ABDERRAZAK BOUAZIZ

Formule d'inversion d'intégrales orbitales tordues

Compositio Mathematica, tome 81, nº 3 (1992), p. 261-290
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__81_3_261_0>

Compositio Mathematica **81**: 261–290, 1992.

Formule d'inversion d'intégrales orbitales tordues

ABDERRAZAK BOUAZIZ

Université Paris VII-C.N.R.S. URA 748 U.F.R. de Mathématiques, tour 45-55, 5^e étage. 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

Received 12 June 1990; accepted 25 April 1991

Introduction

Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur $\mathbb{R}$. Identifions G avec le groupe de ses points complexes et notons τ la conjugaison de G par rapport au groupe de ses points réels que nous noterons G^τ. Fixons une mesure G-invariante $\mathrm{d}\dot{g}$ sur G/G^τ. Le but de cet article est d'écrire une formule d'inversion de Fourier pour l'intégrale orbitale tordue de l'élément neutre de G, i.e. la mesure μ_τ sur G définie par:

$$\mu_\tau(\phi) = \int_{G/G^\tau} \phi(\tau(g)g^{-1})\,\mathrm{d}\dot{g}$$

La signification de cela est la suivante: notons $\hat{G}^\tau$ le sous-espace du dual de G formé par les représentations stables par τ; si $\pi \in \hat{G}^\tau$, il existe un opérateur unitaire A_τ (pas unique) dans l'espace de π tel que, pour tout $g \in G$, on ait $\pi(\tau(g)) = A_\tau \pi(g) A_\tau^{-1}$. Notre but est donc, de décrire une mesure $\mathrm{d}m$ sur $\hat{G}^\tau$ telle que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(G)$, on ait:

$$\mu_\tau(\phi) = \int_{\hat{G}^\tau} \mathrm{tr}(A_\tau \pi(\phi))\,\mathrm{d}m(\pi) \tag{1}$$

Il est souvent plus commode, pour écrire les formules, d'introduire le groupe $\tilde{G} = \{1, \tau\} \ltimes G$. On identifie, dans $\tilde{G}$, $\tau \times 1$ avec τ et $1 \times G$ avec G. Alors le choix de A_τ involutif correspond à l'extension de π en une représentation unitaire irréductible de $\tilde{G}$ et on voit facilement, en translatant par τ, qu'on se ramène à décrire une mesure $\mathrm{d}\tilde{m}$ sur $\hat{\tilde{G}}$ telle que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\tau G)$, *on ait:*

$$\int_{G/G^\tau} \phi(g\tau g^{-1})\,\mathrm{d}\dot{g} = \int_{\hat{\tilde{G}}} \mathrm{tr}(\pi(\phi))\,\mathrm{d}\tilde{m}(\pi). \tag{2}$$

Le support de $\mathrm{d}\tilde{m}$ est inclus dans le sous-espace de $\hat{\tilde{G}}$ formé par les représentations dont la trace est non nulle sur τG; ce sont celles dont la restriction à G est irréductible. Cependant, pour nos besoins, nous sommes amenés à modifier un peu cette formulation de la façon suivante. On fixe une forme réelle intérieure de G quasi-déployée et on note σ_o la conjugaison de G par rapport à cette forme réelle. On considère le groupe $\{1, \sigma_o\} \ltimes G$ qu'on note aussi $\tilde{G}$. Alors il existe $\sigma \in \tilde{G}$ dont le carré appartient au centre de G et vérifiant $\sigma(g) = \tau(g)$ pour tout $g \in G$. Nous établissons une formule analogue à (2) où τ est remplacé par σ. Le passage à la formule (1) s'effectue en prenant $A_\tau = \tilde{\pi}(\sigma)$ où $\tilde{\pi}$ est une extension irréductible à $\tilde{G}$ de π (A_τ n'est pas involutif en général).

Pour écrire la formule d'inversion, nous nous plaçons dans le cadre de la méthode des orbites et nous utilisons la méthode de Duflo-Vergne pour établir la formule de Plancherel d'un groupe de Lie semi-simple réel. Décrivons brièvement le résultat. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Notons $\mathfrak{g}_a^*$ l'ensemble des formes linéaires admissibles sur $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}_a^*$. Si $G.f$ est stable par σ, il existe deux représentations unitaires irréductibles de $\tilde{G}$ dont la restriction à G est la représentation de la série principale associée à f; ces deux représentations sont paramétrées par un ensemble $X(f)$ formé par deux caractères du revêtement de Duflo de $G(f)$. Si $\tau \in X(f)$, on note $\Pi_{f,\tau}$ la représentation de G correspondante.

Notons $(\mathfrak{g}_a^*/G)^\sigma$ l'ensemble des G-orbites dans $\mathfrak{g}_a^*$ stables par σ. Nous munissons cet ensemble d'une mesure canonique dm. Sur l'ensemble des couples (f, τ), $f \in \mathfrak{g}_a^*$ telle que $G.f$ est stable par σ et $\tau \in X(f)$, nous définissons une fonction Q_σ invariante par G, que nous explicitons en fonction des constantes intervenant dans le calcul de transformées de Fourier d'orbites de sorte que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\sigma G)$, on ait:

$$\int_{G/G^\tau} \phi(g\sigma g^{-1})\,\mathrm{d}\dot{g} = \int_{(\mathfrak{g}_a^*/G)^\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\tau \in X(f)} Q_\sigma(f, \tau)\,\mathrm{tr}\,\Pi_{f,\tau}(\phi)\right) \mathrm{d}m(G.f)$$

Nous n'avons pas cherché à calculer explicitement la fonction Q_σ. Suivant une suggestion de M. Duflo, cette formulation pourrait être utile dans des problèmes de "comparaison". Pour appuyer cette idée et l'expliquer, nous avons calculé le relèvement à G de la mesure de Dirac de G^{σ_o}. Cela s'obtient facilement en comparant la formule ci-dessus avec la formule de Plancherel de G^{σ_o} sous la forme établie par Duflo-Vergne. Le résultat est le suivant. Soient M un groupe de Lie réductif et K un sous-groupe compact maximal de M. On pose: $q(M) = \frac{1}{2}(\dim M/K + \mathrm{rang}\, K - \mathrm{rang}\, M)$. Alors le relèvement de la mesure de Dirac de G^{σ_o} est égal à:

$$\sum_{x \in H^1(\{1, \sigma_o\}, G)} (-1)^{q(G^{\sigma_o}) - q(G^{\sigma_o x})} \mu_{\sigma_o x};$$

comme me l'a fait remarquer L. Clozel, ceci est l'intégrale orbitale tordue stable associée à l'élément neutre de G.

Je remercie M. Duflo pour avoir attiré mon attention sur la possibilité d'utiliser la méthode de Duflo-Vergne pour établir cette formule d'inversion.

1. Notations et conventions

1.1. Tout au long de cet article, on adoptera les notations suivantes (sauf mention explicite du contraire).

Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal.

Soit V un espace vectoriel. On note V^* son dual. Si W est un sous-espace vectoriel de V et A un endomorphisme de V qui laisse stable W, on note A_W la restriction de A à W. Si W' est un sous-espace de W stable par A, on note $A_{W/W'}$ l'endomorphisme de W/W' qui se déduit de A.

Si V est un espace vectoriel réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié et $v \to \bar{v}$ la conjugaison complexe de $V_{\mathbb{C}}$. Si A est un endomorphisme de V, son extension (par linéarité) à $V_{\mathbb{C}}$ sera aussi notée A. Le complexifié de V^* s'identifie canoniquement au dual de $V_{\mathbb{C}}$. Soit $\alpha \in V_{\mathbb{C}}^*$. On dit que α est rélle (resp. imaginaire) si sa restriction à V est réelle (resp. imaginaire); si α n'est ni réelle ni imaginaire, on dit que α est complexe.

Soit G un groupe opérant dans un ensemble X. Soient H une partie de G et Y une partie de X. On note $N(H, Y) = \{h \in H | h.Y \subset Y\}$ et $Z(H, Y) = \{h \in H | h.y = y \text{ pour tout } y \in Y\}$. Lorsque $N(H, Y)$ est un groupe on notera $W(H, Y)$ le groupe quotient $N(H, Y)/Z(H, Y)$. Soit $g \in G$. On note X^g l'ensemble des points fixes de g dans X.

Si G est un groupe de Lie, on note G_o sa composante neutre. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive, on note $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$. De même on note G_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers d'un groupe réductif G.

Soit G un groupe de Lie réductif et K un sous groupe compact maximal de G. On pose:

$$q(G) = \tfrac{1}{2}(\dim G/K + \operatorname{rang} K - \operatorname{rang} G).$$

Si Φ est un système de racines, on note $W(\Phi)$ son groupe de Weyl.

1.2. Dans tout cet article, G est un groupe algébrique semi-simple connexe et simplement connexe, défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$. On identifie G avec $G(\mathbb{C})$ et on note σ_o la conjugaison complexe de G. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. La différentielle de σ_o est une involution de (l'algèbre de Lie réelle) $\mathfrak{g}$, qu'on notera aussi σ_o. On note κ la forme de Killing de l'algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{g}$. On note Z le centre de **G**.

On note $\tilde{G}$ le groupe $\{1, \sigma_o\} \ltimes G$ et on identifie $\tilde{G}_o$ avec G et $(\sigma_o, 1)$ avec σ_o. On fixe un élément u de G tel que $\sigma_o(u)u \in Z$ et on pose $\sigma = \sigma_o u$. Le groupe G^σ est une forme réelle de G; son algèbre de Lie s'identifie avec $\mathfrak{g}^\sigma$. On note B_σ l'ensemble des éléments de Z de la forme $\sigma(g)g^{-1}$ pour un élément g de G. On fixe un caractère χ de Z/B_σ. Pour tout ce qui concerne les définitions et les propriétés d'éléments semi-simples ou réguliers de $\tilde{G}$ nous renvoyons à [B-1].

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que la restriction de κ à V soit non dégénérée. Notons W l'orthogonal de V dans $\mathfrak{g}$ (pour la forme κ). Nous identifierons V^* avec le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ des formes linéaires nulles sur W. Remarquons que si s est un élément semi-simple de $\tilde{G}$, la restriction de κ à $\mathfrak{g}^s$ est non dégénérée.

1.3. Dans cet article nous adoptons la normalisation de mesures de [D-V], que nous rappelons pour la commodité du lecteur.

Soit V un sous-espace vectoriel (réel) de $\mathfrak{g}$ sur lequel κ est non dégénéré. Soit $e_1, \ldots, e_m$ en une base de $V_{\mathbb{C}}$ et soit $e_1^*, \ldots, e_m^*$ la base duale. La densité $|\det \kappa(e_i, e_j)|^{1/2} |e_1^* \wedge \cdots \wedge e_m^*|$ est indépendante du choix de la base. On munit V de la mesure de Lebesgue dv qu'elle détermine et on munit V^* de la mesure duale dv^* de sorte que si $\phi \in \mathscr{S}(V)$, on a $\int_{V^*} \int_V \phi(v) e^{iv^*(v)} \, dv \, dv^* = \phi(o)$.

Soit M un sous-groupe fermé de G et soit $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. Supposons que κ soit non dégénérée sur $\mathfrak{m}$. Alors M est unimodulaire. On munit M de la mesure de Haar dm tangente à la mesure de Lebesgue, définie ci-dessus, sur $\mathfrak{m}$. Si M' est un sous-groupe fermé de M, d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}'$, tel que la restriction de κ à $\mathfrak{m}'$ est non dégénérée, on munit M/M' de la mesure quotient de dm par dm' et on la note $d\dot{m}$ quand la signification est claire d'après le contexte.

2. Mesures canoniques

2.1. Si $\mathfrak{m}$ est une algèbre de Lie réductive, on note $\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Soit $\mathfrak{l}$ un sous-espace de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ stable par $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On note $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{l}$. On dira qu'un sous-espace $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien (contenant $\mathfrak{a}$) s'il est stable par $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, s'il contient $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et si pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ on a soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ soit $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on note h_α sa coracine.

On dira qu'un sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ appartient à $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, s'il existe un élément semi-simple régulier s de σG tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^s$. Si $s \in \sigma G$ est semi-simple, toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^s$ est dans $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (voir [B-1], lemme 1.4.1). Si $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, qu'on note $\mathfrak{h}$ dans la suite (voir [G], théorèmes 5 et 28). On note $\mathfrak{h}_I$ (resp. $\mathfrak{h}_R$) le sous-espace de $\mathfrak{h}$ formé par les éléments X tels que les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ soient imaginaires pures (resp. réelles); on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_I \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

On pose $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I$ et $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_R$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}_R$. La restriction de κ à $\mathfrak{h}_I$ (resp. $\mathfrak{h}_R$) est définie négative (resp. positive). On note pr la projection orthogonale de $\mathfrak{h}_I$ sur $\mathfrak{a}_I$. On note $\mathfrak{h}_{I,Z}$ l'ensemble des éléments X de $\mathfrak{h}_I$ tels que $\exp X \in Z$ et $\mathfrak{a}_{I,Z} = \mathrm{pr}(\mathfrak{h}_{I,Z})$.

