COMPOSITIO MATHEMATICA

QING LIU

Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre 2

Compositio Mathematica, tome 94, nº 1 (1994), p. 51-79

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__94_1_51_0>

Compositio Mathematica **94**: 51–79, 1994.

Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre 2

QING LIU

CNRS, Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

Received 19 July 1993; accepted in final form 9 December 1993

0. Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète, à corps résiduel k parfait. Soient C une courbe projective lisse, géométriquement connexe, de genre $g \geqslant 1$ sur $K = \mathrm{Fr}(R)$, et X le modèle régulier minimal de C sur $S = \operatorname{Spec} R$. On associe à X le conducteur d'Artin

$$\mathrm{Art}(X/S) = \chi(X_{\bar{\eta}}) - \chi(X_{\bar{s}}) - \delta$$

où χ est la caractéristique d'Euler pour la topologie étale, et δ est le conducteur de Swan associé à une représentation l-adique $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_l))$ avec $l \neq \mathrm{car}(k)$ (voir [Se], §2.1). Voir [Bl] pour une motivation de l'étude de $\mathrm{Art}(X/S)$. On sait que $\mathrm{Art}(X/S) \leqslant 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $X \to S$ est lisse ou si $g = 1$ et $(X_s)_{\text{réd}}$ est lisse.

Pour une courbe elliptique C, $\mathrm{Art}(X/S)$ est relié au discriminant minimal $v(\Delta)$ par la formule d'Ogg ([Og1], voir aussi [Sa1], Cor. 2):

$$-\mathrm{Art}(X/S) = v(\Delta)$$

Le membre de droite a encore un sens pour une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 2$, mais l'égalité n'est plus vraie en toute généralité. Le but du présent travail est d'étudier, dans le cadre des courbes de genre 2, la relation entre $\mathrm{Art}(X/S)$ et le discriminant minimal $v(\Delta_{\min})$ de C (§1, déf. 1). On suppose désormais que $g = 2$.

Cette étude remonte à [Og2], mais des résultats significatifs n'ont été obtenus qu'en 1987 par K. Ueno dans le cas $\mathrm{car}(k) = 0$ [Ue], et T. Saito en 1989 [Sa2]. Ueno a calculé explicitement la différence

$$c(X) := v(\Delta_{\min}) - (-\mathrm{Art}(X/S)) \tag{1}$$

(notée $l+1$ ou $l+2$ dans [Ue]) en fonction du type géométrique de X (c'est la type numérique de X plus le type de la réduction stable de C sur une extension finie de K, voir §5). Il conjecture que le résultat reste vrai quelque soit car(k). C'est-à-dire que $c(X)$ ne dépend que du type géométrique de X, et pas de car(k).

Dans [Sa2], Saito donne une interprétation des termes apparaissant dans (1) comme une mesure de dégénéréscence de certains isomorphismes canoniques provenant des courbes lisses sur K. Ici, car(k) est quelconque. Cette interprétation s'écrit comme suit:

$$\operatorname{ord}\Delta_1 = \operatorname{ord}\Delta' - (-\operatorname{Art}(X/S)) \tag{2}$$

On a $v(\Delta_{\min}) = \operatorname{ord}\Delta'$ et donc $c(X) = \operatorname{ord}\Delta_1$ (voir §2). L'entier $\operatorname{ord}\Delta_1$ peut se calculer en terme du lieu des points-base du faisceau dualisant relatif $\omega_{X/S}$ (op. cit., Theorem), Saito a ainsi calculé $\operatorname{ord}\Delta_1$ lorsque X est semi-stable (op. cit., Proposition).

Dans ce travail nous démontrons la conjecture d'Ueno ci-dessus lorsque car(k) $\neq 2$. Si car(k) $= 2$, en dehors de certains types numériques de X, l'énoncé reste vrai. Sinon il y a des contre-exemples (§5, exemple 1). On donnera néanmoins un encadrement de $c(X)$ dans ce cas-là. Nos résultats recouvrent en tout cas ceux d'Ueno et de Saito concernant $c(X)$.

On procède comme suit. On peut supposer R hensélien et k algébriquement clos. Soit $\pi: X \to Y$ la contraction des composantes irréductibles Γ de X_s telles que $p_a(\Gamma) = 0$ et $\Gamma^2 = -2$ (ce qui équivaut à $\deg \omega_{X/S}|_\Gamma = 0$). Au §4, on montre que $\omega_{Y/S}^{\otimes 2}$ est cohomologiquement plat, ramenant ainsi le calcul de $c(X)$ à la comparaison entre $\det(S^2\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}))$ et $\det \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$ (voir §4, lemme 6). L'involution hyperelliptique σ de C s'étend en un automorphisme de Y. Soit $Z := Y/\langle\sigma\rangle$, c'est un modèle projectif normal de $\mathbb{P}^1_K$ sur S. Le nombre $c(X)$ est alors complètement déterminé en fonction de la structure de Z (§4):

THEOREME 1. *Soient Z défini comme ci-dessus et $\tilde{Z} \to Z$ la désingularisation minimale de Z. Soit d le nombre de composantes irréductibles de $\tilde{Z}_s$. Alors d est impair et*

$$v(\Delta_{\min}) = -\operatorname{Art}(X/S) + \frac{d-1}{2}$$

Ensuite, on détermine la structure de Z en fonction du type géométrique de X (§5), cela étant possible si car(k) $\neq 2$, ou en excluant un certain nombre de types numériques de X lorsque car(k) $= 2$. On retrouve alors les constantes $c(X)$ en fonction du type géométrique de X données par Ueno en car(k) $= 0$ (voir aussi §5, Remarque 6).

La définition du discriminant minimal $v(\Delta_{\min})$ fait appel à un modèle régulier de C sur S. On peut aussi considérer le plus petit discriminant possible $v(\Delta_0)$ des équations de C à coefficients dans R. Au §6, on verra que la différence de ces deux discriminants peut s'exprimer en terme de $c(X)$:

THEOREME 2. *On a l'égalité* $v(\Delta_0) = v(\Delta_{\min}) + 10c(X)$.

Le problème du calcul effectif de $\mathrm{Art}(X/S)$ sera abordé au même paragraphe.

Soient R^{sh} l'hensélisé strict de R, $K^{\mathrm{sh}} = \mathrm{Fr}(R^{\mathrm{sh}})$. Alors $X \times R^{\mathrm{sh}}$ est le modèle minimal de $C \times K^{\mathrm{sh}}$; $\mathrm{Art}(X \times R^{\mathrm{sh}}/\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{sh}}) = \mathrm{Art}(X/S)$; C et $C \times K^{\mathrm{sh}}$ ont le même discriminant minimal. Donc pour l'étude des invariants concernés, on peut toujours supposer R hensélien à corps résiduel algébriquement clos.

Je remercie le referee pour ses nombreuses remarques judicieuses.

NOTATIONS. Dans tout ce qui suit, R sera un anneau de valuation discrète *hensélien*, à corps résiduel k *algébriquement clos*; C sera une courbe projective lisse, géométriquement connexe, de genre 2 sur $K = \mathrm{Fr}(R)$. On note v la valuation normalisée de K, t une uniformisante, $S = \mathrm{Spec}\, R$ et $X \to S$ le modèle régulier minimal de C sur S.

1. Conducteur, équations minimales et discriminant minimal

1.1. Une formule du conducteur

Soit W un schéma propre plat sur S, régulier, dont la fibre générique W_η est une courbe lisse géométriquement connexe de genre $g \geqslant 1$. On note $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ les composantes irréductibles de la fibre spéciale W_s, m_i la multiplicité de Γ_i.

