)$ (= Vervollständigung von $Y(n) = \Gamma(n)\backslash\Omega$ durch Anheften von Spitzen) erhält so eine Struktur als Varietät über $K_+(n)$.

(v) Die Spitzen von $X(n)$ entsprechen eineindeutig

$$\Gamma(n)\backslash\mathbb{P}_1(K) = \Gamma(n)\backslash\Gamma/\Gamma_\infty = G(n)/G(n)_\infty,$$

wobei $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right\}$ und

$$G(n)_\infty = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G(n) \mid a \in \mathbb{F}_q^*\right\} \text{ ist.}$$

Sie sind $K_+(n)$-rational als Punkte von $X(n)$ [8].

Zur Beschreibung der analytischen Struktur in der Umgebung der Spitzen genügt die Angabe eines Parameters für die Spitze ∞. In der Umgebung von ∞ ist $\Gamma(n)\backslash\Omega$ zu $\Gamma(n)\cap\Gamma_\infty\backslash\Omega$ isomorph. Ist $e_{(n)}$ die Exponentialfunktion zum Ideal (n), so ist für $(n)=A$ (bzw. $(n)\neq A$) e_A^{1-q} (bzw. $e_{(n)}^{-1}$) ein analytischer Parameter. Sei $\bar{\pi}\in C$ die bis auf $(q-1)$-te Einheitswurzeln wohlbestimmte Zahl, so dass zum Gitter $\bar{\pi}A$ der Carlitz-Modul gehört [11].

Setze

$$t=t_A(\omega)=e_{\bar{\pi}A}^{-1}(\bar{\pi}\omega)=\bar{\pi}^{-1}e_A^{-1}(\omega)$$

und für $(n)\neq A$

$$t_n(\omega)=e_{\bar{\pi}A}^{-1}(n^{-1}\bar{\pi}\omega)=n\bar{\pi}^{-1}e_{(n)}^{-1}(\omega).$$

Dann ist t_A^{q-1} (bzw. t_n) Parameter um ∞ für $\Gamma\backslash\Omega$ (bzw. $\Gamma(n)\backslash\Omega$). Ich habe in [7] and [8] die Entwicklungen von e_u und Δ nach t_n bzw. t berechnet. Die Ergebnisse sind:

2.2. Satz: Δ besitzt eine für kleine $|t|$ konvergente Produktentwicklung

$$\Delta(\omega)=-\bar{\pi}^{q^2-1}t^{q-1}\prod_{\substack{n\in A\\ \text{unitär}}} f_n^{(q^2-1)(q-1)}(t)$$

mit den Teilungspolynomen f_n aus (1).

2.3. Satz: Ist $u=(u_1,u_2)=n^{-1}(s_1,s_2)$ mit modulo n reduzierten Elementen s_i von A, so hat e_u an der Spitze ∞ von $X(n)$ einen Pol der Ordnung $|s_1|$.

Daraus gewinnt man leicht die Polordnungen der e_u an den anderen Spitzen.

3. Die Modulkurven $X_0(n)$

Ab jetzt sei n ein nichtkonstantes, unitäres Element von A. Drinfeld-Moduln sind in diesem Abschnitt immer vom Rang 2. In [5] wird das Geschlecht von $X_0(n)$ (= Vervollständigung von $Y_0(n)=\Gamma_0(n)\backslash\Omega$) berechnet; statt der sehr komplizierten allgemeinen Formel gebe ich nur den Spezialfall an:

3.1. Satz: Ist n prim vom Grad d, so gilt für das Geschlecht g von $X_0(n)$:

$$g = \frac{q^d - 1}{q^2 - 1} - 1, \quad \text{falls } d \text{ gerade}$$

$$= q\left(\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}\right), \quad \text{falls } d \text{ ungerade ist.}$$

Sei $B = B(n) \subset G(n)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, und sei $B' = \{b \in B \mid \det(b) \in \mathbb{F}_q^*\}$.

3.2. PROPOSITION:
(*i*) *$X_0(n)$ ist als Varietät über K definiert.*
(*ii*) *Der Funktionenkörper über K ist der Fixkörper der Untergruppe B/Z von $G(n)/Z$ und*
(*iii*) *stimmt mit $K(j, j_n)$ überein.*
(Es ist $\mathrm{j_n}(\omega) = \mathrm{j}(\mathrm{n}\omega)$.)