On note $\mathfrak{a}^*_{I,\chi}$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}^*_I$ tels que $e^{i\mu(X)} = \chi(\exp X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}_{I,Z}$.

On pose $\mathfrak{a}^*_\chi = \mathfrak{a}^*_{I,\chi} \oplus \mathfrak{a}^*_R$.

REMARQUE: L'ensemble $\mathfrak{a}^*_{I,\chi}$ est un translaté du réseau dual de $\mathfrak{a}_{I,Z}$. Il est vide si et seulement si il existe $X \in \mathfrak{h}_{I,Z}$ non nul tel que $\mathrm{pr}(X) = 0$ et $\chi(\exp X) \neq 1$.

2.2. Soit $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Suivant ([D-V], II-6), on définit une mesure $\eta_{\mathfrak{a},\chi}$ sur $\mathfrak{a}^*$ par la formule:

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \phi(f)\, \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{a},\chi}(f) = v(\mathfrak{a}) \sum_{\mu \in \mathfrak{a}^*_{I,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*_R} \phi(\mu, \nu)\, \mathrm{d}\nu$$

où $v(\mathfrak{a}) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_I/\mathfrak{a}_{I,Z})^{-1}$. C'est une mesure tempérée portée par $\mathfrak{a}^*_\chi$; on la regardera, parfois, comme une mesure sur $\mathfrak{a}^*_\chi$.

2.3. Soit s un élément semi-simple de σG. On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^s$ et M le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{m}$. Si $f \in \mathfrak{m}^*$, on note ω_f la M-orbite de f dans $\mathfrak{m}^*$ et β_{ω_f} la mesure de Lionville sur ω_f.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. La restriction de κ à $\mathfrak{a}$ est non dégénérée. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note h'_λ l'élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ tel que $\lambda(h) = \kappa(h'_\lambda, h)$ pour tout $h \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On choisit un système de racines positives Δ^+ dans $\Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Si $f \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on pose:

$$\Pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}(f) = (2\pi)^{-|\Delta^+|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} |f(h'_\alpha)|$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ est $\mathfrak{m}$-régulier si $\Pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}(\lambda) \neq 0$. On note $\mathfrak{a}^*_\chi(\mathfrak{m})$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{m}$-réguliers de $\mathfrak{a}^*_\chi$ et on pose:

$$\mathfrak{m}^*_\chi = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})} \mathfrak{a}^*_\chi(\mathfrak{m}).$$

Suivant ([D-V], II-6), on définit une mesure $\eta_{\mathfrak{m},\chi}$ sur $\mathfrak{m}^*$ par:

$$\int_{\mathfrak{m}^*} \phi(f)\, \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f)$$

$$= \sum_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})/M} |W(M, \mathfrak{a})|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} \Pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}(\lambda) \left(\int_{\omega_\lambda} \phi(f)\, \mathrm{d}\beta_{\omega_\lambda}(f) \right) \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{a},\chi}(\lambda).$$

Son support est $\mathfrak{m}^*_\chi$ et, d'après [D-V], lemme I-3, elle est tempérée.

2.4. Soit $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. On note Ψ l'ensemble des racines (comptées sans multiplicités) de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; c'est un système de racines et il est égal à l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ des éléments de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ où $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On choisit un système de racines positives Ψ^+ dans Ψ. Si $f \in \mathfrak{a}^*$, on pose:

$$\Pi_{\mathfrak{a}}^{\sigma}(f) = (2\pi)^{-|\Psi^+|} \prod_{\alpha \in \Psi^+} |f(h'_\alpha)|$$

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. On note $\mathfrak{h}_\chi^*$ l'ensemble des éléments $f \in \mathfrak{h}^*$ réguliers tels que $e^{if(X)} = \chi(\exp X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}_{I,Z}$.

On pose $\mathfrak{g}_\chi^* = \bigcup_{\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})} \mathfrak{h}_\chi^*$.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. On note $\mathfrak{a}_{\chi,\mathrm{reg}}^*$ l'ensemble des éléments réguliers (pour $\mathfrak{g}$) de $\mathfrak{h}_\chi^*$. Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$, alors l'orbite $G.f$ est stable par σ si et seulement si $(G.f)^{\sigma_0}$ est non vide (voir [De], lemme 2). On en déduit facilement que si $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$, l'orbite $G \cdot f$ est stable par σ si et seulement si $f \in \mathfrak{a}_{\chi,\mathrm{reg}}^*$ pour un $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Cela nous permet de définir une mesure dm_χ sur $(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma$, l'espace des G-orbites dans $\mathfrak{g}_\chi^*$ stables par σ, par:

$$\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \phi(\Omega)\, dm_\chi(\Omega) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})/G} |W(G, \mathfrak{a})|^{-1} \int_{\mathfrak{a}_\chi^*} \Pi_{\mathfrak{a}}^{\sigma}(\lambda) \phi(\Omega_\lambda)\, d\eta_{\mathfrak{a},\chi}(\lambda)$$

où Ω_λ est la G-orbite de λ et $\phi(\Omega_\lambda) = 0$ si λ n'est pas régulière.

2.5. On reprend les notations de 2.3 et 2.4. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Si $f \in \mathfrak{a}_\chi^*(\mathfrak{m})$, on pose:

$$\Pi_{\mathfrak{m}}^{\sigma}(f) = \Pi_{\mathfrak{a}}^{\sigma}(f)/\Pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}(f).$$

Si Ω est une G-orbite régulière dans $\mathfrak{g}^*, \Omega \cap \mathfrak{m}^*$ est une réunion finie (éventuellement vide) de M-orbites dans $\mathfrak{m}^*$. On note $\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}$ la mesure sur $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$ dont la restriction à chaque M-orbite $\omega \subset \Omega \cap \mathfrak{m}^*$ est égale à β_ω.

LEMME. *Soit ϕ une fonction sur $\mathfrak{m}^*$. On suppose que $\Pi_{\mathfrak{m}}^{\sigma}\phi$ est intégrable pour $\eta_{\mathfrak{m},\chi}$. On a:*

$$\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \left(\int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} \phi(f)\, d\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f) \right) dm_\chi(\Omega) = \int_{\mathfrak{m}_\chi^*} \Pi_{\mathfrak{m}}^{\sigma}(f) \phi(f)\, d\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f).$$

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme I-4 dans [D-V].

3. Formule de Poisson invariante

3.1. Soit s un élément semi-simple de σG. On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^s$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{m}$. On note M et B les sous-groupes analytiques de G correspondant à $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{b}$. On choisit un système de racines positives Δ^+ dans $\Delta = \Delta(\mathfrak{m}_\mathbb{C}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$ tel que si $\alpha \in \Delta^+$ est complexe, alors $\bar{\alpha}$ est dans Δ^+. On pose:

$$P = \prod_{\alpha \in \Delta^+} h_\alpha$$

$$P^* = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$. D'après Harish–Chandra ([Ha], théorèmes 1 et 3), il existe une constante c indépendante de ϕ telle que la fonction $X \to I_X^{\mathfrak{m}}(\phi)$ sur $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}_{\text{reg}}$ définie par:

$$I_X^{\mathfrak{m}}(\phi) = c\partial_P \left(P^*(X) \int_{M/B} \phi(m.X)\, \mathrm{d}\dot{m} \right)$$

se prolonge par continuité à $\mathfrak{b}$ tout entier et $I_0^{\mathfrak{m}}(\phi) = \phi(o)$.

3.2. On utilise les notations de 3.1 et on suppose que s est elliptique i.e. semi-simple et toutes les valeurs propres de $\mathrm{Ad}(s)$ sont de module 1. On pose: $\mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}} = \{X \in \mathfrak{b}_I \mid \text{il existe } g \in G \text{ et } z \in Z_G \text{ tels que } s \exp X = g\sigma z g^{-1}\}$. Soient $X \in \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}}$, $g \in G$ et $z \in Z$ tels que $s \exp X = g\sigma z g^{-1}$. On pose $\chi_{\sigma,s}(X) = \chi(z)$. Cela est bien défini car si $s \exp X = g_1 \sigma z_1 g_1^{-1}$, on a $\sigma(g_1^{-1}g)g^{-1}g_1 = z_1 z^{-1}$ et donc $\chi(z_1) = \chi(z)$.

Suivant ([D-V], II-2), on pose:

$$V_{\sigma,s} = \sum_{X \in \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}}} \chi_{\sigma,s}(X) I_X^{\mathfrak{m}}.$$

C'est une distribution tempérée, M-invariante et, comme le suggère la notation, elle ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$. On notera $\hat{V}_{\sigma,s}$ sa transfomée de Fourier.

Comme dans [D-V], le point clef pour établir la formule d'inversion est la proposition suivante, dont la démonstration est analogue à celle du théorème II-I de [D-V], et que nous démontrons dans le paragraphe 5.

PROPOSITION. *La distribution $\hat{V}_{\sigma,s}$ est une mesure sur $\mathfrak{m}^*$ absolument continue par rapport à $\eta_{\mathfrak{m},\chi}$. De plus il existe une unique fonction continue $p_{\sigma,s}$ sur $\mathfrak{m}_\chi^*$ telle que $\hat{V}_{\sigma,s} = p_{\sigma,s}\eta_{\mathfrak{m},\chi}$.*

En fait, le résultat que nous démontrons est plus précis, puisque nous explicitons $p_{\sigma,s}$ en fonction des constantes de Harish–Chandra qui apparaissent dans le calcul de transformées de Fourier d'orbites.

3.3. La proposition suivante rassemble les propriétés de $p_{\sigma,s}$ dont nous aurons besoin; nous la démontrons dans le paragraphe 5.

PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. *Soit* $f \in \mathfrak{a}_\chi^*(\mathfrak{m})$. *On a:*

(i) $p_{\sigma,gsg^{-1}}(g \cdot f) = p_{\sigma,s}(f)$ *pour tout* $g \in G$

(ii) $p_{\sigma,sz}(f) = \chi(z) p_{\sigma,s}(f)$ *pour tout* $z \in Z$

(iii) *soit* $Y \in \mathfrak{a}_I$, *alors* $p_{\sigma,s\exp Y}(f) = p_{\sigma,s}(f) e^{if(Y)}$.

4. Formule d'inversion

4.1. Soit $\phi \in C_c^\infty(\sigma G)$. Soit $z \in Z$. On pose $\mu_{\sigma z}(\phi) = \int_{G/G^\sigma} \phi(g\sigma z g^{-1})\, d\dot{g}$. On l'appellera intégrale orbitale tordue (par σ) de z. Cette appellation provient du fait que si $\psi \in C_c^\infty(G)$ et si on définit $\phi \in C_c^\infty(\sigma G)$ par $\phi(\sigma g) = \psi(g)$, alors $\psi_{\sigma z}(\phi) = \int_{G/G^\sigma} \psi(\sigma(g) z g^{-1})\, d\dot{g}$, qui est l'intégrale de ψ sur l'orbite de z sous l'action de G tordue par σ.

4.2. Pour plus de détails sur le contenu de cette section, se référer à [B-1].

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. Notons $\tilde{G}(f)$ (resp. $\mathfrak{g}(f)$) le centralisateur de f dans $\tilde{G}$ (resp. $\mathfrak{g}$), $\tilde{G}(f)^{\mathfrak{g}}$ le revêtement d'ordre 2 de Duflo de $\tilde{G}(f)$ et ε l'élément non trivial de la projection de $\tilde{G}(f)^{\mathfrak{g}}$ sur $\tilde{G}(f)$. On note $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles τ de $\tilde{G}(f)^{\mathfrak{g}}$ telles que:

$$\tau(\varepsilon) = -Id$$

$$\tau(\exp X) = e^{if(X)},\ X \in \mathfrak{g}(f).$$

Ces représentations sont des caractères et $X(f)$ est réduit à un seul élément (resp. deux éléments) si $G(f)$ et $\tilde{G}(f)$ sont égaux (resp. distincts). Si $\tau \in X(f)$, on note $\Pi_{f,\tau}$ la représentation associée par Duflo à (f, τ) et $\Theta_{f,\tau}$ son caractère. Les $\Pi_{f,\tau}$ sont les représentations de $\tilde{G}$ dont la restriction à G est tempérée et dont le caractère infinitésimal est régulier.

