COMPOSITIO MATHEMATICA

MICHEL BRION

Factorisation de certains morphismes birationnels

Compositio Mathematica, tome 91, n° 1 (1994), p. 57-66
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__91_1_57_0>

Compositio Mathematica **91**: 57–66, 1994.

Factorisation de certains morphismes birationnels

MICHEL BRION
Université De Grenoble, Institut Fourier, B.P. 116, 38402 St. Martin D'Hères, France

Received 23 June 1992; accepted in final form 18 January 1993

Il est bien connu que tout morphisme birational entre surfaces projectives lisses complexes, est composé d'éclatements de points. Dans ce travail, on établit un résultat analogue pour les variétés sphériques de rang deux. Rappelons qu'une variété algébrique normale X, dans laquelle opère un groupe réductif connexe G, est dite sphérique si un sous-groupe de Borel B de G a une orbite dense dans X. Le rang de X est alors la codimension minimale d'une orbite de U dans X, où U désigne le radical unipotent de B. Observons que le rang de X ne dépend que du corps $\mathbf{C}(X)$.

On montre facilement que tout morphisme birationnel équivariant entre variétés sphériques de rang 1, projectives et lisses, est composé d'au plus deux éclatements d'orbites fermées de G. A partir du rang 3, le problème de factorisation des morphismes birationnels équivariants n'est pas complètement résolu pour les variétés toriques (voir [O] 1.7), a fortiori pour les variétés sphériques. Le cas du rang 2 fait l'objet de ce travail; plus précisément, on va démontrer les énoncés suivants.

THÉORÈME 1. (i) *Soit X une variété sphérique lisse, de rang 2; soit $A \subset X$ une sous-variété irréductible, stable par G. Alors l'éclatement de A dans X est lisse, et le diviseur exceptionnel est réduit et irréductible.*

(ii) *Tout morphisme birationnel propre et équivariant entre variétés sphériques lisses, de rang 2, est composé d'éclatements de sous-variétés irréductibles et stables par G.*

(iii) *Soit $\varphi: X' - \to X$ une application birationnelle équivariante où X, X' sont des variétés sphériques de rang 2, lisses et complètes. Il existe alors une variété sphérique X'', lisse et complète, et des morphismes birationnels p: $X'' \to X$ et p': $X'' \to X'$, tels que $p = \varphi \circ p'$ et que p, p' sont composés d'éclatements de centres lisses et stables par G.*

Le premier énoncé n'est pas complètement trivial; en effet, dans les variétés sphériques lisses de rang 2, certaines sous-variétés irréductibles, stables par G, peuvent être singulières, et de codimension au moins 2. Nous allons décrire de telles singularités, grâce à la structure locale d'une G-variété le long d'une orbite projective (voir [BLV] 1.4).

Soit X une G-variété sphérique lisse de rang 2; soit A une sous-variété de X, irréductible et stable par G. On suppose que A est singulière, et n'est pas un diviseur de X. Soit Y une orbite fermée de G, contenue dans le lieu singulier de A. On choisit un point y de Y; alors le groupe d'isotropie G_y est parabolique dans G. Rappelons (voir [BLV] 1.4) qu'il existe un sous-groupe parabolique P opposé à G_y, et une sous-variété localement fermée Z de X, tels que:

(a) Z est affine, et stable par $P \cap G_y := L$; de plus, l'intersection de Y et de Z est réduite à y.

(b) L'application $P^u \times Z \to X$: $(s, z) \to s \cdot z$ est une immersion ouverte.

On désigne par P^u le radical unipotent de P.

Observons que la singularité de A le long de Y est équivalente à la singularité de $A \cap Z$ en y. De même, puisque X est lisse, Z l'est aussi. Grâce à [L], on en déduit que Z est un espace vectoriel d'origine y, et que L opère linéairement dans Z. On note K le groupe dérivé de l'image de L dans le groupe linéaire de Z.

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes, voici la liste des triplets* $(K, Z, A \cap Z)$.