BEWEIS: Die Gruppe von $X(n)$ über $X_0(n)$ über C oder über $K_+(n)$ ist das Bild von $\Gamma_0(n)$ in $G(n)/Z$, d.h. B'. Mit (2.1.) (iii), (iv) folgt (i) und (ii). Für (iii) genügt es zu zeigen, dass $C(j, j_n)$ der Funktionenkörper von $X_0(n)$ über C ist. Es ist klar, dass j_n under $\Gamma_0(n)$ invariant ist. Umgekehrt folgt für $\gamma \in \Gamma$ aus $\nu\gamma\nu^{-1} \in \Gamma$ auch $\gamma \in \Gamma_0(n)$. (Dabei ist $\nu = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Die Spitzen von $X(n)_{|K_+(n)}$ induzieren Primdivisoren (evtl. vom Grad > 1) auf $X_0(n)_{|K}$, die wir als Spitzendivisoren bezeichnen. Aus (2.1.) (v) und (3.2.) folgt:

3.3. PROPOSITION: *Die Spitzendivisoren von $X_0(n)_{|K}$ entsprechen eineindeutig den Doppelklassen*

$$B \backslash G(n)/G(n)_\infty.$$

Dagegen entsprechen die Spitzen von $X_0(n)$ über $K_+(n)$ oder C der Menge $\Gamma_0(n)\backslash\Gamma/\Gamma_\infty = B'\backslash G(n)/G(n)_\infty$.

3.4. KOROLLAR: *Ist n quadratfrei, so sind die Spitzen von $X_0(n)$ K-rationale Punkte. Ihre Anzahl ist 2^s, wobei s die Zahl der Primteiler von n bezeichnet.*

BEWEIS: Man hat zu zeigen, dass die beiden Doppelklassenmengen übereinstimmen und die angegebene Grösse haben, wobei man leicht auf den Fall "n prim" reduziert. Wir lassen die elementare Rechnung weg.

Ab jetzt sei n prim vom Grad d. Dann hat die Überlagerung

$$X_0(n) \to X(1) = \text{projektive } j\text{-Gerade}$$

den Grad $q^d + 1$. Die beiden Spitzen von $X_0(n)$ werden durch $(1:0)$ und $(0:1) \in \mathbb{P}_1(K)$ repräsentiert und mit "∞" bzw. "0" bezeichnet. Dabei ist ∞ unverzweigt, während 0 verzweigt ist mit Index q^d. Sei nun $w = w_n$ das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ von $GL(2, K)$. w normalisiert $\Gamma_0(n)$ und bewirkt eine Involution $z \mapsto 1/nz$ von $\Gamma_0(n)\backslash\Omega$. Diese vertauscht j und j_n sowie die Spitzen 0 und ∞. Wir untersuchen die Überlagerung $X_0(n) \to X_+(n) = X_0(n)/w$. C-wertige Punkte von $X_0(n)$ entsprechen Isomorphieklassen von Tripeln (Φ, u, Ψ), wobei Φ, Ψ Drinfeld-Moduln des Rangs 2 sind und u: $\Phi \to \Psi$ eine Isogenie mit zu A/n isomorphem Kern.

Die Involution operiert durch $w((\Phi, u, \Psi)) = (\Psi, u^t, \Phi)$. Die transponierte Isogenie u^t is wohlbestimmt durch

$$u^t \circ u = \Phi_n.$$

Wie in [1, p. 146 f] folgt:
Die Fixpunkte von w entsprechen den Isomorphieklassen von Paaren (Φ, u), wobei Φ ein Drinfeld-Modul und u ein Endomorphismus von Φ ist, und wobei in End Φ die Beziehung $u^2 = a \cdot n$ mit einem Automorphismus a von Φ erfüllt ist.

Ab jetzt setzen wir bis zum Ende dieses Abschnitts voraus, dass die Charakteristik von $\mathbb{F}_q > 2$ ist. Sei e ein fest gewähltes Element von $\mathbb{F}_q^* \backslash (\mathbb{F}_q^*)^2$, und sei (Φ, u) ein Fixpunkt von w. Es gelten:

(3.5.)
- (i) Die Automorphismengruppe Aut Φ ist $\mathbb{F}_q^*$.
- (ii) Φ hat "komplexe Multiplikation" durch die Maximalordnung in $K(u)$.
- (iii) Die Fixpunkte von w entsprechen den Isomorphieklassen von Φ mit "komplexer Multiplikation" durch die Maximalordnung in $K(\sqrt{n})$ oder $K(\sqrt{en})$.

BEWEIS:
- (i) Wäre Aut $\Phi \neq \mathbb{F}_q^*$, so wäre End $\Phi \otimes_A K \cong \mathbb{F}_{q^2}(T) = L$. Ist d gerade (ungerade), so zerfiele (n) in L in zwei Primideale (bzw. bliebe prim), was in beiden Fällen zur Unlösbarkeit von $u^2 = a \cdot n$ mit einer Einheit $a \in \mathbb{F}_{q^2}^*$ in L führen würde.
- (ii) Die Gleichung $u^2 = a \cdot n$ ist irreduzibel und erzeugt eine imaginärquadratische (d. h. an ∞ nicht zerfallende) Erweiterung L von K, in der $A[u]$ Maximalordnung ist.

(iii) Ein Paar (Φ, u) mit $u^2 = a \cdot n$, $a \in \mathbb{F}_q^*$, kann eindeutig entweder auf die Form $u^2 = n$ oder auf die Form $u^2 = e \cdot n$ gebracht werden.