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. Rappelons que $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{l}$ un lagrangien contenant $\mathfrak{g}(f)$, nous dirons simplement que $\mathfrak{l}$ est un lagrangien en f. Notons $\rho_\mathfrak{l}$ le caractère, du stabilisateur de $\mathfrak{l}$ dans $\tilde{G}(f)^{\mathfrak{g}}$, associé par Duflo à $\mathfrak{l}$. Il vérifie:

$$\rho_\mathfrak{l}(\varepsilon) = -1$$

$$\rho_\mathfrak{l}(\exp X) = \mathrm{e}^{1/2\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X)_\mathfrak{l}},\ X \in \mathfrak{g}(f).$$

Dans la suite nous noterons aussi $\rho_\mathfrak{l}(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X)_\mathfrak{l}$, $X \in \mathfrak{g}(f)$.

Soient $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$ et $\mathfrak{l}$ un lagrangien en f. Soit $\mathfrak{l}'$ un sous-espace de $\mathfrak{l}$. On note $q(f, \mathfrak{l}')$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice associée à la forme hermitienne, sur $\mathfrak{l}'$ définie par:

$$(X, Y) \to if([X, \bar{Y}])$$

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. Supposons que $G.f$ soit stable par σ. Comme nous l'avons remarqué en 2–4, il existe $g \in G$ tel que $\sigma_o(g.f) = g.f$. On note $\mathfrak{r}_g = (1 - g^{-1}\sigma_o g)\mathfrak{g}$. Soient $\tau \in X(f)$ et $\mathfrak{l}$ un lagrangien en f stable par $g^{-1}\sigma_o g$. Rappelons, d'après ([D-H-V], II-2), que:

$$(-1)^{q(f, \mathfrak{l} \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}})} \frac{(\tau\rho_{\mathfrak{l}})(g^{-1}\sigma_o g)}{\det(1 - g^{-1}\sigma_o g)_{\mathfrak{l}\cap(\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}/\mathfrak{l}\cap(\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(f)}}$$

ne dépend pas de $\mathfrak{l}$. Il est facile de voir que:

$$\det(1 - g^{-1}\sigma_o g)_{\mathfrak{l}\cap(\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}/\mathfrak{l}\cap(\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(f)} = 2^{1/2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$$

Donc

$$(-1)^{q(f, \mathfrak{l}\cap(\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}})}(\tau\rho_{\mathfrak{l}})(g^{-1}\sigma_o g)^{-1} p_{\sigma, g^{-1}\sigma_o g}(f)$$

ne dépend pas de $\mathfrak{l}$, on le notera $Q_{\sigma,g}(f, \tau)$. On a:

LEMME. *Soient x et y deux éléments de G tels que $\sigma_o(x.f) = x.f$ et $\sigma_o(y \cdot f) = y \cdot f$. Alors $Q_{\sigma,x}(f, \tau) = Q_{\sigma,y}(f, \tau)$.*

Ce lemme sera démontré au paragraphe 6.2.

On pose alors $Q_\sigma(f, \tau) = Q_{\sigma,g}(f, \tau)$. Il est clair que si $x \in G$ on a, $Q_\sigma(f, \tau) = Q_\sigma(x \cdot f, {}^x\tau)$; où ${}^x\tau$ est le caractère de $\tilde{G}(x \cdot f)^{\mathfrak{g}}$ défini par transport de structure (voir [B-1] p. 48). On pose:

$$\Theta_{\sigma,f} = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in X(f)} Q_\sigma(f, \tau)\Theta_{f,\tau}.$$

Alors $\Theta_{\sigma,f} = \Theta_{\sigma,g \cdot f}$ pour tout $g \in G$. Cela nous permet de définir $\Theta_{\sigma,\Omega}$, pour $\Omega \in (\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma$, par $\Theta_{\sigma,\Omega} = \Theta_{\sigma,f}$, $f \in \Omega$.

4.3. Avec les notations ci-dessus, on a:

THEOREME. *Soit $\phi \in C_c^\infty(\sigma G)$. Alors la fonction $\Omega \to \Theta_{\sigma,\Omega}(\phi)$ est intégrable pour* $\mathrm{d}m_\chi$ *et on a*

$$\sum_{z \in Z/B_\sigma} \chi(z)\mu_{\sigma z}(\phi) = 2^{-1/2(\dim G^\sigma + \operatorname{rang} G^\sigma)} \int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \Theta_{\sigma,\Omega}(\phi)\, \mathrm{d}m_\chi(\Omega).$$

REMARQUES: 1-Si $\phi \in C_c^\infty(G), \Theta_{\sigma,\Omega}(\phi)$ est nulle. Donc la formule du théorème est valable pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\tilde{G})$.
2- La formule (3) de l'introduction se déduit facilement du théorème.

5. Démonstration des proposition 3.2 et 3.3

5.1. Soit s un élément elliptique de σG. On reprend les notations du paragrahe 3 et on note $M_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. On pose $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}_R$. On notera $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ l'ensemble des racines réelles dans $\Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

Soient $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ et soit $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$. On choisit X_α et $X_{-\alpha}$ dans $\mathfrak{m}$ de poids α et $-\alpha$ respectivement tels que:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

On note Ker α le noyau de α dans $\mathfrak{a}$ et on pose $\mathfrak{a}' = \mathrm{Ker}\,\alpha \oplus \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$. Alors $\mathfrak{a}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}, \mathfrak{a}'_I = \mathfrak{a}_I \oplus \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ et $\mathfrak{a}'_R = \mathfrak{a}_R \cap \mathrm{Ker}\,\alpha$. On note c_α l'application linéaire de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ telle que $c_\alpha(X) = X$ si $\alpha(X) = 0$ et $c_\alpha(h_\alpha) = i(X_\alpha - X_{-\alpha})$; elle est induite par un élément de $M_{\mathbb{C}}$.

Soit $\beta \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ une racine telle que $\beta(h_\alpha) = 0$. On pose $\beta' = \beta \circ c_\alpha^{-1}$. Alors $\beta' \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}'), h_{\beta'} = h_\beta$ et l'application $\beta \to \beta'$ est une bijection de l'orthogonal de α dans $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ sur $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}')$.

Soit $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ un sytème de racines positives. (On note Φ'^+ l'ensemble des racines β' où β parcourt l'ensemble des $\beta \in \Phi^+$ orthogonaux à h_α. C'est un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}')$.

Suivant ([D-V], II-4), nous noterons $B^{\mathfrak{m}}$ l'espace vectoriel des fonctions b de 3 variables $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m}), \Phi^+$ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ et $Y \in i\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ qui vérifient:

b-1. Soit $m \in M$. On a

$$b(m\mathfrak{a}, m.\Phi^+, m.Y) = b(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$$

b-2. Soit $\alpha \in \Phi^+$, simple. On a

$$b(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) + b(\mathfrak{a}, \Phi^+, s_\alpha . Y) = b(\mathfrak{a}', \Phi'^+, c_\alpha . Y) + b(\mathfrak{a}', \Phi'^+, c_\alpha . s_\alpha . Y)$$

où s_α est la réflexion de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ correspondant à α.

b-3. On pose $Y = Y_o - i\pi y$, avec $Y_o \in \mathfrak{a}_I$ et $y \in \mathfrak{a}_R$. Alors $b(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) = 0$ si $y \notin \Sigma_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{R}^+ \cdot h_\alpha$ où $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

Si $\mathfrak{a}$ est fondamentale, $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$ est vide et Φ^+ est omis de la notation. La relation b-3 s'interprète: $b(\mathfrak{a}, Y) = 0$ si $y \neq 0$.

Nous rassemblons, dans le lemme suivant, les propriétés des éléments de $B^{\mathfrak{m}}$ dont nous aurons besoin (voir [D-V], II.4 lemmes 1, 2 et 6).

LEMME. *Soit* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de Cartan fondamentale de* $\mathfrak{m}$ *et soit* $b \in B^{\mathfrak{m}}$. *Alors:*

(i) *la restriction de* b *à* $\mathfrak{b}$ *est une fonction* $W(M, \mathfrak{b})$*-invariante qui détermine* b.

(ii) *si* $b(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) \neq 0$, *il existe* $m \in M_{\mathbb{C}}$ *tel que* $m \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *et* $b(\mathfrak{b}, m \cdot Y) \neq 0$ *et si* y *est comme en b-3, il existe* $\omega \in W(\Phi(m, \mathfrak{a}))$ *tel que* $\omega \cdot y = -y$.

(iii) *si la restriction de* b *à* $\mathfrak{b}$ *est bornée, alors* b *est bornée.*

Soit $X \in \mathfrak{b}_I$. La transformée de Fourier $\hat{I}_X^{\mathfrak{m}}$ de $I_X^{\mathfrak{m}}$ est une fonction bornée, M-invariante et analytique dans l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{m}^*$. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ et soit Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$. Soit $C(\Phi^+)$ l'ensemble des $\nu \in \mathfrak{a}_R^*$ tels que $\nu(h_\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

D'après Harish-Chandra (voir, par exemple, [V]), il existe une fonction $Y \to b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$ sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$, nulle en dehors des conjugués (sous $M_{\mathbb{C}}$) de X, telle que:

$$\hat{I}_X^{\mathfrak{m}}(\lambda) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}} b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) e^{-i\lambda(Y)}$$

pour tout $\lambda = \mu + \nu$ avec $\mu \in \mathfrak{a}_I^*$ et $\nu \in C(\Phi^+)$. La fonction b_X est dans $B^{\mathfrak{m}}$ et on a:

i-1. $b_X(\mathfrak{b}, Y) = 0$ si $Y \notin W(M, \mathfrak{b}) \cdot X$.

i-2. $b_X(\mathfrak{b}, Y) = \dfrac{1}{|W(M, \mathfrak{b}) \cdot X|}$ si $Y \in W(M, \mathfrak{b}) \cdot X$.

5.2. On reprend les notations de la section précédente. On a:

$$\hat{V}_{\sigma,s} = \sum_{X \in \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}}} \chi_{\sigma,s}(X) \hat{I}_X^{\mathfrak{m}}.$$

On introduit l'élément $b_{\sigma,s}$ de $B^{\mathfrak{m}}$ défini par:

$$b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) = \sum_{X \in \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}}} \chi_{\sigma,s}(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$$

Cette somme est finie pour $\mathfrak{a}, \Phi^+, Y$ fixés. Comme $\mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}}$ est invariant par $W(M, \mathfrak{b})$, il résulte de i-1 et i-2 que:

$$b_{\sigma,s}(\mathfrak{b}, X) = \begin{cases} \chi_{\sigma,s}(X) & \text{si } X \in \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}} \\ 0 & \text{si } X \notin \mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathfrak{b}} \end{cases}$$

Le lemme suivant rassemble les propriétés de la fonction $b_{\sigma,s}$.

LEMME. *Soient* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, $X \in \mathfrak{a}_I$, $g \in G$ *et* $z \in Z$. *Alors on a:*

(i) $b_{\sigma,sz}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) = \chi(z) b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$

(ii) $b_{\sigma,gsg^{-1}}(g \cdot \mathfrak{a}, g \cdot \Phi^+, g \cdot Y) = b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$

(iii) $b_{\sigma,s \cdot \exp X}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) = b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, X + Y)$.

DEMONSTRATION. Les deux premières assertions sont évidentes. La démonstration de (iii) est la même que celle de la formule II-(65) dans [D-V]; nous omettons les détails.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. On note $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$. Rappelons, notations de 2.1, que pr est la projection de $\mathfrak{h}_{I,Z}$ sur $\mathfrak{a}_{I,Z}$. On définit une fonction $\tilde{\chi}$ sur $\mathfrak{a}_{I,Z}$ de la façon suivante: s'il existe $X \in \mathfrak{h}_{I,Z}$ tel que $\mathrm{pr}(X) = 0$ et $\chi(\exp X) \neq 1$, on pose $\tilde{\chi}(Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{a}_{I,Z}$. Sinon, soit $Y \in \mathfrak{a}_{I,Z}$ et soit $X \in \mathfrak{h}_{I,Z}$ tel que $\mathrm{pr}(X) = Y$, on pose $\tilde{\chi}(Y) = \chi(\exp X)$; cela est bien défini.

COROLLAIRE. *Soit* $Y_0 \in \mathfrak{a}_{I,Z}$. *On a*

$$b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y + Y_o) = \tilde{\chi}(Y_o) b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$$

DEMONSTRATION. Notons $\mathfrak{h}_I^- = \{X \in \mathfrak{h}_I \mid s \cdot X = -X\}$. Alors $\mathfrak{h}_I = \mathfrak{h}_I^- \oplus \mathfrak{a}_I$; en effet la restriction de $\mathrm{Ad}\, s^2$ à $\mathfrak{h}$ est l'identité de $\mathfrak{h}$ car $s^2 \in G$ et $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$. Soit $X \in \mathfrak{h}_I$ tel que $\mathrm{pr}(X) = Y_o$. Ecrivons $X = X^- + Y_o$ avec $X^- \in \mathfrak{h}_I^-$. Alors $s . \exp X = \exp -\frac{1}{2}X^- s . \exp Y_o \exp \frac{1}{2}X^-$. On déduit facilement du lemme que $b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y + Y_o) = \chi(\exp X) b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$. Le corollaire en découle.