(i) $K = SL(2) \times SL(n)$ $(n \geqslant 3)$; $Z = \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^n$, *et* $A \cap Z$ *est formé des tenseurs décomposables.*

(ii) $K = SL(5)$; $Z = \Lambda^2\mathbf{C}^5$ *et* $A \cap Z$ *est formé des 2-vecteurs décomposables.*

(iii) K *est le groupe spinoriel de rang* 5; Z *est une représentation spinorielle irréductible de* K, *et* $A \cap Z$ *est le cône des spineurs purs.*

Observons sur cette liste que L opère dans l'espace projectif $\mathbf{P}(Z)$ et dans son dual $\mathbf{P}(Z^*)$ avec 2 orbites. Notons V l'orbite fermée de L dans $\mathbf{P}(Z)$, c'est-à-dire: $V = \mathbf{P}(A \cap Z)$. Notons $V^* \subset \mathbf{P}(Z^*)$ la variété duale de V. Puisque V^* est une L-sous-variété propre de $\mathbf{P}(Z^*)$, c'est l'orbite fermée de L dans $\mathbf{P}(Z^*)$. On en déduit que: $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Plus généralement, soit V une sous-variété lisse d'un espace projectif $\mathbf{P}^N$, qui n'est contenue dans aucun hyperplan. Soit V^* la variété duale; alors on a: $\dim V^* \geqslant \dim V$ (voir [E]). On conjecture que si l'égalité a lieu, alors V est une hypersurface, ou le couple $V \subset \mathbf{P}^N$ est l'un des couples $\mathbf{P}(A \cap Z) \subset \mathbf{P}(Z)$ ci-dessus. Cette conjecture est démontrée lorsque $\dim V \leqslant 2N/3$ (voir [E]), ou lorsque V est homogène et rationnelle (voir [Sn]).

1. Démonstration du théorème 1(i)

Grâce au résultat de [BLV] rappelé ci-dessus, on peut supposer que X est un espace vectoriel, dans lequel G opère linéairement. On peut aussi supposer que A est singulière, et de codimension au moins 2 dans X.

LEMME 1.

(i) *Le* G-*module* X *est simple.*

(ii) *Les orbites de G dans X sont* $X\backslash A$, $A\backslash\{0\}$ *et* $\{0\}$.

(iii) *Il existe un G-module simple M, et un G-morphisme* $\Phi: X \to M$, *tels que A est la fibre schématique de* Φ *en* 0.

Preuve du Lemme 1. Considérons l'algèbre $\mathbf{C}[X]$ des fonctions polynomiales sur X, et sa sous-algèbre $\mathbf{C}[X]^U$ formée des invariants de U. Puisque X est sphérique de rang 2, le tore B/U opère dans $\mathbf{C}[X]^U$ sans multiplicité, et la dimension de Krull de $\mathbf{C}[X]^U$ est 2. En outre, l'algèbre $\mathbf{C}[X]^U$ est factorielle; on en déduit qu'elle est engendrée par 2 vecteurs propres a_1, a_2 de B, dont les poids sont linéairement indépendants. De plus, les fonctions polynomiales a_1 et a_2 sont homogènes, et on peut supposer que a_1 est de degré 1.

Soit I l'idéal de A dans $\mathbf{C}[X]$. Dans $\mathbf{C}[X]^U$, l'idéal I^U est premier, non maximal et stable par B; il est donc engendré par a_1 ou a_2. L'idéal I est donc engendré par une orbite $G\cdot a_1$ ou $G\cdot a_2$.

Si a_2 est de degré 1, alors X est somme directe de deux G-modules X_1 et X_2, et le lieu des zéros de $G\cdot a_1$ (resp. $G\cdot a_2$) est X_2 (resp. X_1). Mais alors A est égale à X_1 ou X_2; donc A est lisse, ce qui est absurde. Par suite, le degré de a_2 est $d > 1$ (on peut montrer que $d = 2$; nous n'aurons pas besoin de ce résultat). On en déduit que le G-module X est simple, et que I est engendré par $G\cdot a_2$. De plus, I est l'unique idéal premier propre de $\mathbf{C}[X]$ qui est stable par G, et qui n'est pas maximal; l'assertion (ii) en résulte.

Soit M le dual du G-sous-module simple de $\mathbf{C}[X]$ engendré par a_2. L'inclusion de M^* dans $\mathbf{C}[X]$ induit un morphisme équivariant $\Phi: X \to M$ dont la fibre schématique en 0 est A. Le lemme 1 est démontré.

Le morphisme Φ induit une application rationnelle équivariante

$$\varphi: X - \to \mathbf{P}(M).$$

Puisque M^* engendre l'idéal de A, le graphe de φ est l'éclatement $\hat{X}$ de A dans X. Notons

$$p: \hat{X} \to X \text{ et } \hat{\varphi}: \hat{X} \to \mathbf{P}(M)$$

les deux projections; alors $\varphi \circ p = \hat{\varphi}$. Enfin, notons C l'unique orbite fermée de G dans $\mathbf{P}(M)$.