Soient $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $f = \varepsilon + \delta$ l'exposant du conducteur de la représentation l-adique $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(W_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l))$ (voir [Se], §2.1). Ce conducteur est aussi celui de la Jacobienne J de W_η. En effet, soient T_l le module de Tate de J et $V_l = T_l \otimes \mathbb{Q}_l$, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(W_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Q}_l(1) \simeq V_l$. Comme $\mu_{l^\infty} \subset K$, G agit trivialement sur $\mathbb{Q}_l(1)$. Donc $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(W_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)$ est isomorphe à V_l en tant que G-module.

PROPOSITION 1. *Supposons que* $\mathrm{pgcd}\{m_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} = 1$. *Alors**

$$-\mathrm{Art}(W/S) = n - 1 + f$$

Preuve. Soient $\mathcal{N}$ le modèle de Néron de J et $\mathcal{N}^\circ$ sa composante neutre.

*En fait, la proposition est vraie sans l'hypothèse sur le pgcd des multiplicités. Elle résulte immédiatement de l'isomorphisme de [Bl], Lemma 1.2(i) pour $m = 1$.

On note $a(W)$ (resp. $t(W)$; resp. $u(W)$) le rang abélien (resp. torique; resp. unipotent) de $\mathcal{N}_s^\circ$. Alors $\varepsilon = 2u(W) + t(W)$ ([Se-Ta], §1, lemmas 1–2), $a(W) + t(W) + u(W) = g$. De plus, l'hypothèse sur le pgcd des m_i implique que $\mathcal{N}_s^\circ \simeq \mathrm{Pic}^\circ_{W_s/k}$ ([B-L-R], §9.5, theorem 4). En particulier, la somme des genres géométriques des Γ_i est égale à $a(W)$.

Soit E une courbe propre connexe sur k. Soit $\pi: \tilde{E} \to E$ le morphisme fini composé de l'immersion fermée $E_{\text{réd}} \to E$ et de la normalisation $\tilde{E} \to E_{\text{réd}}$. Suivant Dolgačev ([Do], §2) on définit le nombre

$$\delta_E = \sum_{q \in E} (\#\pi^{-1}(q) - 1)$$

On note n_E le nombre de composantes irréductibles de E, t_E le rang torique du groupe algébrique $\mathrm{Pic}^\circ_{E/k}$. On a $t_{W_s} = t(W)$. On connaît le nombre $\chi(E)$ en fonction de δ_E et de $\tilde{E}$ (op. cit., prop. 2.4). En prenant $E = W_s$, on obtient

$$-\mathrm{Art}(W/S) - (n - 1 + f) = \delta_{W_s} - (n - 1 + t_{W_s})$$

Il reste donc à montrer que pour toute courbe propre connexe E sur k, on a $\delta_E = n_E - 1 + t_E$.

Soit E' la plus grande courbe entre $\tilde{E}$ et $E_{\text{réd}}$ universellement homéomorphe à $E_{\text{réd}}$ (voir [B-L-R], p. 247). Alors on a trivialement $\delta_{E'} = \delta_E$, $n_{E'} = n_E$, mais aussi $t_E = t_{E'}$ (op. cit., §9.2, prop. 5 et 9). On peut donc supposer $E' = E$. On démontre l'égalité souhaitée en considérant la suite longue de cohomologie déduite de la suite exacte

$$1 \to \mathcal{O}_E^* \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}}^* \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{E}}^* / \mathcal{O}_E^* \to 1$$

REMARQUE 1. Si W_η a un point rationnel (par exemple si c'est une courbe elliptique) ou si $g = 2$, alors la condition sur le pgcd des multiplicités est vérifiée.

1.2. Equations hyperelliptiques de C

Appelons *équation* (*hyperelliptique*) *de C* toute équation affine de la forme

$$(\mathscr{E}): \; y^2 + Q(x)y = P(x), \quad P, Q \in K[x]$$

telle que Spec $K[X, Y]/(Y^2 + Q(X)Y - P(X))$ soit isomorphe à un ouvert de C, et que $\deg Q(x) \leqslant 3$, $\deg P(x) \leqslant 6$.

A une équation $(\mathscr{E})$ on peut associer son *discriminant* $\Delta(\mathscr{E})$ de la façon qui suit. Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, on pose $\Delta(\mathscr{E}) := 2^{-12}\, \mathrm{disc}_6(4P + Q^2)$, où $\mathrm{disc}_6(4P + Q^2)$ est le discriminant de $4P(x) + Q(x)^2$ considéré comme un polynôme de degré 6 en x. Si car$(K) = 2$, on relève les polynômes P, Q en $\tilde{P}, \tilde{Q} \in W(K)[x]$ dans l'anneau des vecteurs de Witt, et on définit $\Delta(\mathscr{E})$ comme la réduction de $2^{-12}\,\mathrm{disc}_6(4\tilde{P} + \tilde{Q}^2) \in W(K)$ modulo $2W(K)$. On a $\Delta(\mathscr{E}) = J_{10}$, où J_{10} est l'invariant d'Igusa de degré 10 associé à l'équation $(\mathscr{E})$ ([Ig], §6 ou [Liu2], §2.2).

Les formes différentielles suivantes

$$\omega_1(\mathscr{E}) := \frac{\mathrm{d}x}{2y + Q(x)}, \quad \omega_2(\mathscr{E}) := \frac{x\,\mathrm{d}x}{2y + Q(x)}$$

sont holomorphes sur C, et forment donc une base de $\mathrm{H}^0(C, \Omega^1_{C/K})$ sur K.

1.3. Relations entre les équations de C

Toute autre équation $(\mathscr{E}') : z^2 + H(v)z = L(v)$ de C s'obtient à partir de $(\mathscr{E})$ par changement de variable

$$v = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

$$z = \frac{ey + G(x)}{(cx + d)^3}, \quad e \in K^*,\ G(x) \in K[x],\ \deg G(x) \leqslant 3$$

Si l'on pose $\omega_i = \omega_i(\mathscr{E})$, $\omega_i' = \omega_i(\mathscr{E}')$, $\Delta = \Delta(\mathscr{E})$, $\Delta' = \Delta(\mathscr{E}')$, alors

$$\Delta' = e^{20}(ad - bc)^{-30}\Delta$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = e^{-1}(ad - bc) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

En particulier la section

$$\Delta(\omega_1 \wedge \omega_2)^{\otimes 10} \in (\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{H}^0(C, \Omega^1_{C/K}))^{\otimes 10}$$

ne dépend pas du choix de $(\mathscr{E})$.

1.4. Equations minimales et discriminant minimal

Soit X' un modèle régulier de C (c'est-à-dire un schéma propre plat sur S, régulier et à fibre générique isomorphe à C). Soit $\omega_{X'/S}$ le faisceau dualisant relatif sur X', il est inversible et on a $\omega_{X'/S}|_C = \Omega^1_{C/K}$. La restriction à C induit une injection canonique $\mathrm{H}^0(X', \omega_{X'/S}) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(C, \Omega^1_{C/K})$, et $\mathrm{H}^0(X', \omega_{X'/S})$ est un R-module libre de rang 2.

Suivant [Ue], remark 2.3.1 (qui est légèrement erronée), on pose la définition suivante.