(Zur komplexen Multiplikation von Drinfeld-Moduln *s.* [6].). Weil die Isomorphieklassen der Φ mit komplexer Multiplikation durch eine Ordnung B der Klassengruppe von B entsprechen, haben wir die

3.6. PROPOSITION:
(i) *Ist d ungerade, so ist # (Fixpunkte von w) die Summe der Klassenzahlen von $A[\sqrt{n}]$ und $A[\sqrt{en}]$.*
(ii) *Ist d gerade, so ist # (Fixpunkte von w) die Klassenzahl von $A[\sqrt{en}]$.*

Ist d nämlich gerade, so zerfällt $K(\sqrt{n})$ an ∞, ist also nicht imaginärquadratisch, und liefert keine Beiträge zu den Fixpunkten.

Setzen wir die Zahl # der Fixpunkte in die Hurwitz-Formel und (3.1) ein, so ergibt sich

3.7. PROPOSITION: *Das Geschlecht von $X_+(n)$ ist*

$$\frac{1}{4}\left(2\left(\frac{q^d-1}{q^2-1}\right) - \#\right) \text{ für gerades und}$$

$$\frac{1}{4}\left(2 + 2q\left(\frac{q^{d-1}-1}{q^2-1}\right) - \#\right) \text{ für ungerades } d.$$

3.8. KOROLLAR: *Ist $d = 3$, so ist $X_0(n)$ hyperelliptisch mit Involution w.*

BEWEIS: Die Erweiterungen $K(\sqrt{n})$ und $K(\sqrt{en})$ sind die Funktionenkörper zweier Formen einer elliptischen Kurve über $\mathbb{F}_q$, die Klassenzahlen die Ordnungen der Gruppen der $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte, die zusammen $2(q+1)$ ergeben.

Auch in Charakteristik 2 gilt die Aussage von (3.8.); sie muss jedoch mit anderen Methoden bewiesen werden [9].

4. Die Spitzendivisorgruppe

Wieder sei $n \in A$ ein unitäres Primpolynom des Grades d. Wir wollen die Ordnung des Divisors $(0) - (\infty)$ in der Jacobischen $J_0(n)$ von $X_0(n)$ bestimmen. Wir können sofort eine obere Schranke für die Ordnung angeben: Die Funktion $\Delta_n(z) = \Delta(nz)$ auf Ω ist Modulform des Gewichts

q^2-1 für $\Gamma_0(n)$ und hat wie Δ keine Nullstelle im endlichen. Für die Divisoren gilt:

$$\operatorname{div}(\Delta) = q^d \cdot (0) + (\infty)$$

$$\operatorname{div}(\Delta_n) = (0) + q^d \cdot (\infty).$$

Deshalb ist Δ/Δ_n eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ mit Divisor (q^d-1) $[(0)-(\infty)]$. Die Frage ist, welche Wurzeln man aus Δ/Δ_n im Funktionenkörper von $X_0(n)$ über C ziehen kann.

Nach [8] besitzt Δ als Funktion auf Ω eine $(q-1)$-te Wurzel const $\cdot$ η^{q+1} mit der Transformationsregel für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$\eta^{q+1}(\gamma z) = (\det \gamma)^{-1}(cz+d)^{q+1}\eta^{q+1}(z) \text{ (vgl. 2.2.).}$$

Deshalb ist η^{q+1}/η_n^{q+1} eine Modulfunktion für $\Gamma_0(n)$ und $(q-1)$-te Wurzel von Δ/Δ_n.

Ist d gerade, so kann man noch weitere Wurzeln ziehen. Setze

$$F(\omega) = \prod_{0 \neq v \in n^{-1}A/A} e_{0,v}^{-1}(\omega)$$

mit den Eisensteinreihen $e_{0,v}^{-1}$ aus Abschnitt 2.

F ist holomorphe Modulform des Gewichts q^d-1 für $\Gamma_0(n)$, hat an der Spitze 0 eine $q^{2d}-1/q^2-1$-fache Nullstelle und keine weiteren Nullstellen (2.1. und 2.3.).

Andererseits ist $\Delta^{q^d-1}(\Delta/\Delta_n)$ eine holomorphe Modulform des Gewichts $(q^d-1)(q^2-1)$ mit Divisor $(q^{2d}-1)(0)$. Deshalb gilt

$$\Delta^{q^d-1}\left(\frac{\Delta}{\Delta_n}\right) = \text{const} \cdot F^{q^2-1}.$$

Für gerades d ist also $\Delta/\Delta_n = \text{const} \cdot (\Delta^{q^d-1/q^2-1}/F)^{q^2-1}$.

4.1. Satz: *Die Ordnung der Divisorklasse* $(0)-(\infty)$ *von* $X_0(n)$ *ist* $q^d-1/q-1$ *für ungerades und* q^d-1/q^2-1 *für gerades* d.