LEMME 2. *L'image de la restriction de* φ *à* $X\backslash A$ *est C, et les fibres sont des ouverts de sous-espaces vectoriels de X.*

Preuve du Lemme 2. On va utiliser des résultats de [B1] §§2 et 3, dont voici quelques notations. On choisit un tore maximal T de B; on note $X(T)$ le groupe des caractères de T, et on pose $V = X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On choisit un produit scalaire sur V, invariant par le groupe de Weyl de T, et on note $\| \ \|$ la norme associée.

Soient ω_1, ω_2 les poids de a_1, a_2. Vérifions que dans le segment $[\omega_1, d^{-1}\omega_2]$

de V, le point le plus proche de l'origine est $d^{-1}\omega_2$. En effet, en posant $\sigma = \omega_1 - d^{-1}\omega_2$, on a pour $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|(1-t)\omega_1 + td^{-1}\omega_2\|^2 - \|d^{-1}\omega_2\|^2 &= \|\omega_1 - t\sigma\|^2 - \|\omega_1 - \sigma\|^2 \\ &= (1-t^2)(\omega_1 - \sigma)\cdot\sigma + (1-t)^2\omega_1\cdot\sigma\end{aligned}$$

Mais les poids ω_1 et $\omega_1 - \sigma = d^{-1}\omega_2$ sont dominants; en outre, σ est une combinaison positive de racines positives (en effet, puisque M apparaît dans la puissance symétrique d-ième de X, le poids $d\omega_1 - \omega_2$ est une somme de racines positives). On a donc: $\omega_1\cdot\sigma \geqslant 0$ et $(\omega_1 - \sigma)\cdot\sigma \geqslant 0$, d'où l'assertion.

De [B1] Proposition 2.3, il résulte donc que l'image de $\Phi: X \to M$ est le cône sur C, donc $\varphi(X\backslash A)$ est égale à C. Il en résulte aussi que la strate ouverte de $\mathbf{P}(X)$ est $\mathbf{P}(X)\backslash\mathbf{P}(A)$. Par suite, d'après [B1] Proposition 3.3 et [Ki] 12.18, toute fibre de la restriction de φ à $X\backslash A$, est un ouvert d'un sous-espace vectoriel de X. Le lemme 2 est démontré.

Fin de la démonstration du théorème 1(i).

Choisissons un point y de C, et notons P son groupe d'isotropie. Soit F la fibre en y du morphisme $\hat{\varphi}: \hat{X} \to \mathbf{P}(M)$. D'après le lemme 2, on a: $\hat{\varphi}(\hat{X}) = C$; de plus, F est un sous-espace vectoriel de X, stable par P. Par suite, $\hat{X}$ s'identifie à $G \times_P F$; en particulier, $\hat{X}$ est lisse. En outre, p: $\hat{X} \to X$ s'identifie au morphisme canonique

$$\pi: G \times_P F \to X.$$

Montrons que le diviseur exceptionnel de $\hat{X}$ est réduit et irréductible. Posons $\dot{X} = X\backslash\{0\}$, $\dot{A} = A\backslash\{0\}$, et $\dot{F} = F\backslash\{0\}$. La restriction

$$\dot{\pi}: G \times_P \dot{F} \to \dot{X}$$

est l'éclatement de $\dot{A}$ dans $\dot{X}$. Puisque $\dot{A}$ est lisse, l'ensemble $\dot{\pi}^{-1}(\dot{A})$ est réduit et irréductible. D'autre part, $\pi^{-1}(0)$ est égal à $G \times_P \{0\} \simeq G/P$, donc la codimension de $\pi^{-1}(0)$ dans $G \times_P F$ est $\dim(F) \geqslant 2$. Puisque $\pi^{-1}(A)$ est un diviseur de Cartier, toute composante irréductible de $\pi^{-1}(A)$ rencontre $\dot{\pi}^{-1}(\dot{A})$. On en déduit que $\pi^{-1}(A)$ est réduit et irréductible.

REMARQUE. L'énoncé ne se généralise pas au rang 3. Par exemple, prenons pour X l'espace des formes quadratiques en 3 variables et pour A l'ensemble des formes de rang au plus 1. Alors X est une GL(3)-variété sphérique de rang 3, et A est une sous-variété sphérique de rang 1. On peut vérifier que l'éclatement de A dans X est singulier, et que le diviseur exceptionnel a 2 composantes irréductibles.

2. Démonstration du Théorème 1(ii)

Soit $\varphi: X' \to X$ un G-morphisme birationnel propre entre G-variétés lisses, sphériques de rang 2. Soit A une composante irréductible de l'image dans X de l'ensemble exceptionnel de φ. Notons $p: \hat{X} \to X$ l'éclatement de A dans X, et notons $\hat{A}$ le diviseur exceptionnel.