5.3. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. On pose:

$$\mathfrak{a}_s = \{X \in i\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(s . \exp X)^2 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}\}.$$

LEMME. *Soit* $X \in i\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ *tel que* $b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, X) \neq 0$. *Alors*

(i) $X \in \mathfrak{a}_s$

(ii) *écrivons* $X = X_o - i\pi x$, $X_o \in \mathfrak{a}_I$ *et* $x \in \mathfrak{a}_R$; *on a*

$$x \in \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{Z}^+ . \frac{1}{2} h_\alpha$$

DEMONSTRATION. (i) découle du lemme 5.1, (ii). Pour (ii), soit $X \in \mathfrak{a}_s$, on a $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}} 2X) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}}$, donc $\alpha(2X) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. En particulier, $\alpha(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$. D'après le lemme 5.1, (ii), il existe $\omega \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}))$ tel que $\omega . x = -x$, donc $2x = x - \omega x$ appartient à $\Sigma_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{a})} \mathbb{Z} . h_\alpha$. Comme $x \in \Sigma_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{R}^+ . h_\alpha$, le lemme s'en déduit.

5.4. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\chi}^*(\mathfrak{m})$. On considère $\Phi^+(\lambda) = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) \mid \lambda(h_\alpha) > 0\}$; c'est un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$.

D'après le lemme 5.1, (iii), il existe $d > 0$ tel que $|b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)| \leqslant d$ pour tout $\mathfrak{a}, \Phi^+, Y$.

LEMME. *Soit $X_o \in \mathfrak{a}_I$. Alors*

$$\sum_{x \in \sum_{\alpha \in \Phi^+(\lambda)} \mathbb{Z}^+ \cdot \frac{1}{2} h_\alpha} |b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), X_o - i\pi x) e^{-\pi\lambda(x)}| \leqslant d \,.\, \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+(\lambda) \\ \alpha \,\text{simple}}} (1 - e^{-\pi\lambda(h_\alpha/2)})^{-1}$$

DEMONSTRATION. La même que celle du lemme II-7 dans [D-V].

Soit $x \in \mathfrak{a}_R$. Supposons donnés deux éléments X_1 et X_2 de $\mathfrak{a}_I$ tels que $X_1 - i\pi x$ et $X_2 - i\pi x$ appartiennent à $\mathfrak{a}_s$, alors $X_1 - X_2 \in \mathfrak{a}_s$ et donc $2(X_1 - X_2) \in \mathfrak{a}_{I,Z}$.

D'après le corollaire 5.2, la fonction $X \to b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), X) e^{-i\lambda(X)}$ est invariante par translation par $\mathfrak{a}_{I,Z}$. Cela avec le lemme ci-dessus nous permet de poser:

$$p_{\sigma,s}(\lambda) = \sum_{X \in \mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_{I,Z}} b_{\sigma,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), X) e^{-i\lambda(X)};$$

cette série est absolument sommable.

5.5. Nous allons démontrer les propositions 3.2 et 3.3. Comme dans [D-V], pour démontrer la proposition 3.2, il suffit de montrer (avec $p_{\sigma,s}$ définie ci-dessus):

PROPOSITION. *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$. On a*

$$\int_{\mathfrak{m}^*_\chi} |p_{\sigma,s}(f)\phi(f)| \, d\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f) < \infty$$

$$\int_{\mathfrak{m}^*} \hat{V}_{\sigma,s}(f)\phi(f) \, df = \int_{\mathfrak{m}^*_\chi} \phi(f) p_{\sigma,s}(f) \, d\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f).$$

DEMONSTRATION. Compte tenu des lemmes 5.3 et 5.4, la démonstration de la proposition est la même que celle du théorème II-l'de [D-V].

La proposition 3.3 découle immédiatement du lemme 5.1 et de la définition de $p_{\sigma,s}$ ci-dessus.

6. Démonstration du lemme 4.2 et du théorème 4.3

6.1. Rappelons que $\mathfrak{g}$ a une structure complexe. On note J la multiplication par i dans $\mathfrak{g}$. Alors J vérifie

(a) $J^2 = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$

(b) $[J.X, Y] = [X, J.Y] = J.[X, Y]$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$

(c) $\mathrm{Ad}\, s \circ J = -J \circ \mathrm{Ad}\, s$ pour tout $s \in \sigma G$.

On note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},h}$ (resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},a}$) le sous-espace propre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ correspondant à la valeur propre i (resp. $-i$) de J. La relation (a) montre que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C},h} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C},a}$ et la relation (b) montre que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},h}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},a}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Il est clair, d'après (b), que $\mathfrak{h}$ est stable par J. On déduit alors de (b) que J laisse stable les sous-espaces radiciels (pour $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si α est une racine de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ l'espace radiciel correspondant. On note Δ_h (resp. Δ_a) l'ensemble des racines telles que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ est inclus dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},h}$ (resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},a}$). Alors $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \Delta_h \cup \Delta_a$.

Soit $s \in \sigma G$. La relation (c) montre que s permute les idéaux $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},h}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},a}$; en particulier ils sont isomorphes. En plus si $\mathfrak{h}$ est stable par s les ensembles Δ_h et Δ_a sont permutés par s.

Soit s un élément semi-simple de σG. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^s$. On note $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$; c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors $\operatorname{Ad} s^2|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \operatorname{Id}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$. Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, s^2 opère dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ par un scalaire qu'on note $\xi_\alpha(s)$. Le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^s, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ s'identife à l'ensemble des racines α dans Δ_h telles que $\xi_\alpha(s) = 1$ de sorte que si on fixe, pour tout $\alpha \in \Delta_h$ telle que $\xi_\alpha(s) = 1$, un élément non nul $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$, on a

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^s = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\substack{\alpha\in\Delta_h \\ \xi_\alpha(s)=1}} \mathbb{C}.(X_\alpha + s.X_\alpha).$$

Soient $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on note h_α sa coracine. Soit $f \in \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\text{reg}}$. On note $\mathscr{L}(\mathfrak{a}, f)$ l'ensemble des lagrangiens $\mathfrak{l}$ en f tels que si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ on a:

$f(h_\alpha) > 0$ si la restriction de α à $\mathfrak{a}$ est réelle

$if(h_\alpha) > 0$ si la restriction de α à $\mathfrak{a}$ est imaginaire

$\bar{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ si la restriction de α à $\mathfrak{a}$ est complexe.

On remarque que, dans la situation où $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^s$, la restriction de $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ à $\mathfrak{a}$ est réelle, imaginaire ou complexe suivant que $s.\bar{\alpha} = \alpha$, $s.\bar{\alpha} = -\alpha$ ou $s.\bar{\alpha} \neq \mp\alpha$.

Si $\mathfrak{l}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ somme de sous-espaces radiciels, on pose $\Delta_*(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \Delta_*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ où $*$ désigne h ou a.

Soit s un élément semi-simple de σG. On reprend les notations ci-dessus. Soit $\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tel que $s.\bar{\alpha} = -\alpha$ et $\xi_\alpha(s) = 1$. Si X_α est un élément non nul de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$, $\kappa(X_\alpha, s\bar{X}_\alpha)$ est un réel non nul et son signe ne dépend pas du choix de X_α; on le note $\varepsilon_\alpha(s)$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions:

LEMME. *Soient* $f \in \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\text{reg}}$ *et* $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{a}, f)$ *stable par* s.

Alors:

$$q(f, \mathfrak{l} \cap (1-s).\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = |\{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \mid s.\bar{\alpha} = -\alpha,\ \xi_\alpha(s) = 1 \text{ et } \varepsilon_\alpha(s) = +\}|.$$

REMARQUE: Par l'identification de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^s, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ avec $\{\alpha \in \Delta_h | \xi_\alpha(s) = 1\}$ l'ensemble $\{\alpha \in \Delta_h | s.\bar{\alpha} = -\alpha,\ \xi_\alpha(s) = 1 \text{ et } \varepsilon_\alpha(s) = +\}$ correspond à l'ensemble des racines imaginaires non compactes de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^s$.

6.2. Dans cette section nous démontrons le lemme 4.2. On utilise les notations de la section 4.2. Il est clair que $Q_{\sigma,g}(f,\tau) = Q_{\sigma,1}(g\,.\,f, {}^g\tau)$. On en déduit qu'il suffit de démontrer le lemme quand $\sigma_o\,.\,f = f$ et $y = 1$. Soit $h \in G(f)$. On voit facilement que $Q_{\sigma,xh}(f,\tau) = Q_{\sigma,x}(f,\tau)$. On pose $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}(f)^{\sigma_o}$. Il est bien connu (voir, par exemple, la démonstration du lemme 1.6.1. de [B-1]) qu'il existe $h \in G(f)$ et $X \in \mathfrak{a}$ tels que $\sigma_o \exp X = h^{-1}x^{-1}\sigma_o xh$. Puisque $\exp 2X = 1$, X appartient à $\mathfrak{a}_I$. Compte tenu des propriétés de la fonction $p_{\sigma,.}$, on voit facilement que pour démontrer le lemme il suffit de montrer que pour $X \in \mathfrak{a}_I$ avec $\exp 2X = 1$, on a $e^{1/2\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X)_{\mathfrak{l}}} = 1$. On pose $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$ et on note H le sous-groupe de Cartan de G correspondant à $\mathfrak{h}$. Comme G est simplement connexe, il existe un caractère de H défini par:

$$\exp X \to e^{\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\in\Delta_h(\mathfrak{l},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\alpha(X)},\quad X \in \mathfrak{h}.$$

Comme $\mathfrak{l}$ est σ_o-stable, on a $\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X)_{\mathfrak{l}} = \Sigma_{\alpha\in\Delta_h(\mathfrak{l},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\alpha(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$. Ceci termine la démonstration du lemme 4.2.

6.3. Dans cette section nous introduisons, brièvement, la méthode de descente de Harish–Chandra et nous renvoyons à l'appendice de [D-H-V] pour la présentation que nous ferons et pour plus de références.

On note $\tilde{G}_{\mathrm{ell}}$ l'ensemble des éléments elliptiques de $\tilde{G}$. Soit $s \in \tilde{G}_{\mathrm{ell}} \cap \sigma G$. On emploie les notations de 3. On note $\mathfrak{r} = (1-s)\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$.

Soit $\eta > 0$. On note $\mathscr{V}_\eta$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}$ tels que la partie imaginaire de toute valeur propre de $\mathrm{ad}\,X$ (dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) soit de module strictement inférieur à η. Si η est assez petit, l'ensemble

$$\mathscr{W}_{s,\eta} = \bigcup_{g\in G} g\,s \exp \mathscr{V}_\eta g^{-1}.$$

est un ouvert G-invariant de σG. Et si on choisit pour tout $s \in \tilde{G}_{\mathrm{ell}} \cap \sigma G$ un réel $\eta_s > 0$ aussi petit que l'on veut, la réunion des $\mathscr{W}_{s,\eta_s}$ recouvre σG (voir, par exemple, [B-1], lemme 8-1-1). Si η_s est assez petit, l'application $Y \to s\exp Y$ de $\mathscr{V}_{\eta_s}$ dans σG est transverse au front d'onde de toute fonction généralisée G-invariante θ dans $\mathscr{W}_{s,\eta_s}$ (voir, par exemple, [B-1] p. 52). On peut donc définir l'image réciproque de θ par cette application que nous noterons $\theta(s\exp Y)$. Suivant Harish–Chandra on définit la fonction généralisée θ^s dans $\mathscr{V}_{\eta_s}$ par la formule:

$$\theta^s(Y) = \left|\det\left(\frac{1-\exp(\mathrm{ad}\,Y)}{\mathrm{ad}\,Y}\right)_{\mathfrak{m}}\right|^{1/2} |\det(1 - s\exp Y)_{\mathfrak{r}}|^{1/2}\,|\det(1-s)_{\mathfrak{r}}|^{-1/2}\,\theta(s\exp Y).$$

La fonction généralisée θ^s détermine θ. De plus une suite θ_n de fonctions généralisées G-invariantes dans $\mathscr{W}_{s,\eta_s}$ converge faiblement vers θ si et seulement si la suite θ_n^s converge faiblement vers θ^s.

6.4. Cette section et les suivantes seront consacrées à la démonstration du théorème 4.3. Nous utilisons les notations du paragraphe 4.