DEFINITION 1. On appelle *équation minimale de C* toute équation $(\mathscr{E})$ de C telle que $\{\omega_1(\mathscr{E}), \omega_2(\mathscr{E})\}$ soit une base de $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})$ sur R. On appellera *discriminant minimal de C* l'entier $v(\Delta(\mathscr{E}))$ associé à une équation minimale $(\mathscr{E})$.

Le discriminant minimal ne dépend pas du choix d'une équation minimale grâce à l'invariance de $\Delta(\mathscr{E})(\omega_1(\mathscr{E}) \wedge \omega_2(\mathscr{E}))^{\otimes 10}$. On le notera $v(\Delta_{\min})$. On pose aussi

$$c(X) := v(\Delta_{\min}) + \mathrm{Art}(X/S)$$

REMARQUE 2. La définition ci-dessus des équations minimales n'est pas exactement celle d'Ueno ([Ue], def. 2.2). Mais celle du discriminant minimal est la même.

Une équation minimale n'est pas nécessairement à coefficients dans R ([Ue], example 2.4). Mais on a toujours $v(\Delta_{\min}) \geqslant 0$ (remarque 3). D'autre part, on peut définir un discriminant minimal au sens "naif" $v(\Delta_0)$ de la façon suivante: c'est le plus petit entier tel qu'il existe une équation $(\mathscr{E})$ de C à coefficients dans R avec $v(\Delta(\mathscr{E})) = v(\Delta_0)$. On a $v(\Delta_0) \geqslant v(\Delta_{\min})$ (prop. 2(d)). En général, il n'y a pas égalité (voir théorème 2).

PROPOSITION 2. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Il existe une équation minimale* $(\mathscr{E})$ *de* C;

(b) *Si* $(\mathscr{E}')$: $z^2 + H(v)z = L(v)$ *est une autre équation de* C, *alors elle est minimale si et seulement s'il existe un changement de variable comme dans* (1.3) *avec*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R), \quad e \in R^*$$

(c) *Pour tout modèle régulier* X' *de* C, *on a* $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}) = \mathrm{H}^0(X', \omega_{X'/S})$ *en tant que sous-groupes de* $\mathrm{H}^0(C, \Omega^1_{C/K})$;

(d) *Si* $(\mathscr{E}'')$ *est une équation de* C *à coefficients dans* R, *alors* $v(\Delta(\mathscr{E}'')) \geqslant v(\Delta_{\min})$. *De plus, l'égalité a lieu si et seulement si* $(\mathscr{E}'')$ *est minimale.*

Preuve. (a) Soit $(\mathscr{E}') : z^2 + H(v)z = L(v)$ une équation de C. Il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

qui transforme $(\omega_1(\mathscr{E}'), \omega_2(\mathscr{E}'))$ en une base de $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})$ sur R. Par le changement de variable

$$x = \frac{\mathrm{d}v + c}{bv + a}, \quad y = \frac{ad - bc}{(bv + a)^3}\, z$$

on obtient une équation minimale $(\mathscr{E}): y^2 + Q(x)y = P(x)$.

(b) On raisonne de la même façon.

(c) Il existe une modification $f: X' \to X$. Comme X est régulier, tous ses points fermés sont des singularités rationnelles, donc $f_*\omega_{X'/S} = \omega_{X/S}$, d'où l'égalité recherchée. On peut la démontrer de façon plus élémentaire comme suit.

On obtient X à partir de X' en contractant successivement des diviseurs exceptionnels. Il sufit donc de montrer que si $g: X_1 \to X_2$ est un morphisme entre modèles réguliers de C qui consiste en la contraction d'un diviseur exceptionnel E en un point p, alors $\mathrm{H}^0(X_1, \omega_{X_1/S}) = \mathrm{H}^0(X_2, \omega_{X_2/S})$.

Comme $\omega_{X_1/S} \simeq g^*\omega_{X_2/S} \otimes \mathcal{O}_{X_1}(E)$, on a $\mathrm{H}^0(X_2, \omega_{X_2/S}) \subset \mathrm{H}^0(X_1, \omega_{X_1/S})$. Comme $\omega_{X_2/S}$ est inversible et que X_2 est normal, on a

$$\mathrm{H}^0(X_2, \omega_{X_2/S}) = \mathrm{H}^0(X_2 - \{p\}, \omega_{X_2/S}) = \mathrm{H}^0(X_1 - E, \omega_{X_1/S}) \supset \mathrm{H}^0(X_1, \omega_{X_1/S})$$

Ce qui démontre l'égalité annoncée.

(d) Soit $(\mathscr{E}''): z^2 + Q_1(v)z = P_1(v)$ une équation de C avec $P_1, Q_1 \in R[v]$. Soient $A = R[v]$ et B la clôture intégrale de A dans $\mathscr{K}(C)$. D'après le lemme 1 ci-dessous, il existe $y \in B$ tel que $B = A + Ay$. Soient $H(v) = -\sigma(y) - y$, $L(v) = -\sigma(y)y$, où σ correspond à l'involution hyperelliptique sur C. Cela induit une équation $(\mathscr{E}_0): y^2 + H(v)y = L(v)$ de C à coefficients dans R. Il existe $\alpha \in R$, $a \in A$ tels que $z = \alpha y + a$, donc $v(\Delta(\mathscr{E}'')) = 20v(\alpha) + v(\Delta(\mathscr{E}_0)) \geqslant v(\Delta(\mathscr{E}_0))$. Il reste à montrer que $v(\Delta(\mathscr{E}_0)) \geqslant v(\Delta_{\min})$.

Soient W le modèle normal projectif de C induit par $U = \operatorname{Spec} B$, $\tilde{W} \to W$ sa désingularisation minimale et $\omega_i = \omega_i(\mathscr{E}_0)$. On a $\omega_{U/S} = \omega_1 \mathcal{O}_U$ d'après le lemme 2 ci-dessous. On en déduit aisément que $\mathrm{H}^0(W, \omega_{W/S}) = R\omega_1 + R\omega_2$. Par conséquent $\mathrm{H}^0(\tilde{W}, \omega_{\tilde{W}/S}) \subset R\omega_1 + R\omega_2$, et $v(\Delta(\mathscr{E}_0)) \geqslant v(\Delta_{\min})$ en utilisant (1.3).

Enfin si $v(\Delta(\mathscr{E}'')) = v(\Delta_{\min})$, on $\alpha \in R^*$ et $\mathrm{H}^0(\tilde{W}, \omega_{\tilde{W}/S}) = R\omega_1'' + R\omega_2''$, où $\omega_i'' = \omega_i(\mathscr{E}'')$. Donc $(\mathscr{E}'')$ est minimale.

LEMME 1. *Soit A une R-algèbre intègre de type fini. Soient F une extension de* $\mathrm{Fr}(A)$ *de degré* 2, *B la clôture intégrale de A dans F. On suppose que*:

(a) *$A \otimes_R K$ est principal;*

(b) *$\sqrt{tA}$ est un idéal premier principal de A et que $A/\sqrt{tA}$ est normal.*

Alors il existe $y \in B$ tel que $B = A + Ay$.

Preuve. Les hypothèses sur A impliquent que A est régulier de dimension $\leqslant 2$. Il suit que B est fidèlement plat sur A ([EGA], 0_{IV}, 17.3.5). Donc $B = A + L$ où L est un A-module localement libre de rang 1 ([EGA], IV, 2.2.17). En utilisant la valuation discrète de $\mathrm{Fr}(A)$ associée à l'idéal premier $\sqrt{tA}$, on montre aisément que $\mathrm{Pic}(A) = 0$. Donc L est libre de rang 1.