Il suffit de montrer que φ se factorise par p; en effet, puisque $\hat{X}$ est lisse, on concluera par récurrence sur le nombre de diviseurs irréductibles de X', stables par G et contractés par φ. On va se ramener à un problème combinatoire, grâce à la classification des variétés sphériques. Pour celle-ci, nous renvoyons à [Kn], dont nous allons rappeler quelques notations et résultats.

On note $\mathbf{C}(X)^{(B)}$ le groupe multiplicatif des vecteurs propres de B dans $\mathbf{C}(X)$; on note Λ l'ensemble des poids de ces vecteurs propres. Le groupe abélien Λ est libre de rang 2. L'application naturelle de $\mathbf{C}(X)^{(B)}/\mathbf{C}^*$ vers Λ, est un isomorphisme.

Toute valuation v du corps $\mathbf{C}(X)$, qui est triviale sur $\mathbf{C}$, se restreint en un morphisme $\rho(v): \Lambda \to \mathbf{Q}$. On désigne par $\mathscr{V}$ l'ensemble des valuations de $\mathbf{C}(X)$ qui sont invariantes par G. La restriction $\rho|\mathscr{V}$ envoie $\mathscr{V}$ injectivement dans $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Q}) := \mathscr{Q}$, et l'image $\rho(\mathscr{V})$ est un cône convexe polyédral dans $\mathscr{Q}$.

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs irréductibles de X qui sont stables par B et non par G. Observons que $\mathscr{D}$ ne dépend que de l'orbite ouverte de G dans X. Pour tout diviseur irréductible D, on note v_D la valuation de $\mathbf{C}(X)$ qui lui est associée.

Pour toute orbite Y de G dans X, on désigne par $\mathscr{B}_Y(X)$ (resp. $\mathscr{F}_Y(X)$) l'ensemble des diviseurs irréductibles de X qui contiennent Y, et qui sont stables par G (resp. par B et non par G). Alors $\mathscr{B}_Y(X) \subset \mathscr{V}$ et $\mathscr{F}_Y(X) \subset \mathscr{D}$. On note $\mathscr{C}_Y(X)$ le cône convexe de $\mathscr{Q}$ engendré par les $\rho(v)$, $v \in \mathscr{B}_Y(X) \cup \mathscr{F}_Y(X)$. Le couple $(\mathscr{C}_Y(X), \mathscr{F}_Y(X))$ est un *cône colorié*; lorsque Y décrit les orbites de G dans X, ces cônes coloriés s'assemblent en un *éventail colorié* noté $\mathbf{F}$.

Puisque X est lisse, pour toute orbite Y, la suite formée des $\rho(v_D)$ où D décrit $\mathscr{B}_Y(X) \cup \mathscr{F}_Y(X)$, forme une base du groupe $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Z})$; voir par exemple [B2] 2.1 Remarque (ii). L'éventail colorié $\mathbf{F}$ est dit *régulier*.

Notons $\mathbf{F}'$ (resp. $\hat{\mathbf{F}}$) l'éventail colorié de X' (resp. $\hat{X}$). Pour montrer que $\varphi: X' \to X$ se factorise par $p: \hat{X} \to X$, il suffit de vérifier que $\mathbf{F}'$ est une subdivision de $\hat{\mathbf{F}}$; voir [Kn] §5. On va d'abord décrire $\hat{\mathbf{F}}$ en termes de $\mathbf{F}$ et de la face $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ associée à l'orbite ouverte de G dans A (voir [Kn] 4.2 pour la corrspondance entre faces et orbites).

Définissons un éventail colorié, appelé *subdivision de* $\mathbf{F}$ *le long de* $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, en modifiant $\mathbf{F}$ comme suit.

(a) S'il existe $D \in \mathscr{D}$ tel que $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) = (\langle \rho(v_D) \rangle, \{D\})$, on remplace tout cône colorié $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ de $\mathbf{F}$ qui a $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ comme face, par $(\mathscr{C}', \mathscr{F}' \setminus \{D\})$. Les autres cônes coloriés de $\mathbf{F}$ sont inchangés.

(b) Si le cône $\mathscr{C}$ est de dimension 2, alors $\mathscr{C} = \langle v_1, v_2 \rangle$ où v_1, v_2 est une base du groupe $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Z})$.