Beweis: Die angegebenen Zahlen sind obere Schranken für die Ordnung. Dass sie tatsächlich angenommen werden, folgt aus (5.11).

5. Die spezielle Faser

Alle Drinfeld-Moduln haben Rang 2. Das Schema $M^2(n)$ heisse kurz $M(n)$.

Ist n zulässig (d. h. hat es mindestens zwei verschiedene Primteiler), so ist $M(n)$ ein feines Modulschema und besitzt die Eigenschaften:

(5.1.)

(i) Der Morphismus $M(n) \to \operatorname{Spec} A$ ist flach, von endlichem Typ, der Dimension 1, und glatt ausserhalb der Primteiler von n.

(ii) $M(n)$ ist Normalisierung von Spec $A[j]$ im Funktionenkörper $\mathfrak{K}(n)$.

(iii) $M(n) \times_{A_+(n)} K_+(n) = Y(n)_{|K_+(n)}$.

(iv) $M(n)$ ist regulär.

Die Normalisierung von Spec $A[j^{-1}]$ in $\mathfrak{K}(n)$ ist ebenfalls regulär. Die Vervollständigung $\overline{M(n)}$ (= Normalisierung der projektiven j-Geraden in $\mathfrak{K}(n)$) besitzt eine modulare Interpretation durch evtl. degenerierte Drinfeld-Moduln. Die Operation von $G(n)$ auf $M(n)$ kann eindeutig auf $\overline{M(n)}$ fortgesetzt werden. $\overline{M(n)}$ ist glatt über Spec A ausserhalb der Primteiler von n. (Für all diese Eigenschaften s. [4, § 9].)

Für Untergruppen H von $G(n) = GL(2, A/n)$ ist $H \backslash M(n)$ dann noch feines Modulschema, wenn die Objekte des zugehörigen Modulproblems über algebraisch abgeschlossenen Körpern keine Automorphismen besitzen [3].

Sei nun n wieder prim vom Grad d. Der Untergruppe $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ von $G(n)$ entspricht das Modulproblem

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Drinfeld-Moduln } \Phi + A\text{-Untermodul-Schemata} \\ H \text{ des Grades } q^d \text{ von Ker } \Phi_n \end{matrix} \right\}.$$

Setze $M_0(n) = B \backslash M(n)$ und $\overline{M_0(n)} = B \backslash \overline{M(n)}$. $M_0(n)$ ist kein feines Modulschema, weil Objekte immer die nichttrivialen Automorphismen $\mathbb{F}_q^*$ besitzen. Die übliche Technik, um Aussagen über $M_0(n)$ zu gewinnen, besteht darin, die Niveaustruktur zu verfeinern, die entsprechenden feinen Modulschemata zu studieren, und anschliessend wieder zum Quotienten überzugehen (vgl. [3, Einleitung] sowie 5.8.).

Mittels dieser Technik und (5.1) erhält man ohne Schwierigkeit die (5.1.) (i)–(iii) entsprechenden Aussagen:

(5.2.)

(i) $M_0(n) \to \operatorname{Spec} A$ ist glatt ausserhalb des Primideals (n).

(ii) $M_0(n)$ ist Normalisierung von Spec $A[j]$ in seinem Funktionenkörper $K(j, j_n)$.

(iii) $M_0(n) \times_A K = Y_0(n)_{|K}$.

Dagegen überträgt sich die Regularität von $M(n)$ nicht, weil durch die Existenz von Objekten mit "zu vielen" Automorphismen Quotientensingularitäten entstehen können.

Wir betrachten jetzt die spezielle Faser $M_0(n) \times_A A/n$. Es gibt eine abgeschlossene Einbettung

$$i\colon M(1) \times A/n \to M_0(n) \times A/n,$$

die jedem Drinfeld-Modul Φ über einer Erweiterung von A/n den Punkt (Φ, Ker F) zuordnet. Dabei ist F der Frobenius von A/n, aufgefasst als Endomorphismus τ^d von Φ (vgl. [6]).

(Eigentlich müsste es heissen: Für ein zulässiges m mit $(m, n) = 1$ gibt es eine abgeschlossene Einbettung

$$i_m\colon M(m) \times A/n \to M_0(n) \times M(m) \times A/n,$$

die nach Galois-Abstieg ein i wie oben induziert. Ich lasse diese wohlbekannten Einzelheiten weg und argumentiere so, als ob $M(1)$ und $M_0(n)$ selbst feine Modulschemata wären.)

Über dem algebraischen Abschluss $\bar{\mathbb{F}}$ von A/n gibt es endlich viele Isomorphieklassen von Drinfeld-Moduln Φ, für die Ker Φ_n ein rein lokales Gruppenschema ist. Solche Φ heissen *supersingulär*. Es gilt nun wie in der analogen Situation für elliptische Kurven:

(5.3.) $\overline{M_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}$ ist Vereinigung zweier nichtsingulärer projektiver Geraden mit Koordinaten j, j'. Diese schneiden einander transversal, und zwar genau in den supersingulären Werten von j und j'.