LEMME 2. *Soit $U \subset \mathbb{A}^n_R$ un sous-schéma intègre défini par une suite régulière $F_1, \ldots, F_r \in R[T_1, \ldots, T_n]$. Soit ξ son point générique. Supposons qu'un mineur*

$$J = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$$

soit non-nul dans $\mathcal{O}_{U,\xi}$. On identifie $\omega_{U/R,\xi}$ à $(\mathrm{d}t_{r+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_n)\mathcal{O}_{U,\xi}$, où $\mathrm{d}t_i$ est l'image de $\mathrm{d}T_i \in \Omega^1_{\mathbb{A}^n_R/R}$ dans $\Omega^1_{U/R}$. Alors

$$\omega_{U/R} = J^{-1} \cdot (\mathrm{d}t_{r+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_n)\mathcal{O}_U$$

Preuve. Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_R}$ engendré par les F_i. On a

$$\omega_{U/R} \simeq \det(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)^\vee \otimes \omega_{\mathbb{A}^n_R/R}|_U$$

D'autre part, soit V un ouvert de U lisse sur R, on a une suite exacte

$$0 \to (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)|_V \to \Omega^1_{\mathbb{A}^n_R/R}|_V \to \Omega^1_{U/R}|_V \to 0$$

Cela suffit pour montrer le résultat. Il est clair que R peut être remplacé par un aneau intègre quelconque.

2. Interprétation de $c(X)$ en terme du faisceau dualisant

2.1. La formule de Saito

Rappelons l'interprétation par T. Saito de l'identité (1), voir [Sa2] pour plus de précision. Soit $g: Y \to T$ une courbe propre lisse à fibres géométriques connexes de genre 2. Il existe trois isomorphismes canoniques qui commutent au changement de base:

$$\Delta: \det Rg_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2}) \to (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13}$$

$$\Delta_1: (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 3} \to \det Rg_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2})$$

$$\Delta': \mathcal{O}_T \to (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 10}$$

où Δ_1 provient de l'isomorphisme canonique $S^2(g_*\omega_{Y/T}) \to g_*(\omega_{Y/T}^{\otimes 2})$ (S^2 signifie puissance symétrique d'ordre 2); et $\Delta' = (\Delta \circ \Delta_1) \otimes \mathrm{Id}$. On peut appliquer ces isomorphismes à $T = \operatorname{Spec} K$ et $Y = C$. Soit $f: X \to S$ le morphisme structural. On a donc un isomorphisme canonique

$$\Delta_1 : (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 3} \otimes K \to \det Rf_*(^{\otimes 2}_{X/S}) \otimes K,$$

il induit donc une identité $\Delta_1((\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 3}) = t^n \det Rf_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2})$, où $n \in \mathbb{Z}$. On note cet entier $\operatorname{ord} \Delta_1$. On définit de la même manière $\operatorname{ord} \Delta$ et $\operatorname{ord} \Delta'$. Comme $\operatorname{ord} \Delta = -\operatorname{Art}(X/S)$ ([Sa1], theorem 1), on a

$$\operatorname{ord} \Delta' = -\operatorname{Art}(X/S) + \operatorname{ord} \Delta_1$$

2.2. Comparison avec le discriminant minimal

Notons $\Delta'_{Y/T}$ l'isomorphisme Δ' de (2.1) relatif à une courbe propre lisse $g: Y \to T$.

PROPOSITION 3. *Soit $(\mathscr{E})$ une équation de C. Alors l'isomorphisme $\Delta'_{C/K}$ est défini par*

$$\Delta'_{C/K}(1) = \Delta(\mathscr{E})(\omega_1(\mathscr{E}) \wedge \omega_2(\mathscr{E}))^{\otimes 10}$$

Preuve. Considérons $A' = \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_6, b_0, \ldots, b_3]$ l'anneau des polynômes à 11 variables a_i, b_j. Soient $\mathscr{Q}(x) = (b_0x^3 + \cdots + b_3)$, $\mathscr{P}(x) = a_0x^6 + \cdots + a_6$ et $2^{12}J_{10}$ le discriminant du polynôme $4\mathscr{P} + \mathscr{Q}^2$ (en tant que polynôme de degré 6 en x). On pose $A = A'[J_{10}^{-1}]$ et $T = \operatorname{Spec} A$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe projective lisse de genre deux sur T définie par une équation affine $y^2 + \mathscr{Q}(x)y = \mathscr{P}(x)$. Il est clair que

$$\omega_1 := \frac{dx}{2y + \mathscr{Q}(x)}, \quad \omega_2 := \frac{x\,dx}{2y + \mathscr{Q}(x)}$$

forment une base de $H^0(\mathscr{C}, \omega_{\mathscr{C}/T})$ sur A. Comme $\det Rg_*\omega_{\mathscr{C}/T} = (\det H^0(\mathscr{C}, \omega_{\mathscr{C}/T}))^{\check{}}$, on a $\Delta'_{\mathscr{C}/T}(1) = a \cdot (\omega_1 \wedge \omega_2)^{\otimes 2}$, avec $a \in A^*$. Il suit qu'à un signe près, $a = J_{10}^q$ pour un entier $q \in \mathbb{Z}$.

Soit $(\mathscr{E}): y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation de C. Il existe un homomorphisme d'anneaux $\tilde{\phi}: A[x] \to K[x]$ tel que $\tilde{\phi}(x) = x$, $\tilde{\phi}(\mathscr{Q}(x)) = Q(x)$ et $\tilde{\phi}(\mathscr{P}(x)) = P(x)$. Posons $\phi = \tilde{\phi}|_A$. Il induit un morphisme $\operatorname{Spec} K \to T$ et on a $C = \mathscr{C} \times_T \operatorname{Spec} K$. Comme Δ' commute au changement de base, on a

$$\begin{aligned} \Delta'_{C/K}(1) &= \phi(J_{10})^q(\phi(\omega_1) \wedge \phi(\omega_2))^{\otimes 2} \\ &= \Delta(\mathscr{E})^q(\omega_1(\mathscr{E}) \wedge \omega_2(\mathscr{E}))^{\otimes 2} \end{aligned}$$

En utilisant (1.3) on voit que $\Delta(\mathscr{E})^{q-1}$ ne dépend pas de l'équation $(\mathscr{E})$, donc $q = 1$.

COROLLAIRE. *On a* ord $\Delta' = v(\Delta_{\min})$.

Preuve. On sait que $\omega_{X/S}$ est cohomologiquement plat sur S ([Ra], prop. 9.5.1), donc

$$\det Rf_*\omega_{X/S} = (\det \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}))^\sim$$

Soit $(\mathscr{E})$ une équation minimale de C. Alors par définition $(\omega_1(\mathscr{E}) \wedge \omega_2(\mathscr{E}))^{\otimes 10}$ est une base de $(\det \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}))^{\otimes 10}$. Il suit que ord $\Delta' = v(\Delta(\mathscr{E})) = v(\Delta_{\min})$.

REMARQUE 3. Supposons avoir montré que $\omega_{X/S}^{\otimes 2}$est cohomologiquement plat sur S (voir §4, théorème 1). Soit $f: X \to S$ le morphisme structural. Alors on a

$$\det Rf_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2}) = (\det \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}^{\otimes 2})^\sim$$

Si l'on identifie $S^2\,\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})$ à son image canonique dans $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}^{\otimes 2})$, alors $c(X)$ est l'entier défini par

$$\det(S^2\,\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})) = t^{c(X)} \det \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}^{\otimes 2}) \tag{3}$$

Une conséquence immédiate est que $c(X) \geqslant 0$, et donc $v(\Delta_{\min}) \geqslant 0$ (voir aussi [Sa2], Cor. 2).