(b1) Si $v_1 + v_2$ n'est pas dans l'intérieur $\mathscr{V}^0$ de $\mathscr{V}$, alors par exemple $\langle v_1, v_1 + v_2 \rangle$ rencontre $\mathscr{V}^0$, et $\langle v_1 + v_2, v_2 \rangle \cap \mathscr{V}^0 = \varnothing$. Il existe donc $a \in \mathbf{Q}$ minimal tel que $av_1 + v_2 \in \mathscr{V}$. Alors a est positif, et on remplace $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ par le cône colorié $(\langle v_1, av_1 + v_2 \rangle, \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_1))$ et sa face $(\langle v_1, av_1 + v_2 \rangle, \varnothing)$.

(b2) Si $v_1 + v_2 \in \mathscr{V}^0$, alors on remplace $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ par $(\langle v_1, v_1 + v_2 \rangle, \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_1))$, $(\langle v_1 + v_2, v_2 \rangle, \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_2))$ et leur face commune $(\langle v_1 + v_2 \rangle, \varnothing)$.

Puisqu'on est en rang 2 et que A n'est pas un diviseur de X, les cas (a), (b1), (b2) couvrent toutes les possibilités.

LEMME 3. *Avec les notations précédentes, la subdivision de* $\mathbf{F}$ *le long de* $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ *est l'éventail colorié* $\hat{\mathbf{F}}$.

Preuve du Lemme 3. On peut supposer que G a une unique orbite fermée Y dans X; alors $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ est une face de $(\mathscr{C}_Y(X), \mathscr{F}_Y(X))$. Rappelons que le diviseur exceptionnel $\hat{A}$ est irréductible d'après le théorème 1(i), donc il définit une valuation v, invariante par G. Observons que $\hat{\mathbf{F}}$ contient $(\langle v \rangle, \varnothing)$.

Dans le cas (a), on a: $v = \rho(v_D)$. Soit $\hat{Y}$ une orbite fermée de G dans $\hat{X}$ telle que $\langle v \rangle$ est une arête du cône $\mathscr{C}_{\hat{Y}}(\hat{X})$; soit α l'autre arête de ce cône. Si α n'est pas une arête de $\mathscr{C}_Y(X)$, alors α est engendrée par un élément de $\mathscr{V}$, ce qui contredit l'irréductibilité de $\hat{A}$. Par suite, on a: $\mathscr{C}_{\hat{Y}}(\hat{X}) = \mathscr{C}_Y(X)$. On en déduit que $\hat{Y}$ est l'unique orbite fermée de G dans $\hat{X}$, et que $\mathscr{F}_{\hat{Y}}(\hat{X}) = \mathscr{F}_Y(X) \backslash \{D\}$.

Dans le cas (b), on a: $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) = (\mathscr{C}_Y(X), \mathscr{F}_Y(X))$. Supposons d'abord que G n'a qu'une orbite fermée $\hat{Y}$ dans $\hat{X}$. Alors on peut supposer que $\mathscr{C}_{\hat{Y}}(\hat{X}) = \langle v_1, v \rangle$ et que $\mathscr{F}_{\hat{Y}}(\hat{X}) = \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_1)$. Ecrivons $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Puisque $v \in \mathscr{C}_{\hat{Y}}(\hat{X}) \subset \mathscr{C}_Y(X)$, les entiers a_1 et a_2 sont non négatifs. Puisque $\hat{X}$ est lisse, on a: $a_2 = 1$, d'où $a_1 \geqslant 1$. Enfin, puisque $\mathscr{C}_{\hat{Y}}(\hat{X}) \cap \mathscr{V} = \mathscr{C}_Y(X) \cap \mathscr{V}$, le cône $\langle v_1, v \rangle$ rencontre $\mathscr{V}^0$, et $\langle v_2, v \rangle \cap \mathscr{V}^0 = \varnothing$. Par suite, $v_1 + v_2 \notin \mathscr{V}^0$ et on est dans le cas (b1).

Enfin, si G a plusieurs orbites fermées dans $\hat{X}$, alors $\hat{F}$ est de la forme $(\langle v_1, v \rangle, \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_1))$, $(\langle v, v_2 \rangle, \mathscr{F} \cap \rho^{-1}(v_2))$, $(\langle v \rangle, \varnothing)$. Ecrivons $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ comme ci-dessus: alors $a_1 = a_2 = 1$ car $\hat{X}$ est lisse. On est donc dans le cas (b2).

Fin de la preuve du Théorème 1(ii). Comme ci-dessus, on peut supposer que G a une unique orbite fermée dans X. Dans le cas (a), puisque A est dans l'ensemble exceptionnel de $p: X' \to X$, le cône $(\langle v \rangle, \varnothing)$ est une face de $\mathbf{F}'$. Par suite, $\mathbf{F}'$ est une subdivision de $\hat{\mathbf{F}}$.