En utilisant les mesures fixées dans 1.3, nous confondons dans la suite fonctions généralisées et distributions. La démarche que nous suivrons pour démontrer le théorème est la même que celle de [D-V] pour établir la formule de Plancherel. On pose $\theta_\chi = \Sigma_{z\in Z/B_\sigma}\chi(z)\mu_{\sigma,z}$, alors, compte tenu de ce qui a été rappelé ci-dessus sur la méthode de descente, le théorème découle du lemme suivant:

LEMME. *Soit* $s\in\tilde{G}_{\mathrm{ell}}\cap\sigma G$ *et soit* $\varepsilon>0$ *assez petit. Alors pour toute fonction* $\phi\in C_c^\infty(\mathscr{V}_\varepsilon)$ *on a*

$$\text{(i)}\quad \int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} |\Theta_{\sigma,\Omega}^s(\phi)|\,\mathrm{d}m_\chi(\Omega) < \infty$$

$$\text{(ii)}\quad 2^{-1/2(\dim G^\sigma+\operatorname{rang} G^\sigma)}\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \Theta_{\sigma,\Omega}^s(\phi)\,\mathrm{d}m_\chi(\Omega) = \theta_\chi^s(\phi)$$

Ce lemme sera démontré dans la section 6.6.

Le calcul de θ_χ^s est facile (voir par exemple [Du], Section 3. proposition 3 pour une situation plus générale), on a:

$\theta_\chi^s = 0$ si $0\notin\mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathrm{b}}$ (notation de 3.2)

$\theta_\chi^s = \chi_{\sigma,s}(0)\,|\det(1-\operatorname{Ad}s)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^s}|^{-1}\,\delta_{0|\mathrm{v}_\varepsilon}$ si $0\in\mathscr{R}_{\sigma,s}^{\mathrm{b}}$ où δ_0 est la mesure de Dirac à l'origine de $\mathfrak{g}^s$

6.5. Dans cette section nous calculons $\Theta_{\sigma,\Omega}^s$.

Rappelons les notations du paragraphe 4; $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}^s$, M le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{r}=(1-s)\mathfrak{g}$. On note $M_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$.

Soient $\Omega_o\in(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma$ et $f_o\in\Omega_o^{\sigma_o}$. On a

$$\Theta_{\sigma,\Omega_o}^s = \frac{1}{2}\sum_{\tau_o\in X(f_o)} Q_\sigma(f_o,\tau_o)\Theta_{f_o,\tau_o}^s \tag{1}$$

Le calcul de Θ_{f_o,τ_o}^s a été fait dans [B-1]. Rappelons la fonction φ_{f_o,τ_o}^s sur $\Omega_o\cap\mathfrak{m}^*$ de [D-H-V]. Soient $f\in\Omega_o\cap\mathfrak{m}^*$ et $\mathfrak{l}$ un lagrangien en f stable par s. Soit $g\in G$ tel que $g.f_o=f$. Alors:

$$\varphi_{f_o,\tau_o}^s(f) = (-1)^{q(f,\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}})}\frac{({}^g\tau_o\rho_{\mathfrak{l}})(s)}{\det(1-s)_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(f)}}$$

le membre de droite ne dépend ni de $g \in G$ tel que $g.f_o = f$, ni du lagrangien en f stable par s. D'après le théorème 5.5.3 de [B-1], on a:

$$\Theta^s_{f_o,\tau_o}(\phi) = \int_{\Omega_o \cap \mathfrak{m}^*} \phi(f)\varphi^s_{f_o,\tau_o}(f)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega_o\cap\mathfrak{m}^*}(f) \tag{2}$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathscr{V}_\varepsilon)$.

On pose $G^o = G^{\sigma_o}$. On a

LEMME. *Il existe un polynôme $M_{\mathbb{C}}$-invariant P_s sur $\mathfrak{m}^*_{\mathbb{C}}$ tel que, pour tout $f_o \in \mathfrak{g}^*_\chi$, $\tau_o \in X(f_o)$ et $f \in G.f_o \cap \mathfrak{m}^*$, on a:*

$$Q_\sigma(f_o, \tau_o)\varphi^s_{f_o,\tau_o}(f)\Pi^\sigma_{\mathfrak{m}}(f) = c_s P_s(f) p_{\sigma,s}(f)$$

où $c_s = 2^{-1/2(\dim M - \operatorname{rang} M)}(2i\pi)^{1/2(\dim G^o - \dim M)}(-1)^{q(G^o)-q(M)}$

DEMONSTRATION. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$. On pose $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$. Soit $Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Alors il existe $g \in G$ tel que $\sigma_o . g^{-1}. Y = g^{-1}. Y$. Donc $g\sigma_o g^{-1}$ appartient à $sG(Y)$. Comme $G(Y)$ est le sous-groupe de Cartan de G correspondant à $\mathfrak{h}$, on a $g\sigma_o g^{-1}. Y' = Y'$ pour tout $Y' \in \mathfrak{a}$. On peut alors (voir démonstration du lemme 1.6.2 de [B-1]) choisir g de sorte que $s = g\sigma_o g^{-1}\exp X$ avec $X \in \mathfrak{a}_I$. On pose $\sigma_1 = g\sigma_o g^{-1}$ et $\mathfrak{r}_1 = (1-\sigma_1)\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{l}$ un lagrangien contenant $\mathfrak{h}$ et stable par s. Alors $e^{1/2\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{l}}}$ ne dépend pas du choix de g. En effet, soient $x \in G$ et $Y \in \mathfrak{a}_I$ tels que $s = x\sigma_o x^{-1}\exp Y$. On a $\sigma_1 = x\sigma_o x^{-1}\exp(Y - X)$ avec $\exp 2(Y - X) = 1$. Pour les mêmes raisons que dans la démonstration du lemme 4.2, on a $e^{1/2\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{l}}} = 1$; ce qui prouve notre assertion. Il est clair que $e^{1/2\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{l}}} = e^{\sum_{\alpha\in\Delta_h(\mathfrak{l},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\alpha(X)}$.

Remarquons que, pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a $\xi_\alpha(s) = e^{2\alpha(X)}$. Alors un calcul simple donne:

$$\det(1 - s)_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(f)} = 2^{1/2(\dim M - \operatorname{rang} M)} \prod_{\substack{\alpha\in\Delta_h(\mathfrak{l},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\\ e^{2\alpha(X)}\neq 1}} (1 - e^{2\alpha(X)}) \tag{3}$$

D'après les définitions de Q_σ et $\varphi^s_{f_o,\tau_o}$ et les propriétés de $p_{\sigma,.}$ on voit facilement que:

$$Q_\sigma(f_o, \tau_o)\varphi^s_{f_o,\tau_o}(f)$$
$$= (-1)^{q(f,\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{1\mathbb{C}})+q(f,\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}})}e^{1/2\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{l}}}\det(1-s)^{-1}_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(f)}p_{\sigma,s}(f) \tag{4}$$

Le deuxième membre de (4) ne dépend pas du choix de $\mathfrak{l}$ lagrangien en f stable par s. Soit $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{a}, f)$ stable par s. D'après le lemme 6.2 et la remarque qui le suit on a

$$q(f, \mathfrak{l}\cap\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}|\{\text{racines imaginaires non compactes de } \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \text{ dans } \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}\}|. \tag{5}$$

Soit K_M un sous-groupe compact maximal de M. Il est bien connu (et facile à voir) que le deuxième membre de (5) est égal à

$$q(M) - \tfrac{1}{4}|\{\text{racines non imaginaires de } \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \text{ dans } \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}\}| \\ - \tfrac{1}{2}(\operatorname{rang} K_M - \dim \mathfrak{a}_I).$$

Par l'identification des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ avec les racines α dans $\Delta_h(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ telles que $\xi_\alpha(s) = 1$, on a

$$q(f, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}_{\mathbb{C}}) = q(M) - \frac{1}{2}|\{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) | \xi(s) = 1 \text{ et } s.\bar{\alpha} \neq -\alpha\}| \\ - \frac{1}{2}(\operatorname{rang} K_M - \dim \mathfrak{a}_I).$$

Notons G^1 le sous-groupe de G correspondant *à* $\mathfrak{g}^{\sigma_1}$. Soit K_{G^1} un sous-groupe compact maximal de G^1. Comme précédemment on obtient

$$q(f, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}_{1\mathbb{C}}) = q(G^1) - \frac{1}{2}|\{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, h_{\mathbb{C}}) | \sigma_1.\bar{\alpha} \neq -\alpha\}| \\ - \frac{1}{2}(\operatorname{rang} K_{G^1} - \dim \mathfrak{a}_I)$$

Les sous groupes K_{G^1} et K_M ont même rang (voir, par exemple, les lemmes 1.6.1 et 1.6.2 de [B-1]. Il est clair que $s.\alpha = \sigma_1.\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Donc on a

$$(-1)^{q(f, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}_{1\mathbb{C}}) + q(f, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}_{\mathbb{C}})} = (-1)^{q(G^1) - q(M)} i^{|\{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) | \sigma_1.\bar{\alpha} \neq -\alpha \text{ et } \xi_\alpha(s) \neq 1\}|} \tag{6}$$

Soit $\mathfrak{l}$ un lagrangien contenant $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et stable par s. Pour $f \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ on pose

$$\omega_{\mathfrak{a}}(f) = e^{\sum_{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \alpha(X)} \prod_{\substack{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \xi_\alpha(s) \neq 1}} \frac{f(h'_\alpha)}{(1 - e^{2\alpha(X)})}$$

Il est facile de voir que $\omega_{\mathfrak{a}}(f)$ ne dépend pas du choix $\mathfrak{l}$. On va montrer que $\omega_{\mathfrak{a}}$ est invariant par $W(M_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Pour cela on rappelle Ψ le système des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (sans multiplicités). Alors tout $\lambda \in \Psi$ est la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ de deux racines dans $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$; si α est l'une d'elles, l'autre est $s.\alpha$. On note $\Psi(\mathfrak{l})$ l'ensemble des $\lambda \in \Psi$ tels qu'il existe $\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est λ. Il est clair que si $\lambda \in \Psi$, on a soit $\lambda \in \Psi(\mathfrak{l})$ soit $-\lambda \in \Psi(\mathfrak{l})$. L'ensemble $\Psi^s = \{\lambda \in \Psi | e^{2\lambda(X)} = 1\}$ est un sous-système de racines de Ψ et c'est l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$; Ψ est le système de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma_1}$. On pose

$\Psi^s(\mathfrak{l}) = \Psi^s \cap \Psi(\mathfrak{l})$. Soit $\gamma \in W(\Psi^s)$. On a

$$(-1)^{|\{\lambda \in \Psi^s(\mathfrak{l}) | \gamma . \lambda \notin \Psi^s(\mathfrak{l})\}|} = (-1)^{|\{\lambda \in \Psi(\mathfrak{l}) | \gamma . \lambda \notin \Psi(\mathfrak{l})\}|}; \tag{7}$$

cela est clair quand $\Psi(\mathfrak{l})$ est un sous-système de racines positives dans Ψ, et les deux termes de (7) coincident avec la signature de γ. En général, on montre que les deux termes de (7) définissent des caractères de $W(\Psi^s)$ et $W(\Psi)$ respectivement (voir la démonstration du lemme 1 de [B-2]) et il est facile de voir que ces caractères coincident avec les signatures. On déduit de (7) que:

$$\prod_{\lambda \in \Psi(\mathfrak{l}) \setminus \Psi^s(\mathfrak{l})} f(h'_\alpha) = \prod_{\lambda \in \Psi(\mathfrak{l}) \setminus \Psi^s(\mathfrak{l})} \gamma . f(h'_\alpha)$$

cela entraine que $\omega_{\mathfrak{a}}$ est invariant par $W(M_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Donc, d'après le théorème de Chevalley, il existe un polynôme $M_{\mathbb{C}}$-invariant sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est $\omega_{\mathfrak{a}}$. On le note aussi $\omega_{\mathfrak{a}}$.