3. Modèles projectifs normaux de $\mathbb{P}_K^1$

On démontre dans ce paragraphe quelques résultats techniques qui vont servir au calcul de $\omega_{X/S}$ et à la détermination du quotient $X/\langle\sigma\rangle$.

3.1. Intersection sur une surface arithmétique

Soit W comme dans (1.1) mais g peut être nul éventuellement. Il y a une théorie classique d'intersection sur W entre les diviseurs verticaux et des diviseurs quelconques (voir par exemple [La], Chap. III, §2–3). On note $p_a(\Gamma_i)$ le genre arithmétique de Γ_i et $\omega_{W/S}$ le faisceau dualisant relatif de W sur S. On a les identitées suivantes:

$$m_i\Gamma_i^2 = -\sum_{j \neq i} m_j \Gamma_i \cdot \Gamma_j, \quad 2p_a(\Gamma_i) - 2 = \Gamma_i^2 + \Gamma_i \cdot \omega_{W/S}$$

$$2g - 2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (2p_a(\Gamma_i) - 2 - \Gamma_i^2)m_i$$

Si le pgcd des m_i est égal à 1, on a

$$\mathrm{H}^0(W_s, \mathcal{O}_{W_s}) = k, \quad \dim_k \mathrm{H}^1((W_s)_{\text{réd}}, \mathcal{O}_{(W_s)_{\text{réd}}}) \leqslant g$$

Cela est démontré dans [Ar-Wi], lemma 2.6, si $g \geqslant 2$ et si W est minimal. La même démonstration marche sans ces dernières hypothèses (qui servent à montrer une inégalité stricte lorsque W_s n'est pas réduit).

3.2. Modèles réguliers de $\mathbb{P}^1_K$

On conserve les notations de (3.1) mais avec $W_\eta = \mathbb{P}^1_K$. Comme W_η a des points rationnels sur K, le pgcd des m_i est égal à 1. En appliquant (3.1), on voit que $(W_s)_{\text{réd}}$ est une courbe de genre arithmétique 0. En particulier $\Gamma_i \simeq \mathbb{P}^1_k$ et $\Gamma_i \cdot \Gamma_j = \#\Gamma_i \cap \Gamma_j$ si $i \neq j$. On peut associer un graphe à W_s de la façon suivante: les sommets du graphe sont les composantes Γ_i, et il y a $\Gamma_i \cdot \Gamma_j$ arêtes entre Γ_i et Γ_j.

Si W_s est irréductible, alors $W \simeq \mathbb{P}^1_R$. Danns le cas contraire, W a au moins un diviseur exceptionnel relatif à S.

LEMME 3. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Tout diviseur exceptionnel Γ_1 de W rencontre au plus deux autres composantes, et il les rencontrent en des points distincts*;
(b) *W est semi-stable et le graphe de W_s est un arbre*;
(c) *Supposons que W admet un unique diviseur exceptionnel Γ_1. Si Γ_i se trouve sur le chemin qui relie Γ_j à Γ_1, alors $m_i \geqslant m_j$.*

Preuve. On peut supposer que $n \geqslant 3$, où n est le nombre de composantes irréductibles de W_s.

(a) Soient $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{r+1}$ les composantes de W_s qui rencontrent Γ_1. Alors aucune des composantes Γ_i, $2 \leqslant i \leqslant r + 1$, n'est exceptionnelle. Par des contractions successives des diviseurs exceptionnels différents de Γ_1, on se ramène au cas où Γ_1 est l'unique diviseur exceptionnel. Pour tout $2 \leqslant i \leqslant r + 1$, on a $-m_i\Gamma_i^2 \geqslant m_1$, donc $(-2 - \Gamma_i^2)m_i \geqslant m_1 - 2m_i$. Il suit que

$$m_1 - 2 = \sum_{2 \leqslant j \leqslant n} (-2 - \Gamma_j^2)m_j \geqslant \sum_{2 \leqslant i \leqslant r+1} (m_1 - 2m_i) = (r - 2)m_1$$

D'où $r \leqslant 2$. Si $r = 2$ on a $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \varnothing$, car sinon $-m_2\Gamma_2^2 \geqslant m_1 + m_3$, $-m_3\Gamma_3^2 \geqslant m_1 + m_2$, donc

$$m_1 - 2 \geqslant (m_1 + m_3 - 2m_2) + (m_1 + m_2 - 2m_3) = m_1,$$

absurde.

(b) Il s'agit simplement de montrer que les points d'intersection p de W_s sont doubles. Cela est vrai si p se trouve sur un diviseur excptionnel d'après (a). Dans le cas général, on fait une récurrence sur n en contractant un diviseur exceptionnel.

(c) Soit $W \to W_1$ la contraction de la composante Γ_1. On a $W_1 \not\simeq \mathbb{P}_R^1$. Si W_1 a au moins deux diviseurs exceptionnels, alors $n = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 1$ et le résultat est immédiat. On peut donc supposer que W_1 a un unique diviseur exceptionnel. Ce diviseur est nécessairement l'image d'une composante de W_s qui rencontre Γ_1. On montre ainsi le résultat par récurrence sur n.

3.3. Application à la désingularisation

Les notations sont celles de (1.1). Soient Γ_1, Γ_2 deux composantes de W_s qui se coupent transversalement en un point p (i.e. Γ_1 et Γ_2 sont les seules composantes qui passent par p, elles sont lisses en p et ont des tangentes en p distinctes). On suppose qu'il existe un R-automorphisme d'ordre 2 non trivial σ de W qui laisse invariants p et chacune des composantes Γ_1, Γ_2. On cherche une description de $W' := W/\langle\sigma\rangle$ au voisinage de l'image p' de p. On note Γ_i' l'image de Γ_i dans W' et m_i' sa multiplicité.

LEMME 4. *Supposons $W_\eta/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}_K^1$. On a les propriétés suivantes:*

(a) *Si p' est un point régulier de W', alors $(m_1', m_2') \in \{(m_1, m_2/2), (m_1/2, m_2)\}$;*

(b) *Si p' est un point singulier de W', lors $m_1 + m_2 \in 2\mathbb{N}$, $m_i' = m_i$, et l'image réciproque de p' dans la désingularisation minimale de W' est une composante de multiplicité $(m_1 + m_2)/2$, isomorphe à $\mathbb{P}_k^1$, et de self-intersection -2;*

(c) *Supposons Γ_1 lisse et qu'elle coupe les autres composantes de W_s transversalement. Si $m_1' = m_1/2$, alors les points de Γ_1' sont réguliers dans W'.*

Preuve. (a) Soit $g: W \to W'$ le morphisme canonique. D'après la formule de projection (voir par exemple [La], III, Theorem 4.1), on a $\Gamma_1' \cdot g_*\Gamma_2 = g^*\Gamma_1' \cdot \Gamma_2$. Par conséquent, $\Gamma_1' \cdot (2/(m_2/m_2'))\Gamma_2' = (m_1/m_1')\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, or $\Gamma_1' \cdot \Gamma_2' = 1$ d'après (3.2), donc $m_1 m_2 = 2m_1' m_2'$. D'où le résultat car m_i' divise m_i.