Dans le cas (b1), si $\mathbf{F}'$ n'est pas une subdivision de $\hat{\mathbf{F}}$, alors il existe des entiers positifs n_1, n_2 tels que le cône $\langle v_2, n_1 v_1 + n_2 v_2 \rangle$ apparaît dans $\mathbf{F}'$. Alors $n_1 v_1 + n_2 v_2 \in \mathscr{C}_Y(X) \cap \mathscr{V}$. De plus, $n_1 = 1$ car X' est lisse. Mais le cône $\mathscr{C}_Y(X) \cap \mathscr{V}$ est contenu dans $\langle v_1, av_1 + v_2 \rangle$ où a est un entier positif (car $\hat{X}$ est lisse), contradiction.

Le cas (b2) est le seul dans lequel $\hat{X}$ contient deux orbites fermées de G. Comme dans la preuve du Lemme 1, on peut donc supposer que X est un espace vectoriel, dans lequel G opère linéairement. De plus, A se réduit à l'origine. Observons que le G-module X n'est pas simple: sinon, puisque $\hat{X}$ est une sous-variété fermée de $X \times \mathbf{P}(X)$, le groupe G n'aurait qu'une orbite fermée dans $\hat{X}$. Par suite, on montre comme dans la première section que $X = X_1 \times X_2$ où X_1, X_2 sont des G-modules simples non triviaux. Comme X est de rang 2, on en déduit que $X = G \cdot X^U$; grâce à [Kn] 7.2, cela signifie que le cône $\mathscr{V}$ est $\mathscr{Q}$ tout entier. Par suite, les cônes de $\mathbf{F}'$ forment une subdivision régulière de $\mathbf{F}$ (voir [O] p. 15). D'après [O] pp. 42 et 43, une telle subdivision contient la demi-droite $\langle v_1 + v_2 \rangle$. Ainsi, le cône colorié $(\langle v_1 + v_2 \rangle, \varnothing)$ est dans $\mathbf{F}'$, d'où le résultat.

3. Démonstration du Théorème 1(iii)

De l'énoncé (ii) suit aussitôt l'existence d'une variété sphérique X'', projective et lisse, et de morphismes birationnels $p: X'' \to X$ et $p': X'' \to X'$, tels que $p = \varphi \circ p'$ et que p, p' sont composés d'éclatemens de centres iréductibles et stables par G. La difficulté consiste à n'éclater que des centres lisses. Pour cela, on va traiter d'abord le cas où X et X' sont toroïdales, c'est-à-dire: le complémentaire de l'orbite ouverte de B dans X (et dans X') ne contient aucune orbite de G. Alors les éventails coloriés $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des subdivisions régulières du cône $\mathscr{V}$ (voir [Kn] §6). D'après [O] p. 42, on peut trouver une subdivision régulière $\mathbf{F}''$ commune à $\mathbf{F}$ et à $\mathbf{F}'$. Soit X'' la G-variété sphérique dont l'éventail colorié est $\mathbf{F}''$; on a deux G-morphismes birationnels propres $p: X'' \to X$ et $p': X'' \to X'$. Montrons que (par exemple) p est composé d'éclatements d'orbites fermées de G.

D'après [BP] 3.3, il existe un sous-groupe parabolique P de G, un sous-groupe de Levi L de P, et une sous-variété Z de X, telles que:

(a) Z est stable par L, et le sous-groupe dérivé (L, L) de L opère trivialement dans Z.

(b) Z rencontre toute orbite de G dans X, suivant une unique orbite de L.

(c) L'application $P^u \times Z \to X$: $(s, z) \to s \cdot z$ est une immersion ouverte.

En particulier, Z est une variété torique, pour le tore $L/(L, L)$. De plus, l'éventail de Z s'identifie à $\mathbf{F}$. La variété $Z'' := p^{-1}(Z)$ est torique, et son éventail s'identifie à $\mathbf{F}''$. Par suite, Z'' est lisse, et $p|Z'': Z'' \to Z$ est composé d'éclatements de points fixes de L (voir [O] Theorem 1.28). L'assertion en résulte aussitôt.

Le cas général s'en déduit grâce au

LEMME 4. *Pour toute G-variété sphérique X, lisse, complète et de rang 2, il existe une G-variété toroïdale $\hat{X}$, et un morphisme $p: \hat{X} \to X$, tels que p est composé d'éclatements de centres lisses et stables par G.*

Preuve du Lemme 4: première étape.