Choisissons $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ de sorte que $\mathfrak{a}_R$ soit de dimension maximale. On écrit $s = \sigma_1 \exp X$ avec $X \in \mathfrak{a}_I$ et σ_1 de la forme $g\sigma_o g^{-1}$, $g \in G$. Soit $\mathfrak{a}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ contenant $\mathfrak{a}_I$. Soit c une transformation de Cayley de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}'$; elle vérifie $c . Y = Y$ pour tout $Y \in \mathfrak{a}_I$ et en particulier $c . X = X$. On peut supposer que c est un élément de $M_{\mathbb{C}}$. Alors si $\mathfrak{l}$ est un lagrangien contenant $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{a}}$, $c . \mathfrak{l}$ est un lagrangien de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{a}'}$ et stable par s. On vérifie alors facilement que $\omega_{\mathfrak{a}'}(c . f) = \omega_{\mathfrak{a}}(f)$ pour tout $f \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Comme $\omega_{\mathfrak{a}'}$ est $M_{\mathbb{C}}$-invariant on a $\omega_{\mathfrak{a}'}(c.f) = \omega_{\mathfrak{a}'}(f)$. Donc $\omega_{\mathfrak{a}} = \omega_{\mathfrak{a}'}$. Soit $\mathfrak{a}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Soit $x \in M$ tel que $x.\mathfrak{a}'$ contient $\mathfrak{a}_I$. Alors on a $s = x^{-1}\sigma_1 x \exp(x^{-1} . X)$ avec $x^{-1} . X \in \mathfrak{a}'_I$. On voit alors facilement que $\omega_{\mathfrak{a}'} = \omega_{x . \mathfrak{a}'}$. Donc les $\omega_{\mathfrak{a}}$ coincident pour $\mathfrak{a}$ parcourant $\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. On pose $\omega = \omega_{\mathfrak{a}}$. On définit P_s par:

$$P_s(f) = (2\pi)^{-1/2(\dim G^1 - \dim M)} \omega(f).$$

Nous allons montrer que P_s ainsi défini vérifie le lemme. Soient $f \in \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}^*$ et $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{a}, f)$ stable par s. Rappelons que:

$$\Pi_m^{\sigma}(f) = (2\pi)^{-1/2(\dim G^1 - \dim M)} \prod_{\substack{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \xi_\alpha(s) \neq 1}} |f(h'_\alpha)|$$

Soit $\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tel que $\xi_\alpha(s) \neq 1$. Si $s . \bar{\alpha} = \alpha$, on a $|f(h'_\alpha)| = f(h'_\alpha)$, si $s . \bar{\alpha} \neq \mp \alpha$, on a $s . \bar{\alpha} \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $f(h'_{s . \bar{\alpha}}) = \overline{f(h'_\alpha)}$ et si $s . \bar{\alpha} = -\alpha$ on a $|f(h'_\alpha)| = if\ (h'_\alpha)$. Donc

$$\Pi_{\mathfrak{m}}^{p}(f) = (2\pi)^{-1/2(\dim G^1 - \dim M)} i^{|\{\alpha \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) | s . \bar{\alpha} = -\alpha \text{ et } \xi_\alpha(s) \neq 1\}|} \times \prod_{\substack{a \in \Delta_h(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \xi_\alpha(s) \neq 1}} f(h'_\alpha) \tag{8}$$

Compte tenu de la définition de P_s, le lemme découle de (4), (6) et (8).

6.6. Dans cette section nous démontrons le lemme 6.4.

Soient $\Omega \in (\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma$ et $f_o \in \Omega^{\sigma_o}$. Il est clair que la fonction:

$$f \to \frac{1}{2} \sum_{\tau_o \in X(f_o)} Q_\sigma(f_o, \tau_o) \varphi^s_{f_o, \tau_o}(f),$$

sur $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$, ne dépend pas de f_o, on la note $Q^s_\sigma(f)$. D'après les formules (1) et (2), on a

$$\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} |\Theta^s_{\sigma,\Omega}(\phi)| \, \mathrm{d}m_\xi(\Omega) \leqslant \int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} |Q^s_\sigma(f) \hat{\phi}(f)| \, \mathrm{d}\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f)$$

D'après le lemme 2.5, le deuxième membre de cette inégalité est égal à

$$\int_{\mathfrak{m}_\chi^*} \Pi^\sigma_m(f) |Q^s_\sigma(f) \hat{\phi}(f)| \, \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f).$$

D'après le lemme 6.4, ceci est égal à

$$|c_s| \int_{\mathfrak{m}_\chi^*} |P_s(f) \hat{\phi}(f) p_{\sigma,s}(f)| \, \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f)$$

Comme $P_s \hat{\phi} \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$, l'assertion (i) du lemme 6.4 découle de la proposition 5.5. On note D_s l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{m}$ tel que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{m})$, on a $\widehat{D_s\phi}(f) = P_s(f) \hat{\phi}(f)$. Les mêmes calculs que ci-dessus montrent que:

$$\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \Theta^s_{\sigma,\Omega} \, \mathrm{d}m_\chi(\Omega) = c_s \int_{\mathfrak{m}_\chi^*} \widehat{D_s\phi}(f) p_{\sigma,s}(f) \, \mathrm{d}\eta_{\mathfrak{m},\chi}(f)$$

D'après la proposition 3.2, le deuxième terme de cette égalité est égal à $c_s V_{\sigma,s}(D_s\phi)$. Si s n'est pas conjugué (sous G) à un élément $\sigma z, z \in Z$, $R^{\mathrm{b}}_{\sigma,s}$ (notation de 3.2) ne contient pas 0 et on peut choisir ε assez petit de sorte $\mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\sigma,s} \cap \mathscr{V}_\varepsilon = \emptyset$. Donc $V_{\sigma,s}(D_s\phi) = 0$ et il en est de même de $\theta^s_\chi(\phi)$; ce qui démontre l'assertion (ii) du lemme 6.4 dans ce cas. Si s est conjugué à un élément $\sigma z, z \in Z$, on peut supposer, par G-invariance, que $s = \sigma z$; dans ce cas $M = G^\sigma$. On a $P_{\sigma z}(f) = (-1)^{q(G^o) - q(G^\sigma)}$ pour tout $f \in \mathfrak{g}^{\sigma *}_{\mathbb{C}}$; celà découle aisément de la définition de $P_{\sigma z}$ et de l' interprétation cohomologique de $(-1)^{q(G^o) - q(G^\sigma)}$ dans ([K] p. 296). Pour ε assez petit, $\mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\sigma,\sigma z} \cap \mathscr{V}_\varepsilon$ est réduit à $\{0\}$ et $V_{\sigma,\sigma z}(\phi) = \chi(z)\phi(o)$. Donc

$$\int_{(\mathfrak{g}_\chi^*/G)^\sigma} \Theta^{\sigma z}_{\sigma,\Omega}(\phi) \, \mathrm{d}m_\chi(\Omega) = 2^{-1/2(\dim G^\sigma - \mathrm{rang}\, G^\sigma)} \chi(z) \phi(o).$$

On a vu en 6.4 que

$$\theta_\chi^{\sigma z}(\phi) = 2^{-\dim G^o}\chi(z)\phi(o)$$

Cela termine la démonstration du lemme 6.4.

7. Relèvement de la mesure de Dirac de G^o

7.1. Dans cette section, nous allons rappeler la notion de relèvement de distributions de $G^o(:=G^{\sigma_o})$ à G (voir [Sh-1]). Comme auparavant, nous remplaçons les intégrales orbitales tordues dans G par des intégrales orbitales (ordinaires) dans $\sigma_o G$.

Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\sigma_o(T) = T$). On note $Z^1(T) = \{u \in T | \sigma_o(u)u = 1\}$. Le groupe T opère dans $Z^1(T)$ par $t.u = u\sigma_o(t)t^{-1}$, $t \in T$. On pose $H^1(T) = Z^1(T)/T$. On note $\mathscr{A}(T)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que gTg^{-1} est défini sur $\mathbb{R}$ et on pose $\mathscr{D}(T) = G^o \backslash \mathscr{A}(T)/T$.

Soit $\delta \in T$ tel que $\sigma_o\delta$ soit régulier; ceci est équivalent à $\sigma_o(\delta)\delta \in G_{\text{reg}}$ ([Sh-2], lemme 2.1.2). On munit la G-orbite de $\sigma_o\delta$ de la mesure définie en 1.3 qu'on note $\mu_{\sigma_o\delta}$ et on pose

$$\mu_{\sigma_o\delta}^{\text{st}} = \sum_{u \in H^1(T)} \mu_{\sigma_o\delta_u}.$$

Soit $\gamma \in T^{\sigma_o} \cap G_{\text{reg}}$. Comme ci-dessus on munit la G^{σ_o}-orbite de γ d'une mesure qu'on note δ_γ et on pose

$$\delta_\gamma^{\text{st}} = \sum_{\omega \in \mathscr{D}(T)} \delta_{\omega.\gamma}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\sigma_o G)$. D'après [Sh-1], il existe $\phi_o \in \mathscr{S}(G^o)$ (espace de Harish-Chandra-Schwartz de G^o) telle que, pour tout T tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ et tout $\gamma \in T^{\sigma_o} \cap G_{\text{reg}}$, on ait:

$$(*)\quad \begin{aligned} &\delta_\gamma^{\text{st}}(\phi_o) = \mu_\delta^{\text{st}}(\phi) \quad \text{si } \gamma = \sigma_o(\delta)\delta \\ &\delta_\gamma^{\text{st}}(\phi_o) = 0 \quad \text{si } \gamma \notin T_o^{\sigma_o} \end{aligned}$$

Une distribution sur G^o est dite stablement invariante si elle est dans l'adhérence de l'espace des distributions engendré par les $\delta_\gamma^{\text{st}}, \gamma \in G_{\text{reg}}^o$. La fonction ϕ_o n'est pas unique, mais si θ est une distribution tempérée stablement invariante sur G^o, $\theta(\phi_o)$ ne dépend pas de ϕ_o vérifiant $(*)$. On définit alors, le relèvement de θ à G, que nous noterons $\text{Rel}_{G^o}^G\theta$ par:

$$\text{Rel}_{G^o}^G\theta(\phi) = \theta(\phi_o).$$

C'est une distribution invariante sur $\sigma_o G$.

Rappelons que si θ est une fonction localement sommable et continue sur G^o_{reg}, le relèvement de θ est une fonction localement sommable et on a (voir [Sh-2], corollaire 5.4.4) $\mathrm{Rel}^G_{G^o}\theta(\sigma_o\delta) = \theta(\sigma_o(\delta)\delta)$.

Le relèvement des caractères tempérés a été étudié dans [C] et [B-3]. Ici, nous nous interessons au calcul du relèvement de la mesure de Dirac à support l'élément neutre dans G^o.

REMARQUE: Dans ce qui précède il n'est pas nécessaire de supposer que G est simplement connexe.

7.2. Dans cette section nous rappelons la formule de Plancherel sous la forme établie dans [D-V]. On note Z^o le centre de G^o et on fixe un caractère χ^o de Z^o. Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)$ où $\mathfrak{g}^o$ désigne $\mathfrak{g}^{\sigma_o}$. On note A le sous-groupe de Cartan de G^o correspondant à $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{l}$ un lagrangien de $\mathfrak{g}^o_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On pose

$$\rho_{\mathfrak{l}}(X) = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X)_{\mathfrak{l}}, X \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}.$$

Alors il existe un caractère $\xi_{\mathfrak{l}}$ de A (bien défini) tel que

$$\xi_{\mathfrak{l}}(\exp X) = e^{\rho_{\mathfrak{l}}(X)},\ X \in \mathfrak{a}.$$

En plus la restriction de $\xi_{\mathfrak{l}}$ à Z^o ne dépend ni de $\mathfrak{l}$ ni de $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)$ (voir [D-V], lemme I-1). Si $z \in Z^o$, on pose

$$\tilde{\chi}^o(z) = \chi^o(z)\xi_{\mathfrak{l}}(z).$$

Soit $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)$. On note $\mathfrak{a}_{I,Z^o}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}_I$ tels que $\exp X \in Z^o$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}_I$. On note $\overset{*}{\mathfrak{a}}_{I,\chi^o}$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}_I^*$ tels que

$$e^{i\mu(X)} = \tilde{\chi}^o(\exp X) \text{ pour } X \in \mathfrak{a}_{I,Z^o}.$$

On pose $\mathfrak{a}^*_{\chi^o} = \mathfrak{a}^*_{I,\chi^o} \oplus \mathfrak{a}^*_R$ et on définit une mesure $\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}$ sur $\mathfrak{a}^*$, de support $\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$, comme en 2.2.

Soit s un élément elliptique de G^o. On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{o^s}$ et on définit $\overset{*}{\mathfrak{m}}_{\chi^o}$ et une mesure $\eta_{\mathfrak{m},\chi^o}$ sur $\mathfrak{m}^*$ de support $\mathfrak{m}^*_{\chi^o}$ comme en 2.3. Sur $(\mathfrak{g}^{o*}_{\chi^o}/G^o)$ on définit une mesure notée $\mathrm{d}m_{\chi^o}$ par la formule:

$$\int_{\mathfrak{g}^{o*}} \phi(f)\,\mathrm{d}\eta_{\mathfrak{g}^o,\chi^o}(f) = \int_{\mathfrak{g}^{o*}_{\chi^o}/G^o}\left(\int_\Omega \phi(f)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(f)\right)\mathrm{d}m_{\chi^o}(\Omega)$$

Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{m}$. On pose:

$$\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{1,s} = \{X \in \mathfrak{b}_I \mid s \exp X \in Z^o\}.$$

Soit $X \in \mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{1,s}$. On pose $\chi^o_{1,s}(X) = \tilde{\chi}^o(s \exp X)$ et on définit, comme en 3.2, la distribution $V_{1,s}$ sur $\mathfrak{m}$ par:

$$V_{1,s} = \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{1,s}} \chi^o_{1,s}(X) I^{\mathfrak{m}}_X$$

On introduit l'élément $\mathfrak{b}_{1,s}$ de $B^{\mathfrak{m}}$ défini par

$$\mathfrak{b}_{1,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y) = \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{1,s}} \chi^o_{1,s}(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$$

On pose $\mathfrak{a}^o_s = \{X \in i\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}^o_{\mathbb{C}}}(s \exp X) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}^o_{\mathbb{C}}}\}$.