(b) Soit $W' \to W_1'$ la contraction des composantes irréductibles de W_s'

distinctes de Γ'_1 et Γ'_2 (voir (4.1) pour la définition de la contraction). Soit $\tilde{W}' \to W'_1$ la désingularisation minimale. Si Γ' est une composante de $\tilde{W}'_s$ au-dessus de p', montrons que sa multiplicité m' vérifie $m' \geqslant (m_1 + m_2)/2$. En effet, il existe un point $x \in \tilde{W}'_\eta$ rationnel sur une extension de degré m' de K, et dont la spécialisation dans $\tilde{W}'_s$ appartient à Γ'. Soit $y \in W_\eta$ un point au-dessus de x, alors y est rationnel sur une extension de degré $\leqslant 2m'$ de K. Comme y se spécialise en p dans W_s, ce degré doit être $\geqslant m_1 + m_2$, d'où $m' \geqslant (m_1 + m_2)/2$.

Si $m_1 \neq m_2$, par exemple si $m_1 > m_2$, alors Γ'_1 est l'unique diviseur exceptionnel de $\tilde{W}'$. On conclut en appliquant le lemme 3 aux composantes qui rencontrent Γ'_1. Si $m_1 = m_2$, on éclate W le long du point fermé p, ajoutant ainsi une composante de multiplicité $2m_1$ qui coupe chacune des Γ_1, Γ_2 en un point p_1, p_2. On conclut en étudiant l'action de σ aux voisinages respectifs de p_1 et p_2 (on est alors ramené à des situations considérées précédemment).

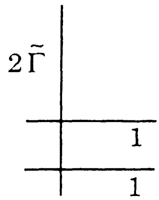
(c) L'action de σ sur Γ_1 est triviale. Soit $q \in \Gamma_1$ et q' son image dans W'. Si q est un point d'intersection, on sait d'après (b) que q' est régulier dans W'. Supposons que $q \in \mathring{\Gamma}_1$. Donc $q' \in \mathring{\Gamma}'_1$. Soit $W' \to W''$ la contraction des composantes de W'_s autre que Γ'_1. Si q' est singulier dans W' (donc dans W''), il est remplacé par une chaîne de droites dans la désingularisation minimale de W'', de plus, une de ces droites est de multiplicité $m'' < m'$ d'après le lemme 3(c). Il existe donc un point $Q' \in W'_\eta$, de degré m'' sur K, qui se spécialise en $q' \in W'_s$. Soit Q un point de W_η au dessus de Q', alors Q est de degré $\leqslant 2m'' < m_1$ sur K, et Q se spécialise en q. C'est impossible car Γ_1 est de multiplicité m_1.

REMARQUE 4. Supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Alors ce lemme reste vrai sans l'hypothèse $W_\eta/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1_K$. Les composantes Γ'_1 et Γ'_2 se coupent encore transversalement en p'. En effet, soit $\mathfrak{P}_i$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_{W,p}$ correspondant à Γ_i. Il existe un générateur u_i de $\mathfrak{P}_i$ tel que $\sigma(u_i) = \pm u_i$. Les propriétés (a) et (b) se démontrent en passant par le complété formel $\hat{\mathcal{O}}_{W,p}$ qui est engendré par les u_i sur $\hat{R}$. La propriété (c) se démontre suivant le même principe.

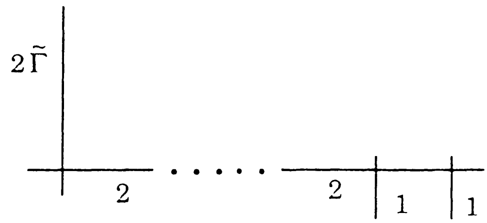
Faute d'avoir une telle description de l'action de σ lorsque $\mathrm{car}(k) = 2$, nous somme obligés de supposer que $W_\eta/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1_K$ et d'utiliser les propriétés des modèles réguliers de $\mathbb{P}^1_K$ sur S.

3.4. Structures locales de certains modèles normaux de $\mathbb{P}^1_K$

On fixe dans cette section un modèle normal projectif Z de $\mathbb{P}^1_K$ sur S tel que $\Gamma := (Z_s)_{\text{réd}}$ soit irréductible de multiplicité 2. On note $\tilde{Z} \to Z$ sa désingularisation minimale, $\tilde{\Gamma}$ le transformé strict de Γ dans $\tilde{Z}$. Il suit de (3.2) que $\tilde{Z}_s$ est de la forme



ou



En particulier, Z a au plus deux points singuliers.

LEMME 5. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Il existe un ouvert affine de Z isomorphe à*

$$\operatorname{Spec} R[X, W]/(X^2 - t(\alpha + \beta X + t^N X^\varepsilon W))$$

avec $\alpha \in R^*$, $\beta \in R$, $N \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon \in \{0, 1\}$;

(b) $\tilde{Z}_s$ *a exactement* $2N + \varepsilon + 3$ *composantes irréductibles.*

Preuve. (a) Rappelons que t désigne une uniformisante de R. Soit H_1 (l'image de) une section de Z. On pose $U = Z - H_1$. C'est un ouvert affine de Z. Notons $A' = \mathcal{O}_Z(U)$, $\bar{A}' = A' \otimes_R k$, et v_Γ la valuation de $\mathscr{K}(Z)$ induite par le point générique de Γ.

Il existe $x \in A' - tA'$ tel que $A'_K = K[x]$. Montrons que l'image $\bar{x}$ de x dans $\bar{A}'$ est algébrique sur k. Pour tout $a \in A'$, il existe $q \in \mathbb{Z}$, $Q(X) \in R[X] - tR[X]$ tels que $t^q a = Q(x)$. Si $\bar{x}$ était transcendant sur k, alors $q \leqslant 0$, donc $A' = R[x]$, ce qui impliquerait que Z_s est intègre.

Quitte à translater x par un élément de R, on peut supposer $\bar{x}$ nilpotent. Donc $v_\Gamma(x) = 1$ car $x \notin tA'$. Le point rationnel $x = 0$ de Z_η induit une section H_2 de Z. On pose $B = \mathcal{O}_Z(U \cap (Z - H_2))$. Alors $\sqrt{tB} = xB$.

Posons $w_0 = t^{-1}x^2$. On a $w_0 \in B_K$ et $v_\Gamma(w_0) = 0$, donc $w_0 \in B$. Si son image $\bar{w}_0$ dans $B \otimes_R k$ est transcendant, on pose $\alpha = 1$, $\beta = \varepsilon = N = 0$ et $w = w_0 - 1$. Sinon, il existe $\alpha_1 \in R^*$ tel que $w_0 - \alpha_1 \in \sqrt{tB}$, donc $w_0 = \alpha_1 + xw_1$ avec $w_1 \in B$. On construit ainsi deux suites $\alpha_i \in R$ et $w_i \in B$ telles que

$$x^2 = t(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 t + \cdots + t^j x^\varepsilon w_{2j+\varepsilon}) \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

Cette construction s'arrête si l'on arrive à un i tel que $\overline{w_i}$ soit transcendant sur k. Montrons que c'est toujours le cas. Supposons le contraire. Soient $\alpha = \Sigma_{j \geqslant 0} t^j \alpha_{2j+1} \in R$, $\beta = \Sigma_{j \geqslant 0} t^j \alpha_{2j+2} \in R$. On voit que $x^2 - t(\alpha + \beta x) \in t^n B$ pour tout $n \geqslant 2$. Il suit que $v_\Gamma(x^2 - t(\alpha + \beta x)) = +\infty$, donc x est algébrique sur K. Ce qui est impossible.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $w \in B$ et $\alpha \in R^*$, $\beta \in R$ tels que

$$x^2 = t(\alpha + \beta x + t^N x^\varepsilon w)$$

et $\bar{w}$ transcendant sur k, α, β étant définis comme ci-dessus mais par des sommes finies. Posons $A = A'$ si $\varepsilon = 0$ et $A = B$ si $\varepsilon = 1$. En utilisant le fait que $A_K = K[x, w]$ et que $\bar{w} \in A \otimes_R k$ est transcendant sur k, on montre sans difficulté que $A = R[x, w]$. L'homomorphisme $R[X, W] \to A$ qui envoie X à x et W à w est surjectif, de noyau engendré par $X^2 - t(\alpha + \beta X + t^N X^\varepsilon W)$. Par construction, Spec A est un ouvert de Z.