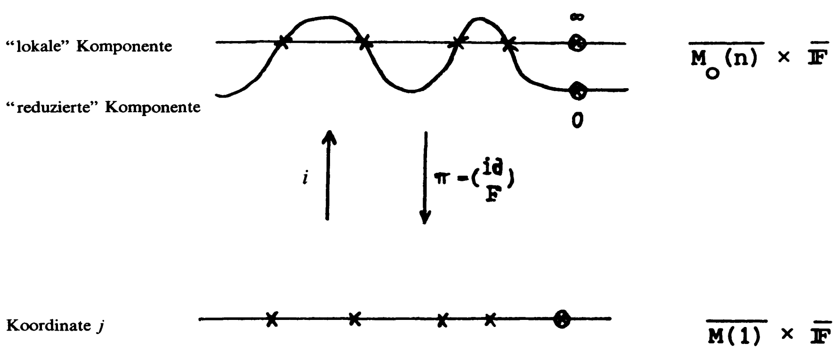
Zum Beweis: Die Atkin-Lehner-Involution $w = w_n$ ist auf Objekten des Modulproblems durch

$$(\Phi, H) \mapsto (\Phi/H, (\text{Ker } \Phi_n)/H)$$

gegeben. Dabei ist Φ/H der bis auf Isomorphie wohlbestimmte Drinfeld-Modul "Bild einer Isogenie mit Kern H". In Charakteristik n sind, falls Φ nicht supersingulär ist, die Untermoduln H vom Grad q^d von Ker Φ_n entweder lokal oder reduziert, und diese Eigenschaften werden durch w vertauscht. Deshalb wird $M_0(n) \times \bar{\mathbb{F}}$ durch Bild (i) und w (Bild (i)) überdeckt, und diese treffen sich genau in den supersingulären Punkten. Ist π die kanonische Projektion $M_0(n) \times \bar{\mathbb{F}} \to M(1) \times \bar{\mathbb{F}}$, so ist $\pi \circ i$ die Identität und $\pi \circ w \circ i$ die Frobeniusabbildung F zu A/n auf Spec $\bar{\mathbb{F}}[j]$.

Aus der Inseparabilität von F folgt die Transversalität des Schnitts. Schliesslich ergibt sich aus der modularen Interpretation von w, dass j und j' an supersingulären Stellen wie $j' = j^{q^d}$, $j = j'^{q^d}$ verklebt werden. (Supersinguläre Invarianten sind rational über der quadratischen Erweiternung von A/n [6].) Damit haben wir die Aussage (5.3.) im endlichen. Der Rest der Behauptung folgt aus der Existenz von eindeutig bestimmten Fortsetzungen $\bar{i}$, $\bar{w}$, $\bar{\pi}$ von i, w, π auf $\overline{M_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}$, die ebenfalls $\bar{\pi} \circ \bar{i} = \mathrm{id}$, $\bar{\pi} \circ \bar{w} \circ \bar{i} = F$ genügen, sowie der Tatsache, dass die Spitzen 0 und ∞ von $X_0(n)$ zu verschiedenen Punkten von $\overline{M_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}$ spezialisieren.

Für $\overline{M_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}$ ergibt sich also das Bild:



x = supersinguläre Werte von j
$\otimes$ = Spitzen.

Das Geschlecht des Schnittgraphen der Konfiguration ist einerseits die Zahl der supersingulären j-Invarianten -1 [3, I. 3], andererseits das Geschlecht g von $X_0(n)$ (Invariane des arithmetischen Geschlechts in flachen Faserungen). Daraus:

5.4. KOROLLAR [6]: *Für gerades* (*ungerades*) *d gibt es genau* $q^d - 1/q^2 - 1$ (*bzw.* $q(q^{d-1} - 1/q - 1) + 1$) *supersinguläre j-Invarianten.*

Zerlegen wir die Menge der supersingulären Invarianten in r über A/n rationale und s Paare von über A/n konjugierten Invarianten. Dann ist $g + 1 = r + 2s$ und s das Geschlecht g_+ von $X_+(n)$.

5.5 KOROLLAR: *Für* $d = 3$ *liegen alle* $q + 1$ *supersingulären Invarianten in* A/n.

5.6. FRAGE: *Wie sind, für variables n, die* $\approx q^{d-2}$ *supersingulären j-Werte in der quadratischen Erweiterung von* A/n *verteilt*?

Wenden wir uns nun der Frage der Regularität von $M_0(n)$ zu. A priori gilt:

(5.7.) $M_0(n)$ is regulär ausserhalb der supersingulären Punkte von

$$M_0(n) \times A/n.$$

Mit "geometrischen Punkten" sind im folgenden immer Punkte über $\overline{\mathbb{F}}$ gemeint.