Soit $D \in \mathscr{D}$ tel que $\rho(v_D) \notin \mathscr{V}$. Montrons qu'il existe une G-variété sphérique X' et un morphisme $\pi: X' \to X$, tels que π est composé d'éclatements de centres lisses et stables par G, et que le transformé strict de D dans X' ne contient aucune orbite de G.

On note A l'intersection (ensembliste) des $g \cdot D$ où g décrit G; on peut supposer A non vide. Alors A est réunion des orbites de G dans X, associées aux cônes coloriés $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) \in \mathbf{F}$ tels que $D \in \mathscr{F}$. Du fait que $\rho(v_D) \notin \mathscr{V}$, résulte que le cône $\mathscr{C}$ est de dimension 2. Par suite, A est réunion d'orbites fermées de G dans X. Soit $f_1: X_1 \to X$ l'éclatement de A dans X. Désignons par D_1 le transformé strict de D, et par A_1 l'intersection des $g \cdot D_1$ $(g \in G)$. Alors A_1 est encore réunion d'orbites fermées. Si A_1 n'est pas vide, on note $f_2: X_2 \to X_1$ l'éclatement de A_1 dans X_1. On définit ainsi une suite d'éclatements $f_n: X_n \to X_{n-1}$. Montrons que cette suite est finie, et que D_N ne contient aucune orbite de G dans X_N, où N désigne le dernier indice.

Pour cela, on peut supposer que X_1 est simple, d'orbite fermée A_1, et que $A_1 \subset D_1$. Alors $\mathscr{C}(X_1) = \langle v_1, v_2 \rangle$ où v_1 est la valuation du diviseur exceptionnel de f_1, et où $v_2 = \rho(v_D)$. Si D_2 contient une orbite de G, alors v_1 et v_2 engendrent des arêtes de l'éventail colorié de X_2. Par suite, X_2 contient au moins 2 orbites fermées. D'après le Lemme 3, cas (b2), l'éventail colorié de X_2 contient le cône $\langle v_2, v_1 + v_2 \rangle$. En outre, $v_1 + v_2$ est la valuation du diviseur exceptionnel de f_2. Par récurrence sur n, on montre que l'éventail colorié de X_n contient le cône $\langle v_2, v_1 + (n-1)v_2 \rangle$, et que $v_1 + (n-1)v_2$ est la valuation du diviseur exceptionnel de f_n. Par conséquent, si la suite d'éclatements ne se termine pas, alors $v_1 + nv_2 \in \mathscr{V}$ pour tout $n \geqslant 0$; d'où $v_2 \in \mathscr{V}$, ce qui est absurde.

Preuve du Lemme 4: seconde étape.

En appliquant successivement la première étape aux différents $D \in \mathscr{D}$ tels que $\rho(v_D) \notin \mathscr{V}$, on se ramène au cas où $\rho(v_D) \in \mathscr{V}$ pour tout $D \in \mathscr{D}$ tel que D contient une orbite de G dans X. Soit $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ un cône colorié de X: alors toute face de $\mathscr{C}$ définit une face de $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$. D'après [Kn] 4.2, toute orbite fermée est donc contenue dans l'adhérence de 4 orbites.

Il en résulte que toute adhérence d'orbite est lisse. En effet, on peut supposer que X est un G-module; alors, comme dans la preuve du Lemme 1, on montre que $X = X_1 \times X_2$ où X_1, X_2 sont des G-modules simples non triviaux. Les adhérences d'orbites sont alors des sous-G-modules de X.

Choisissons $D \in \mathscr{D}$ et notons encore A l'intersection des $g \cdot D$ où g décrit G. Alors A est l'adhérence d'orbite associée à la face $(\langle \rho(v_D) \rangle, \{D\})$. D'après le Lemme 3, dans l'éclatement X_1 de A dans X, le transformé strict de D ne contient aucune orbite de G. De plus, pour tout $D' \in \mathscr{D}$ tel que D' contient une orbite de X_1, on a: $\rho(v_{D'}) \in \mathscr{V}$. On peut donc recommencer jusqu'à obtenir une variété toroïdale.

4. Démonstration du Théorème 2

Dans la Section 1, on a montré que Z est un L-module simple. En particulier, l'image de L dans $\mathrm{GL}(Z)$ est semi-simple, ou a un centre de dimension 1. De plus, L opère dans Z avec trois orbites, dont aucune n'est de codimension 1. On peut alors déduire notre liste de diverses classifications (voir par exemple [SK] §8); on peut aussi la retrouver plus directement, comme suit.