(b) L'élément $w \in \mathscr{K}(Z)$ induit un morphisme fini $Z_\eta \to \mathbb{P}^1_K$ de degré 2, et un modèle $Z' \simeq \mathbb{P}^1_S$ de $\mathbb{P}^1_K$ sur S. De plus, Z est la normalisation de Z' dans $\mathscr{K}(Z)$. Soient D la clôture intégrale de $R[w^{-1}]$ dans $\mathscr{K}(Z)$, $v = w^{-1}$, $y = xv$. Alors on a la relation $y^2 = t(\alpha v^2 + \beta y v + t^N y^\varepsilon v^{1-\varepsilon})$. Il est facile de voir que l'on a en fait un isomorphisme

$$R[V, Y]/(Y^2 - t(\alpha V^2 + \beta Y V + t^N Y^\varepsilon V^{1-\varepsilon})) \xrightarrow{\sim} D$$

Comme $Z = \operatorname{Spec} A \cup \operatorname{Spec} D$, il suffit maintenant de résoudre leurs singularités par éclatements et normalisations successifs. Notons que si $N = \varepsilon = 0$, alors Z a deux points singuliers de type "quadratique": $x^2 - tw = 0$; sinon, Spec A est régulier et Spec D a un unique point singulier p. Lorsque l'on éclate ce point p, on trouve une droite de multiplicité 2 qui coupe le transformé strict $\tilde{\Gamma}$ de Γ en un point singulier de type quadratique, et qui contient un autre point singulier de même type que p mais avec $N - 1$ à la place de N.

4. Détermination de $c(X)$ en fonction de la structure de Z

4.1. Contraction des diviseurs sur lesquels $\omega_{X/S}$ est trivial

Soit W comme dans (1.1). Soit I un sous-ensemble strict de $\{1, \ldots, n\}$. Notons $E = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$. Comme R est hensélien, il existe un morphisme de contraction $\pi: W \to V$ de E ([B-L-R], §6.7, Prop. 4). C'est un morphisme propre à fibres connexes; V est un schéma normal, projectif sur S; $\pi(E)$ est un ensemble fini de points fermés et π induit un isomorphisme $W - E \xrightarrow{\sim} V - \pi(E)$. La contraction π est uniquement déterminée par l'ensemble E.

Supposons de plus que $\deg \omega_{W/S}|_{\Gamma_i} = 0$ pour tout $i \in I$. Cette condition équivaut à $p_a(\Gamma_i) = 0$ et $\Gamma_i^2 = -2$ (voir (3.1)). Il suit que $\omega_{W/S}$ est trivial sur un ouvert de W contenant E (voir par exemple [Ar], Cor. 2.6). De plus, d'après [Lip], Theorm 27.1, les points singuliers de V sont des singularités rationnelles. On en déduit facilement que $\omega_{V/S}$ est un faisceau inversible et que $\pi^*\omega_{V/S} \simeq \omega_{W/S}$, $\pi_*\omega_{W/S} \simeq \omega_{V/S}$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on aura

$$\pi^*(\omega_{V/S}^{\otimes q}) \simeq \omega_{W/S}^{\otimes q}, \quad \pi_*(\omega_{W/S}^{\otimes q}) \simeq \omega_{V/S}^{\otimes q} \tag{4}$$

les deux derniers faisceaux inversibles étant isomorphes sur $V - \pi(E)$.

Un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur un S-schéma $g: W \to S$ est dit *cohomologiquement plat sur* S s'il est plat sur S et si la formation de $g_*\mathscr{F}$ commute au changement de base. Ce dernier est équivalent à $(g_*\mathscr{F})_s \simeq g_{s*}(\mathscr{F}_s)$. Revenons au modèle minimal X de C sur S. Si le pgcde des multiplicités des composantes de X_s est 1 (ce qui est le cas si $g(C) = 2$), alors $\mathcal{O}_X$ est cohomologiquement plat sur S ([Ra], théorème 8.2.1). Par dualité de Serre, il en est alors de même pour $\omega_{X/S}$.

LEMME 6. *Soit E la réunion des composantes irréductibles Γ de X_s telles que* $\deg \omega_{X/S}|_\Gamma = 0$. *Soit $\pi: X \to Y$ la contraction de E. Supposons que $\omega_{Y/S}$ n'a qu'un nombre fini de points-base. Alors $\omega_{X/S}^{\otimes 2}$ est cohomologiquement plat sur S. De plus, en identifiant* $S^2\, \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})$ *à son image dans* $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$, *on a*

$$\det(S^2\, \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})) = t^{c(X)} \det \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2}) \tag{5}$$

Preuve. L'hypothèse sur les points-base de $\omega_{Y/S}$ implique que ce dernier peut être représenté par un diviseur de Cartier relatif effectif. On a donc une injection $\omega_{Y_s/k}^{-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y_s}$. Comme $\omega_{X/S}$ est cohomologiquement plat, il en est de même pour $\omega_{Y/S}$. Donc $\mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) = k$ et $\mathrm{H}^0(Y_s, \omega_{Y_s/k}^{-1}) = 0$. Cela entraîne par dualité que $\mathrm{H}^1(Y_s, \omega_{Y_s/k}^{\otimes 2}) = \mathrm{H}^1(Y_\eta, \omega_{Y/S}^{\otimes 2}) = 0$. D'où la platitude cohomologique de $\omega_{Y/S}^{\otimes 2}$ et donc celle de $\omega_{X/S}^{\otimes 2}$. Enfin la formule (5) résulte des formules (3) et (4).

4.2. Calcul de $c(X)$

On conserve les notations du lemme 6. Soit σ l'involution hyperelliptique de C, elle se prolonge en un automorphisme de X par l'unicité du modèle minimal. Clairement σ laisse invariant l'ensemble E, donc il se prolonge en un automorphisme de Y par l'unicité de la contraction.

Dans toute la suite, on note par Z le quotient $Y/\langle\sigma\rangle$, $\rho: Y \to Z$ le morphisme canonique, $\tilde{Z} \to Z$ la désingularisation minimale de Z et d le nombre de composantes irréductibles de $\tilde{Z}$.

Soit V un ouvert de Y dense dans les fibres. Comme Y est normal et $\omega_{Y/S}$ est inversible, on a pour tout $q \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) = \mathrm{H}^0(V, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) \cap \mathrm{H}^0(C, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) \tag{6}$$

Pour tout $y \in \mathscr{K}(C)$, on note $\mathrm{Tr}(y) = \sigma(y) + y$, $\mathrm{N}(y) = \sigma(y)y$.