5.8. SATZ: *Ist d gerade, so ist $M_0(n)$ regulär. Ist d ungerade, so besitzt $M_0(n)$ eine Singularität im supersingulären Punkt $j=0$ der speziellen Faser, und ist sonst regulär. Die Singularität ist formal vom Typ A_q.*

BEWEIS: Wir wählen ein zulässiges m mit $(m, n)=1$ und betrachten die Quotientenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} M(nm) & \rightarrow & M(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0(n, m) & \rightarrow & M_0(n), \end{array}$$

die den Untergruppen von $G(nm)/Z$ entsprechen:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \{\gamma \mid \gamma \equiv 1 \bmod n\} \cdot Z/Z \\ & & \downarrow \\ U := \left\{\gamma \mid \gamma \begin{array}{ll} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & \bmod n \\ \equiv 1 & \bmod m \end{array}\right\} \cdot Z/Z & \hookrightarrow & \left\{\gamma \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod n\right\}/Z =: V. \end{array}$$

Die Fixgruppe eines geometrischen Punkts x von $M(nm)$ in $G(nm)/Z$ ist isomorph zu $\mathrm{Aut}(\Phi)/\mathbb{F}_q^*$, wenn x einem Drinfeld-Modul Φ entspricht. Liegt Φ nicht über $j=0$, so ist diese Fixgruppe trivial. Liegt Φ in der speziellen Faser, so operiert $\mathrm{Aut}(\Phi)$ treu auf $\mathrm{Ker}\ \Phi_m$, was $U \cap \mathrm{Aut}(\Phi)/\mathbb{F}_q^* = 1$ impliziert. Der Morphismus $M(nm) \rightarrow M_0(n, m)$ ist deshalb etale in der Umgebung von x, und x bildet auf einem regulären Punkt y ab. $M_0(n, m)$ überlagert $M_0(n)$ mit Gruppe $V/U \cong G(m)/Z$; die Fixgruppe von y darin ist isomorph zu $\mathrm{Aut}(\Phi)/\mathbb{F}_q^*$. Mit (5.7.) folgt: $z \in M_0(n)$ ist höchstens dann singulär, wenn

(i) z in der speziellen Faser liegt und einem supersingulären Drinfeld-Modul entspricht, und
(ii) z über $j=0$ liegt.

In Charakteristik n vom Grad d ist $j=0$ genau dann supersingulär, wenn d ungerade ist [6].

Wir nehmen also an: d sei ungerade, y ein geometrischer Punkt von $M_0(n, m)$ über dem supersingulären Punkt $z \in M_0(n) \times \overline{\mathbb{F}}$ mit Invariante $j=0$.

In diesem Fall können wir argumentieren wie in [3, VI, 6.9.]:

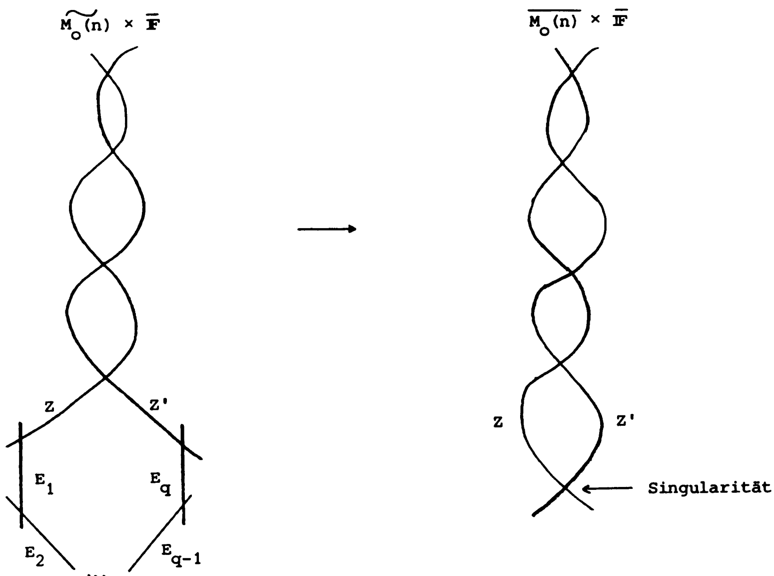
(a) $M_0(n, m) \times \overline{\mathbb{F}}$ hat in y einem gewöhnlichen Doppelpunkt.
(b) Die Komplettierung $\hat{\mathfrak{O}}_y^{\mathrm{sh}}$ der strikten Henselisierung von $M_0(n, m)$ in y (bzw. $\hat{\mathfrak{O}}_z^{\mathrm{sh}}$ von $M_0(n)$ in z) ist isomorph zu $\hat{A}_{(n)}^{\mathrm{sh}}[[X, Y]]/(XY - n^k)$ (bzw. zu $\hat{A}_{(n)}^{\mathrm{sh}}[[X', Y']]/(X'Y' - n^l)$) für geeignete $k, l \in \mathbb{N}$ [2, §1]. Dabei ist $\hat{A}_{(n)}^{\mathrm{sh}}$ die komplettierte strikte Henselisierung von A im Primideal (n).