Observons que K opère dans l'espace projectif $\mathbf{P}(Z)$ avec 2 orbites. Si K n'est pas simple, on peut supposer que $K = K_1 \times K_2$ et que $Z = Z_1 \otimes Z_2$ où chaque Z_i est un K_i-module simple. Tout élément non nul de Z est un tenseur dont le rang ne peut prendre que 2 valeurs. Par suite, on peut supposer que $\dim Z_1 = 2$; alors $K_1 = \mathrm{SL}(Z_1)$. En outre, $\mathbf{P}(Z_1) \times \mathbf{P}(Z_2)$ s'identifie à un sous-variété de $\mathbf{P}(Z)$, stable par K. On en déduit que K_2 opère transitivement dans $\mathbf{P}(Z_2)$. Par conséquent, ou bien $K_2 = \mathrm{SL}(Z_2)$, ou bien $\dim Z_2$ est paire et K_2 est le groupe symplectique de Z_2 (cela résulte par exemple de [St]). Mais ce dernier cas est exclu si $\dim Z_2 \geqslant 4$. En effet, sous cette hypothèse, l'ensemble des tenseurs $u_1 \otimes u_2 + v_1 \otimes v_2$ où u_2, v_2 engendrent un plan isotrope de Z_2, est une orbite non ouverte de K, non formée de tenseurs décomposables.

On se ramène ainsi au cas d'un groupe simple. Puisque la L-variété Z est sphérique de rang 2, on a: $\dim Z \leqslant \dim U_K + 2$ où U_K désigne un sous-groupe unipotent maximal de K. Grâce au fait que $\dim Z$ est fonction strictement croissante du plus grand poids de Z, on vérifie que les possibilités pour le couple (K, Z) sont les suivantes à automorphisme près (on utilise les notations de [Bo]):

$$(A_l, \varpi_1), (A_l, \varpi_2), (A_1, 2\varpi_1), (B_l, \varpi_1), (B_3, \varpi_3), (B_4, \varpi_4), (C_l, \varpi_1),$$
$$(D_l, \varpi_1), (D_5, \varpi_5), (D_6, \varpi_6), (G_2, \varpi_1), (F_4, \varpi_4), (E_6, \varpi_6), (E_7, \varpi_7).$$

Parmi ces possibilités, seules (A_l, ϖ_1); (A_l, ϖ_2) avec l pair; (C_l, ϖ_1) et (D_5, ϖ_5) ne contiennent aucune orbite de codimension 1; parmi ces dernières, seules (A_4, ϖ_2) et (D_5, ϖ_5) contiennent 3 orbites de L. Réciproquement, on vérifie sans peine que notre liste est formée de variétés sphériques de rang 2.

REMARQUE. Lorsque A n'et plus supposée singulière, on obtient les cas additionnels suivants: $K = K_1 \times K_2$, $Z = Z_1 \times Z_2$, $A \cap Z = Z_1 \times \{0\}$ où (K_i, Z_i) est l'un des couples $(\mathrm{SL}(n), \mathbf{C}^n)$ ou $(\mathrm{Sp}(2n), \mathbf{C}^{2n})$, avec $n \geqslant 1$.

Références

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. VIII, C.C.L.S., Paris, 1975.

[BLV] M. Brion, D. Luna, and T. Vust, Espaces homogènes sphériques, *Invent. Math.* 84 (1986) 617–632.

[BP] M. Brion and F. Pauer, Valuations des espaces homogènes sphériques, *Comment. Math. Helv.* 62 (1987) 265–285.

[B1] M. Brion, Sur l'image de l'application moment, dans: *Séminaire d'algèbre* (*M. P. Malliavin, ed.*) 177–192, *Lecture Note in Math.* 1296, Springer-Verlag, 1987.

[B2] M. Brion, Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques, *Duke Math. J.* 58(2) (1989) 397–424.

[E] L. Ein, Varieties with small dual varieties I, *Invent. Math.* 86 (1986) 63–74.

[Ki] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Note 31, Princeton University Press, 1984.

[Kn] F. Knop, The Luna-Vust theory of spherical embeddings, *Proceedings of the Hyderabad conference on algebraic groups* (S. Ramanan, ed.), 225–249, Manoj Prakashan, 1991.

[L] D. Luna, Slices étales, *Mémoire de la S.M.F.* 33 (1973), 81–105.

[O] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry (*An introduction to the theory of toric varieties*), Ergebnisse der Math. 15, Springer-Verlag, 1988.

[SK] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* 65 (1977), 1–155.

[Sn] D. Snow, The nef value and defect of homogeneous line bundles, à paraître.

[St] M. Steinsieck, Transformation groups on homogeneous-rational manifolds, *Math. Ann.* 260 (1982) 423–435.