On définit, comme en 5.4, la fonction $p_{1,s}$ sur $\mathfrak{a}^*$ par:

$$p_{1,s}(\lambda) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}^o_s / \mathfrak{a}_{I,Z^o}} b_{1,s}(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y) e^{-i\lambda(Y)}$$

REMARQUE: $p_{1,s}(\lambda) = q(s^{-1}, \lambda)$ dans la notation de [D-V].

On a ([D-V], théorème II-1):

$$V^{\wedge}_{1,s} = p_{1,s} \eta_{\mathfrak{m},\chi^o}.$$

Soit $f \in \mathfrak{g}^{o*}_{\chi^o}$. Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^o(f)$. On note $\mathscr{L}^o(\mathfrak{a}, f)$ l'ensemble des lagrangiens $\mathfrak{l}$ en f tels que, pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on ait:

$f(h_\alpha) > 0$ si α est réelle,

$if(h_\alpha) > 0$ si α est imaginaire non compacte,

$if(h_\alpha) < 0$ si α est imaginaire compacte,

$\bar{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ si α est complexe.

On note A le sous-groupe de Cartan de G^o correspondant à $\mathfrak{a}$ et A_I le sous-groupe compact maximal de A. Alors la restriction de $\xi_{\mathfrak{l}}$ à A_I ne dépend pas de $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}^o(\mathfrak{a}, f)$ ([D-V], lemme I-2); on le note ξ_f. On note $X(f)$ l'ensemble des caractères Γ de A_I tels que

$$\Gamma(z) = \chi^o(z)$$

$$\Gamma(\exp X) = e^{if(X)} \xi_f(\exp X), \ X \in \mathfrak{a}_I.$$

On note $T_{f,\Gamma}$ la représentation unitaire irréductible de G^o associée à $f \in \mathfrak{g}^{o*}_{\chi^o}$ et $\Gamma \in X(f)$ (voir [S-V], Section 2). On pose:

$$Q(\Gamma, f) = \sum_{s \in A_I / A_{I_o} Z^o} p_{1,s}(f) \xi_f(s) \Gamma(s^{-1})$$

$$\Theta_f = |A_I / A_{I_o} Z^o| \sum_{\Gamma \in X(f)} Q(\Gamma, f) \operatorname{tr} T_{f,\Gamma}$$

Alors si $f' \in \Omega = G^o . f$, on a $\Theta_{f'} = \Theta_f$ ([D-V], I-8). On pose alors $\Theta_\Omega = \Theta_f$. Avec ces notations, on a pour tout $\phi \in C_c^\infty(G^o)$ ([D-V], théorème II-3)

$$\int_{\mathfrak{g}^{o*}_{\chi^o}/G^o} \Theta_\Omega(\phi)\, \mathrm{d}m_{\chi^o}(\Omega) = \sum_{z \in Z^o} \chi^o(z)\delta_z(\phi),$$

où δ_z est la mesure de Dirac à support z.

7.3. Dans cette section, nous établissons ou rappelons des résultats qui serviront dans la démonstration du théorème 7.4. Nous utilisons les notations des sections précédentes.

(a) La distribution

$$\theta_{f,\Gamma} = \sum_{\omega \in W(G^o, \mathfrak{a}) \backslash W(G, \mathfrak{a})} \operatorname{tr} T_{\omega . f, {}^\omega\Gamma}$$

est tempérée et stablement invariante, et

$$\mathrm{Rel}^G_{G^o}\, \theta_{f,\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in X(2f)} 2^{1/2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)} \varphi^{\sigma_o}_{2f,\tau}(2f)\Theta_{2f,\tau}$$

Le fait que $\theta_{f,\Gamma}$ soit tempérée et stablement invariante est bien connu (voir, par exemple, [Sh-3], lemme 5-2). Le calcul de $\mathrm{Rel}^G_{G^o}\, \theta_{f,\Gamma}$ a été fait dans [C] et dans le chapitre 8 de [B-1]; cependant il n'est pas explicité sous cette forme, mais les calculs faits dans le chapitre 8 de [B-1] donnent facilement le résultat.

(b) Soit $g \in N(G, \mathfrak{a})$. Alors $Q({}^g\Gamma, g . f) = Q(\Gamma, f)$.

Posons $L = Z(G, \mathfrak{a}_R)$. D'après ([Sh-3], théorème 2-1), on a $N(G, \mathfrak{a}) = N(G^o, \mathfrak{a}) . N(L, \mathfrak{a})$. Comme l'assertion ($b$) est claire pour $g \in G^o$, nous supposerons que $g \in N(L, \mathfrak{a})$. Par définition, on a

$$Q(\Gamma, f) = \sum_{s \in A_I/A_{I_o}Z^o} p_{1,s}(f)\xi_f(s)\Gamma(s^{-1})$$

Donc

$$Q({}^g\Gamma, g . f) = \sum_{s \in A_I/A_{I_o}Z^o} p_{1,s}(g . f)\xi_{g.f}(s){}^g\Gamma(s^{-1})$$

Notons $L^o = L^{\sigma_o}$. Alors il est bien connu que $A = A_o Z_{L^o}$ (Z_{L^o} est le centre de L^o). Donc on peut choisir, pour chaque classe dans $A_I/A_{I_o}Z^o$, un représentant dans Z_{L^o}; on fera ce choix dans la suite. Alors ${}^g\Gamma(s) = \Gamma(s)$ et il est facile de voir que $\xi_{g.f}(s) = \xi_f(s)$; il reste à montrer que

$$p_{1,s}(g . f) = p_{1,s}(f). \tag{1}$$

Rappelons que

$$p_{1,s}(f) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}_s^o/\mathfrak{a}_{I,Z^o}} \sum_{X \in R_{1,s}^b} \tilde{\chi}_{1,s}^o(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+(f), Y) e^{-if(Y)}$$

Comme $g \in L$, on a $g.v = v$ pour tout $v \in \mathfrak{a}^*_{\bar{R},\mathbb{C}}$. Donc $\Phi^+(g.f) = \Phi^+(f)$. Pour démontrer la formule (1) il suffit, donc, de montrer que $e^{ig.f(Y)} = e^{if(Y)}$ pour tout $Y \in \mathfrak{a}_s^o$. Rappelons que G est le groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, dont on note $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de ses points complexes; $G_{\mathbb{C}}$ s'identifie à $G \times G$. Le groupe $G_{\mathbb{C}}^{\sigma_o}$ est le sous-groupe de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^o$; il s'identifie à G. Donc le centre de $G_{\mathbb{C}}^{\sigma_o}$ est inclus dans le centre de $G_{\mathbb{C}}$. Alors $Y \in \mathfrak{a}_s^o$ si et seulement si $s \exp Y$ appartient au centre de $G_{\mathbb{C}}^{\sigma_o}$ et donc au centre de $G_{\mathbb{C}}$. On en déduit que $\exp(g.Y - Y) = 1$. Comme $g.Y - Y$ appartient à $\mathfrak{a}_I$, on a $e^{if(g.Y-Y)} = 1$; ce qui termine la preuve de l'assertion (*b*).

(*c*) Soit $x \in G$ tel que $\sigma_o(x)x \in Z^o$. Alors on a

$$(-1)^{q(G^o)-q(G^{\sigma_o x})} = \xi_I(\sigma_o(x)x)$$

Cela découle aisément de ([K] p. 296).

7.4. Les distributions $\delta_z, z \in Z^o$, sont tempérées et stablement invariantes. Le but de cette section est de calculer leurs relèvements à G.

On pose

$$Z_r^1 = \{x \in G | \sigma_o(x)x \in Z^o\}$$

Le groupe G opère dans Z_r^1 par $g.x = \sigma_o(g)xg^{-1}$. On note $H_r^1 = Z_r^1/G$.

THEOREME. *Soit $\chi^o \in \hat{Z}^o$. On a:*

$$\mathrm{Rel}_{G^o}^G\left(\sum_{z \in Z^o} \chi^o(z)\delta_z\right) = \sum_{x \in H_r^1} (-1)^{q(G^o)-q(G^{\sigma_o x})} \chi^o(\sigma_o(x)x)\mu_{\sigma_o x}$$

DEMONSTRATION. Soit $\phi \in C_c^\infty(\sigma_o G)$. Soit $\phi_o \in \mathscr{S}(G^o)$ vérifiant 7.1.(*). D'après [He-W], théorème 7.6, la formule de Plancherel s'étend à l'espace $\mathscr{S}(G^o)$. Donc on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rel}_{G^o}^G\left(\sum_{z \in Z^o} \chi^o(z)\delta_z\right)(\phi) &= \left(\sum_{z \in Z^o} \chi^o(z)\delta_z\right)(\phi_o) \\ &= \int_{\mathfrak{g}_{\chi^o}^{o*}/G^o} \Theta_\Omega(\phi_o) dm_{\chi^o}(\Omega)\end{aligned}$$

Par définition de dm_{χ^o}, ceci est égal à

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)/G^o} |W(G^o,\mathfrak{a})|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} |A_I/A_{I_o}Z^o|^{-1} \sum_{\Gamma\in X(\lambda)} Q(\Gamma,\lambda)\,\mathrm{tr}\, T_{\lambda,\Gamma}(\phi_o)\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}(\lambda) \tag{2}$$

D'après 7.3(b), (2) est égal à:

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)/G^o} |W(G,\mathfrak{a})|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} |A_I/A_{I_o}Z^o|^{-1} \sum_{\Gamma\in X(\lambda)} Q(\Gamma,\lambda)\theta_{\lambda,\Gamma}(\phi_o)\,\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}(\lambda)$$

On pose

$$\tilde{\Theta}_f(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{\tau\in X(f)} 2^{1/2\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}\varphi^{\sigma_o}_{f,\tau}(f)\Theta_{f,\tau}(\phi)$$

D'après 7.3(a), $\theta_{\lambda,\Gamma}(\phi_o) = \tilde{\Theta}_{2\lambda}(\phi)$. Il est clair que:

$$|A_I/A_{I_o}Z^o|^{-1} \sum_{\Gamma\in X(\lambda)} Q(\Gamma,\lambda) = p_{1,1}(\lambda)$$

On en déduit que (2) est égal à:

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{g}^o)/G^o} |W(G,\mathfrak{a})|^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*} p_{1,1}(\lambda)\,\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)\tilde{\Theta}_{2\lambda}(\phi)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}(\lambda)$$

On note χ le caractère de Z défini par $\chi(z) = \chi^o(\sigma_o(z)z)$. Soit ψ une fonction sur $\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$ telle que $\psi\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}$ soit intégrable pour $\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}$. On a par définition

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \psi(\lambda)\,\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_I/\mathfrak{a}_{I,Z^o})^{-1} \sum_{\mu\in\mathfrak{a}^*_{I,\chi^o}} \int_{\mathfrak{a}^*_R} \psi(\mu+\nu)\,\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\mu+\nu)\,d\nu \tag{3}$$

Remarquons que si $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$ on a $2\lambda\in\mathfrak{a}^*_\chi$. Si $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\chi$ et $\lambda/2\notin\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$, on pose $\psi(\lambda/2) = 0$. Dans (3), on fait le changement de variable $\lambda' = 2\lambda$. Alors en remarquant que $\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda) = 2^{-1/2\dim(\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a})}\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda'/2)$, on voit que

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\in\mathfrak{a}^*_{I,\chi^o}} &\int_{\mathfrak{a}^*_R} \psi(\mu+\nu)\,\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\mu+\nu)\,d\nu \\ &= 2^{-1/2\dim(\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a})-\dim\mathfrak{a}_R} \sum_{\mu\in\mathfrak{a}^*_{I,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*_R} \psi\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\mu+\nu)\,d\nu\end{aligned} \tag{4}$$

Il découle des définitions que $\Pi^\sigma_{\mathfrak{g}^o}(\lambda) = \Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)$. On a

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{a}_I/\mathfrak{a}_{I,Z})\ \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_I/\mathfrak{a}_{I,Z^o})^{-1} = |\mathfrak{a}_{I,Z}/\mathfrak{a}_{I,Z^o}|^{-1} \tag{5}$$

A partir des formules (3), (4) et (5), on déduit:

$$\int_{\mathfrak{a}^*} p_{1,1}(\lambda)\Pi_{\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a}}(\lambda)\tilde{\Theta}_{2\lambda}(\phi)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi^o}(\lambda)$$
$$= |\mathfrak{a}_{I,Z}/\mathfrak{a}_{I,Z^o}|^{-1}2^{-1/2\dim(\mathfrak{g}^o/\mathfrak{a})-\dim(\mathfrak{a}_R)}\int_{\mathfrak{a}^*} p_{1,1}(\lambda/2)\Pi^{\sigma}_{\mathfrak{g}^o}(\lambda)\tilde{\Theta}_{\lambda}(\phi)\,d\eta_{\mathfrak{a},\chi}(\nu)$$

où on a fait la convention $p_{1,1}(\lambda/2)=0$ si $\lambda/2\notin\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$. Le groupe Z opère de façon naturelle dans H^1_r et le stabilisateur de x est $B_{\sigma_o x}$. Alors on a

$$\sum_{x\in H^1_r}(-1)^{q(G^o)-q(G^{\sigma_o x})}\chi^o(\sigma_o(x)x)\mu_{\sigma_o x}(\phi)$$
$$=\sum_{x\in H^1_r/Z}(-1)^{q(G^o)-q(G^{\sigma_o x})}\chi^o(\sigma_o(x)x)\left(\sum_{z\in Z/B_{\sigma_o x}}\chi(z)\mu_{\sigma_o xz}\right)(\phi)$$

Donc, compte tenu du théorème 4.3, pour démontrer le théorème 7.4, il suffit de montrer

$$|\mathfrak{a}_{I,Z}/\mathfrak{a}_{I,Z^o}|^{-1}2^{\dim(\mathfrak{a}_I)}p_{1,1}(\lambda/2)=\sum_{x\in H^1_r/Z}\chi^o(\sigma_o(x)x)(-1)^{q(G^o)-q(G^{\sigma_o x})}p_{\sigma_o x,\sigma_o}(\lambda),\qquad(6)$$

pour tout $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\chi}$.

Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartana fondamentale de $\mathfrak{g}^o$. On note B_I le sous-groupe analytique de G^o correspondant à $\mathfrak{b}_I$. Si $x\in Z^1_r$, il existe un représentant de la classe x dans B_I. On fixe un ensemble S de représentants, des éléments de H^1_r/Z, dans B_I. On pose

$$\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}=\{X\in b_I|\exp 2X\in Z^o\}$$

Alors

$$\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}=\bigcup\nolimits_{x\in S}\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\sigma_o x,\sigma_o}\ \text{(réunion disjointe)}$$

En effet, il est clair que si $X\in\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\sigma_o x,\sigma_o}$, alors $X\in\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\mathrm{st}}$; réciproquement, si $X\in\mathscr{R}^{\mathscr{b}}_{\mathrm{st}}$ on a $\exp X\in Z^1_r$ et $X\in\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\sigma_o\exp X,\sigma_o}$. Supposons que $\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\sigma_o x_1,\sigma_o}\cap\mathscr{R}^{\mathfrak{b}}_{\sigma_o x_2,\sigma_o}\neq\varnothing$ et soit X un élément de cette intersection. Alors par définition, il existe $g_1,g_2\in G$ et $z_1,z_2\in Z$ tels que

$$\sigma_o\exp X=g_1\sigma_o x_1z_1g_1^{-1}$$
$$\sigma_o\exp X=g_2\sigma_o x_2z_2g_2^{-1}$$

On en déduit que $\sigma_o(g_2^{-1}g_1)x_1(g_1^{-1}g_2)=x_2z_2z_1^{-1}$. Cela prouve que x_1 et x_2 ont même image dans H^1_r/Z.

Soit $X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{st}}$. On pose $\tilde{\chi}(X) = \chi^o(\exp 2X)$. Il est facile de voir que si $X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\sigma_o x, \sigma_o}$, on a $\tilde{\chi}(X) = \chi_{\sigma_o x, \sigma_o}(X)\chi^o(\sigma_o(x)x)$. Il est clair que $\frac{1}{2}\mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{1,1} = \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{st}}$ et que si $X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{1,1}$, on a $\chi^o_{1,1}(X) = \xi_{\mathrm{I}}(\exp X)\tilde{\chi}(X/2)$.

Par définition, si $\lambda/2 \in \mathfrak{a}^*_{\chi^o}$ on a:

$$p_{1,1}(\lambda/2) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}^o_1/\mathfrak{a}_{I,Z^o}} \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{1,1}} \chi_{1,1}(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y) e^{-i\lambda/2(Y)}$$

On déduit facilement des propriétés des éléments de $B^{\mathfrak{g}^o}$ (lemme 5.1.(i)) que $b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y) = b_{X/2}(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y/2)$. Il est clair que $\frac{1}{2}\mathfrak{a}^o_1 = \mathfrak{a}_{\sigma_o}$. Donc, si $\lambda/2 \in \mathfrak{a}^*_{\chi^o}$, on a

$$p_{1,1}(\lambda/2) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}_{\sigma_o}/\frac{1}{2}\mathfrak{a}_{I,Z^o}} \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{st}}} \xi_{\mathrm{I}}(\exp 2X)\tilde{\chi}(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y) e^{-i\lambda(Y)}$$

Comme $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_{I,Z^o} \supset \mathfrak{a}_{I,Z}$. On a

$$p_{1,1}(\lambda/2) = \left|\frac{1}{2}\mathfrak{a}_{I,Z^o}/\mathfrak{a}_{I,Z}\right| \sum_{Y \in \mathfrak{a}_{\sigma_o}/\mathfrak{a}_{I,Z}} \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{st}}} \xi_{\mathrm{I}}(\exp 2X)\tilde{\chi}(X) b_X(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y) e^{-i\lambda(Y)} \tag{7}$$

On a

$$\left|\frac{1}{2}\mathfrak{a}_{I,Z^o}/\mathfrak{a}_{I,Z}\right| = |\mathfrak{a}_{I,Z^o}/2\mathfrak{a}_{I,Z}| = 2^{\dim(\mathfrak{a}_I)}|\mathfrak{a}_{I,Z}/\mathfrak{a}_{I,Z^o}| \tag{8}$$

De la définition de $p_{\sigma_o x, \sigma_o}(\lambda)$ et de (7), (8) et 7.3.(*c*), on déduit la formule (6) pour les $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\chi$ tels que $\lambda/2 \in \mathfrak{a}^*_{\chi^o}$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\chi$ tel que $\lambda/2 \notin \mathfrak{a}^*_{\chi^o}$. Alors le membre de gauche de (6) est nul par définition. On va montrer que le membre de droite est nul aussi. Remarquons, puisque G est simplement connexe, que pour que $\lambda/2$ appartienne à $\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$ il faut et il suffit qu'il existe un caractère de A_I de différentielle $i\lambda/2$; et cela est réalisé si et seulement, pour tout $X \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\exp 2X = 1$, on ait $e^{i\lambda(X)} = 1$. Comme $\lambda/2$ n'appartient pas à $\mathfrak{a}^*_{\chi^o}$, il existe $Y_o \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\exp 2Y_o = 1$ et $e^{i\lambda(Y_o)} \neq 1$. Alors Y_o n'appartient pas à $\mathfrak{a}_{I,Z}$; en effet supposons qu'il existe $Y \in \mathfrak{h}_{I,Z}(\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}})$ tel que $Y_o = \frac{1}{2}(Y + \sigma_o . Y)$, alors $e^{i\lambda(Y_o)} = e^{i\lambda(Y)}$ et comme $\exp Y \in Z$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\chi$, on a $e^{i\lambda(Y)} = \chi(\exp Y) = \chi^o(\exp(Y + \sigma_o Y)) = \chi^o(\exp 2Y_o) = 1$. Considérons la fonction $\psi \in B^{\mathfrak{g}_o}$ définie par:

$$\psi(\mathfrak{a}', \Phi^+, Y) = \sum_{X \in \mathscr{R}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{st}}} \xi_{\mathrm{I}}(\exp 2X)\tilde{\chi}(X) b_X(\mathfrak{a}', \Phi^+, Y)$$

Alors le même raisonnement que celui de la démonstration de la formule II–65 de [D-V] montre que $\psi(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y + Y_o) = \psi(\mathfrak{a}, \Phi^+, Y)$ pour tout $Y \in i\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$.

Le membre de droite de (6) est égal à

$$\sum_{Y \in \mathfrak{a}_{\sigma_o}/\mathfrak{a}_{I,Z}} \psi(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y)e^{-i\lambda(Y)}$$

Considérons la fonction φ: $Y \to \psi(\mathfrak{a}, \Phi^+(\lambda), Y)e^{-i\lambda(Y)}$ sur $\mathfrak{a}_{\sigma_o}/\mathfrak{a}_{I,Z}$. Alors $\varphi(Y + Y_o) = \varphi(Y)e^{-i\lambda(Y_o)}$. Comme $e^{i\lambda(Y_o)} \neq 1$, cela montre que

$$\sum_{Y \in \mathfrak{a}_{\sigma_o}/\mathfrak{a}_{I,Z}} \varphi(Y) = 0,$$

et termine la démonstration du théorème 7.4.

On déduit immédiatement du théorème:

COROLLAIRE. *Soit $z \in Z^o$. Alors*

$$Rel_{G^o}^{G}\delta_z = \sum_{\substack{x \in H_r^1 \\ \sigma_o(x)x = z}} (-1)^{q(G^o) - q(G^{\sigma_o x})} \mu_{\sigma_o x}$$

REMARQUE: Supposons que G n'est pas simplement connexe, alors le théorème 7.4 reste valable. On peut le voir comme suit. Soient G_1 le revêtement simplement connexe de G, π la projection de G_1 sur G et Z_1 le noyau de π. Soit $\phi \in C_c^\infty(\sigma_o G)$. Considérons la fonction $\tilde{\phi}$ définie par:

$$\tilde{\phi}(\sigma_o g) = \frac{1}{|Z_1|}\phi(\sigma_o \pi(g))$$

alors $\tilde{\phi}$ appartient à $C_c^\infty(\sigma_o G_1)$. Par la correspondance 7.1.(∗), il lui est associé une fonction $\tilde{\phi}_o \in \mathscr{S}(G_1^{\sigma_o})$. On considère la fonction ϕ_o sur G^{σ_o} définie par:

$$\phi_o(g) = \sum_{x \in \pi^{-1}(g) \cap G_1^{\sigma_o}} \tilde{\phi}_o(x).$$

Alors ϕ_o appartient à $\mathscr{S}(G^o)$ et vérifie 7.1.(∗). La suite est un calcul simple.

REMARQUE: Signalons qu'il n'est pas difficile de démontrer le théorème 7.4, sans utiliser les formules d'inversion, en établissant des "formules limites" pour les intégrales orbitales tordues d'éléments réguliers.

References

[B-1] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, *J. Funct. Anal.*, 70 (1987) 1–79.

[B-2] A. Bouaziz, Sur les représentations induites des algèbres de Lie semi-simples complexes, *Bull. Sc. Math.*, 2 ème série, 106 (1982) 279–288.

[B-3] A. Bouaziz, Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, *Astérisque*, Vol. 171–172 (1989) 163–194.

[C] L. Clozel, Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels, *Ann. Sc. E.N.S.*, (4) 15 (1982), 45–115.

[De] P. Delorme, Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ (à paraître à Comp. Math.).

[Du] J. Y. Ducloux, Formule d'inversion pour des intégrales orbitales, *J. reine angew. Math.*, 409 (1990) 41–92.

[D] M. Duflo, Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie, "*Cours d'été au C.I.M.E. Cortona* (1980)", Liguori, Naples (1982).

[D-H-V] M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne, Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, *Mémoires de la Soc. Mathématique de France*, numéro 15 (1984) 65–128.

[D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics*, 14 (1988) 289–336.

[G] F. Gantmacher, Canonical représentation of automorphisms of a complex semisimple Lie group; *Mat. Sb.* 5 (47) (1939) 101–144.

[Ha] Harish–Chandra, Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra, *Ann. of Math.*, 80 (1964) 551–593.

[He-W] R. Herb et J. Wolf, Rapidly decreasing functions on general semisimple groupes, Comp. Math. 58 (1986) 73–110.

[K] R. Kottwitz, Sign changes in harmonic analysis on reductive groups, *Transactions of the A.M.S.*, vol. 278, numéro 1 (1983) 289–297.

[Sh-1] D. Shelstad, Endoscopic groups and base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, *Pac. J. of Math.*, 110, numéro 2 (1984) 397–416.

[Sh-2] D. Shelstad, Base change and a matching theorem for real groups, *Springer L.N.*, 880 (1981) 425–482.

[S-V] B. Speh et D. Vogan, Reducibility of generalized principal series representations, *Acta Math.*, 145 (1980) 227–299.

[V] M. Vergne, A Poisson-Plancherel formula for semisimple Lie groups, *Ann. of Math.* 115 (1982) 639–666.