(c) Es ist $k = 1$, weil y regulär ist.

(d) $\mathrm{Aut}(\Phi)/\mathbb{F}_q^*$ operiert effektiv auf $\mathrm{Spec}(\hat{\mathfrak{O}}_y^{\mathrm{sh}})$ mit Quotient $\mathrm{Spec}(\hat{\mathfrak{O}}_z^{\mathrm{sh}})$ und respektiert bei Reduktion (mod n) die beiden Zweige.

Aus (c) and (d) folgt $l = \#(\mathrm{Aut}(\Phi)/\mathbb{F}_q^*) = q + 1$, was zu zeigen war.

Sei nun weiter d ungerade. Bei der minimalen Auflösung $\widetilde{M_0(n)}$ der Singularität von $\overline{M_0(n)} \times \hat{\mathrm{A}}^{\mathrm{sh}}_{(n)}$ wird der singuläre Punkt durch eine Kette von q nichtsingulären projektiven Geraden mit Selbstschnittzahl -2 ersetzt (z. B. [14]). Für die speziellen Fasern erhalten wir das Bild:



Sind Z, Z' die beiden Komponenten von $\overline{M_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}}$ und $E_1 \ldots E_q$ die exzeptionellen Divisoren, so erhalten wir die $(q+2,\ q+2)$-Schnittmatrix S der Konfiguration:

$$S = \begin{array}{c|ccccccc|c} & Z & E_1 & \cdots & & & E_q & Z' & \\ \hline & -(g+1) & 1 & & & & & g & Z \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & E_1 \\ & & 1 & -2 & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -2 & 1 & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & E_q \\ & g & & & & & 1 & -(g+1) & Z' \\ \hline \end{array}$$

Dabei ist $g = q(q^{d-1} - 1/q^2 - 1)$ das Geschlecht von $X_0(n)$.

Bei geradem d erhalten wir für die beiden Komponenten Z, Z' die (2×2)-Schnittmatrix

$$S = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} Z & Z' \end{array} & \\ \boxed{\begin{array}{c} -(g+1),\ g+1 \\ g+1,\ -(g+1) \end{array}} & \begin{array}{c} Z \\ Z' \end{array} \end{array}, \quad g = \frac{q^d - 1}{q^2 - 1} - 1.$$

5.9. Lemma: *Sei $\mathbb{Z}_0^i \subset \mathbb{Z}^i$ der Modul der Zeilenvektoren mit Zeilensumme* 0. *Für ungerades (gerades) d sei $i = q + 2$ (bzw. $i = 2$). Die Zeilenvektoren von S erzeugen einen Untermodul E von $\mathbb{Z}_0^i$ von endlichem Index. $\mathbb{Z}_0^i/E$ ist zyklisch, erzeugt von dem Vektor $v = (1, 0, \ldots, 0, -1)$ von der Ordnung $q^d - 1/q - 1$ für ungerades und $q^d - 1/q^2 - 1$* für gerades d.

Beweis: Für gerade d ist nichts zu zeigen. Sei also d ungerade. Sei $E' = \langle E, w \rangle$ mit $w = (0, \ldots, 0, 1)$. Dann ist $\mathbb{Z}_0^i/E = \mathbb{Z}^i/E'$ und $\mathbb{Z}_0^i/\langle E, v \rangle = \mathbb{Z}^i/\langle E, v, w \rangle$. Weil alle Spaltensummen von S verschwinden, ist E der Spann von je $q + 1$ der $q + 2$ Zeilenvektoren. Es genügt also zu zeigen:

(i) Die ersten $q + 1$ Zeilenvektoren und w erzeugen eine Matrix S^* mit Determinante $\pm q^d - 1/q - 1$.

(ii) Die Matrix S^{**}, die man aus S erhält, wenn man zur ersten Zeile $g \cdot v$ addiert, und die letzte durch w ersetzt, hat Determinante ± 1.

Man erhält (i) und (ii) durch Entwicklung der Determinanten nach der jeweils ersten Spalte, wobei man die Formel $\det A_k = (-1)^k(k + 1)$ für die Cartan-Matrizen A_k ($k = q$ und $k = q - 1$) verwendet. Es ergibt sich $\det S^* = (-1)^{q+1}(q^d - 1/q - 1)$, $\det S^{**} = (-1)^{q+1}$.

Seien jetzt $J_0(n)$ die Jacobische von $X_0(n)_{|K}$ und $\widetilde{J_0(n)}$ ihr Neron-Modell und $\widetilde{M_0(n)}$ das minimale Modell von $\overline{M_0(n)}$ über $\hat{A}_{(n)}^{sh}$. Aus einen Satz von Raynaud ([17], vgl. die Diskussion im Anhang zu [15]) folgt:

5.10. Proposition:

(i) *Die Zusammenhangskomponente $(\widetilde{J_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}})^0$ von $\widetilde{J_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}}$ ist kanonisch isomorph zu $Pic^0(\widetilde{M_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}})$ (= Kern der Multigrad-Abbildung, die jedem $\mathfrak{L} \in Pic$ ihre Grade auf den Komponenten zuordnet.).*

(ii) *Die Gruppe der Zusammenhangskomponenten $(\widetilde{J_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}})/(\widetilde{J_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}})^0$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_0^i/E$.*

Der Isomorphismus in (ii) kommt wie folgt zustande:
Man ordne $\mathfrak{L} \in \mathrm{Pic}(\widetilde{M_0(n)})$ das Element $\sum \deg(\mathfrak{L} \mid C) \cdot C$ der freien abelschen Gruppe zu, die von den Komponenten von $\widetilde{M_0(n)} \times \overline{\mathbb{F}}$ erzeugt

wird. (Um den Preis von mehr Notation kann (i) and (ii) natürlicher formuliert werden. Für unsere Zwecke reicht die obige Formulierung.)

(5.11.) Korollar: *Die Divisorklasse* $D = (0) - (\infty)$ *von* $X_0(n)$ *hat als Ordnung ein Vielfaches von* $q^d - 1/q^2 - 1$ *für gerades* d *und von* $q^d - 1/q - 1$ *für ungerades* d.

Beweis: Der schematheoretische Abschluss von "0" bzw. "∞" auf $\overline{M_0(n)}$ gibt, ebenfalls mit 0 und ∞ bezeichnete, Divisoren auf $\widetilde{M_0(n)}$, die die spezielle Faser in Z bzw. Z' mit Schnittzahl 1 treffen. (Vgl. dazu den Beweis von 5.3.: $\overline{M_0(n)} \times \hat{A}^{sh}_{(n)}$ und $\widetilde{M_0(n)}$ stimmen ausserhalb der supersingulären Punkte, also in der Umgebung der Spitzen, überein.) Sei $R \subset J_0(n)(K)$ die Untergruppe, auf der der Reduktionshomomorphismus nach $\widetilde{J_0(n)}(\bar{\mathbb{F}})$ definiert ist. D liegt in R, weil 0 und ∞ zu nichtsingulären Punkten von $\widetilde{M_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}$ spezialisieren. In

$$R \to \widetilde{J_0(n)}(\bar{\mathbb{F}}) \to \left(\widetilde{J_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}\right) / \left(\widetilde{J_0(n)} \times \bar{\mathbb{F}}\right)^0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_0^i/E$$

wird D auf $v = (1, 0, \ldots, 0, -1)$ modulo E abgebildet (5.10.). Aus (5.9.) folgt die Behauptung.

Gleichzeitig ist jetzt der Beweis von (4.1.) vollständig.

References

[1] A. Brumer: Courbes modulaires, Grenoble 1975.

[2] P. Deligne and D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. IHES* no. 36 (1969) 75–110.

[3] P. Deligne and M. Rapoport: Les schémas de modules de courbes elliptiques. In: *Modular Forms of One Variable II*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 349, Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1973).

[4] V.G. Drinfeld: Elliptic modules, *Math. USSR-Sbornik* 23 (1976) 561–592.

[5] E. Gekeler: Drinfeld-Moduln und modulare Formen über rationalen Funktionenkörpern. *Bonner Math. Schriften* 119 (1980).

[6] E. Gekeler: Zur Arithmetik von Drinfeld-Moduln, *Math. Annalen* 256 (1982) 549–560.

[7] E. Gekeler: A Product Expansion for the Discriminant Function of Drinfeld Modules Jour. Number Theory 21 (1985) 135–140.

[8] E. Gekeler: Modulare Einheiten für Funktionenkörper, *Crelle's Journal* 348 (1984) 94–115.

[9] E. Gekeler: Automorphe Formen über $\mathbb{F}_q(T)$ mit kleinem Führer (in Vorbereitung).

[10] D. Goss: π-adic Eisenstein series for function fields, *Comp. Math.* 41 (1980) 3–38.

[11] D. Goss: The algebraist's upper half-plane, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2 (1980) 391–415.

[12] D. Goss: Modular forms for $\mathbb{F}_r[T]$, *Crelle's Journal* 231 (1980) 16–39.

[13] D. Hayes: Explicit class field theory for rational function fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* 189 (1974) 77–91.

[14] J. Lipman: Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. IHES* no. 36 (1969) 195–280.

[15] B. MAZUR: Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ. IHES* no. 47 (1977) p. 33–186.
[16] A. OGG: Rational Points on Certain Elliptic Modular Curves, AMS Conference St. Louis (1972) 221–231.
[17] M. RAYNAUD: Spécialisation du Foncteur de Picard, *Publ. IHES* no. 38 (1970) 27–76.

(Oblatum 11-V-1984 & 28-VIII-1984)

Ernst-Ulrich Gekeler
Math. Institut der Universität
Beringstrasse 4
D-5300 Bonn 1
BRD