D'après les formules de (3.1), Y_s est soit irréductible de multiplicité $\leqslant 2$, soit réduit avec deux composantes irréductibles. Il en est de même pour Z_s.

PROPOSITION 4. *Si Z_s est intègre (donc lisse), alors $c(X) = 0$. De plus, C admet une équation minimale à coefficients dans R.*

Preuve. On a $Z \simeq \mathbb{P}_S^1$. Soient $U = \operatorname{Spec} R[x]$ un ouvert affine de Z et $V = \rho^{-1}(U)$. On pose $A = \mathcal{O}_Z(U)$, $B = \mathcal{O}_Y(V)$. D'après le lemme 1, il existe $y \in B$ tel que $B = A + Ay$. Soient $Q(x) = -\mathrm{Tr}(y)$, $P(x) = -\mathrm{N}(y)$. Alors on a un isomorphisme

$$R[x, Y]/(Y^2 + Q(x)Y - P(x)) \xrightarrow{\sim} B$$

D'après le lemme 2, on a $\omega_{Y/S}|_V = \omega_1 \mathcal{O}_Y|_V$, où $\omega_1 = (2y + Q(x))^{-1}\ dx$. Il suit de l'identité (6) que $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})$ a pour base $\{\omega_1, \omega_2\}$ avec $\omega_2 = x\omega_1$. On voit immédiatement que $\omega_{Y/S}$ est engendré par ses sections globales et que $S^2\,\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$. D'où $c(X) = 0$.

Montrons qu'il existe $z_0 \in B$ tel que $B = A + Az_0$ et $\deg \mathrm{Tr}(z_0) \leqslant 3$, $\deg \mathrm{N}(z_0) \leqslant 6$. Ce qui fournira une équation minimale de C à coefficients dans R. Considérons l'ensemble

$$\mathscr{A} = \{A + Az \mid z \in B,\ B_K = A_K + A_K z,\ \deg \mathrm{Tr}(z) \leqslant 3,\ \deg \mathrm{N}(z) \leqslant 6\}$$

Cet ensemble est non-vide car $g(C) = 2$. Soit $A + Az^0$ un élément maximal (pour l'inclusion) de cet ensemble. On a $z_0 = \alpha y + h(x)$, $\alpha \in R$, $h(x) \in R[x]$. Il suffit de montrer que $\alpha \in R^*$. Supposons le contraire. Alors on peut écrire $\alpha = t\beta$, $h(x) = tg(x) + f(x)$, avec $\beta \in R$, $g(x)$, $f(x) \in R[x]$ et $\deg f(x) = \deg \bar{f}(x)$. Donc $z_0 = t(\beta y + g(x)) + f(x)$. Il suit que $\beta y + g(x) \in \mathscr{A}$, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de $A + Az_0$.

PROPOSITION 5. *Supposons que $Z_s \simeq 2\mathbb{P}_k^1$. Alors d est impair et $c(X) = (d-1)/2$.*

Preuve. D'après le lemme 5(a), Z contient un ouvert affine $\operatorname{Spec} R[x, w]$, avec $x^2 = t(\alpha + \beta x + t^N x^\varepsilon w)$. En vertu de la proposition 8(a) et (b), on a d impair. Il suit du lemme 5(b) que $\varepsilon = 0$ et $d = 2N + 3$.

Posons $h = t^{-1}x^2$, $A = R[x, w, h^{-1}]$. Alors $\sqrt{tA} = xA$. En vertu du lemme 1, la clôture intégrale B de A dans $\mathscr{K}(C)$ est de la forme $B = A + Ay$. On peut choisir y entier sur $R[x, w]$. Alors $V := \operatorname{Spec} B$ est isomorphe de façon naturelle à un ouvert principal de

$$\operatorname{Spec} R[X, W, Y]/(X^2 - t(\alpha + \beta X + t^N W),\ Y^2 + Q(X, W)Y - P(X, W))$$

où Q, $P \in R[X, W]$ vérifient $Q(x, w) = -\mathrm{Tr}(y)$, $P(x, w) = -\mathrm{N}(y)$. En utilisant le lemme 2, on voit que $\omega_{Y/S}|_V = \delta_1 \mathcal{O}_Y|_V$, avec

$$\delta_1 = \frac{\mathrm{d}x}{t^{N+1}(2y + Q(x, w))}$$

Soit $(\mathscr{E}): z^2 + H(x)z = L(x)$ une équation de C (donc $K[x, z]$ est la clôture intégrale de $K[x]$ dans $\mathscr{K}(C)$). Il existe $\lambda \in \mathrm{K}^*$, $f(x) \in K[x]$, $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1\}$ tels que $y = f(x) + \lambda x^r h^q z$. Posons $\omega_i = t^{-N-1}\lambda^{-1}\omega_i(\mathscr{E})$. Alors $\omega_{Y/S}|_V$ est également engendré par $x^{-r}\omega_1$.

Comme $\{\omega_1, \omega_2\}$ est une base de $\mathrm{H}^0(C, \omega_{Y/S})$, il suit immédiatement que $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})$ a pour base $\{\omega_1, t^{-r}\omega_2\}$. On en déduit que sur V, $\omega_{Y/S}$ est engendré par ses sections globales (plus précisément par ω_1 si $r = 0$ et par $t^{-1}\omega_2$ sinon). D'autre part, si l'on note $\omega_i\omega_j$ l'image de $\omega_i \otimes \omega_j$ dans $\mathrm{H}^0(C, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$, un calcul simple montre que $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$ a pour base

$$\{t^{-r}\omega_1^2, t^{-r}\omega_1\omega_2, t^{N+1+r}(-t\alpha\omega_1^2 - t\beta\omega_1\omega_2 + \omega_2^2)\}$$

Il suit que

$$\det(S^2\,\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})) = t^{N+1} \det \mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$$

La proposition résulte alors du lemme 6.

PROPOSITION 6. *Supposons que Z_s soit réduit avec deux composantes irréductibles. Alors il en est de même pour Y_s, et ses composantes se coupent en un unique point double ordinaire p. Enfin, on a $c(X) = n$, où n est l'épaisseur de p dans Y, et $d = 2n + 1$.*

Preuve. Comme Y_s n'est pas irréductible, il suit des formules de (3.1) que Y_s est réduit avec deux composantes irréductibles. Le fait qu'elles se coupent en un unique point double ordinaire sera montré à la prop. 7 en utilisant la configuration précise de X_s.

Il est aisé de voir que l'image de p dans Z est un point double ordinaire d'épaisseur $2n$ (appliquer le lemme 4 à X si l'on veut). Donc $d = 2n + 1$ et Z contient un ouvert $\operatorname{Spec} R[x, v]$ avec $xv = t^{2n}$. Soient

$$U = \rho^{-1}(\operatorname{Spec} R[x, x^{-1}]),\ V = \rho^{-1}(\operatorname{Spec} R[v, v^{-1}]),$$

alors $U \cup V$ est un ouvert de Y dense dans les fibres. Par conséquent, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) = \mathrm{H}^0(C, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) \cap \mathrm{H}^0(U, \omega_{Y/S}^{\otimes q}) \cap \mathrm{H}^0(V, \omega_{Y/S}^{\otimes q})$$

On cherche une description de $\mathcal{O}_Y(U)$ et de $\mathcal{O}_Y(V)$.

Soient Γ_1, Γ_2 les composantes de Y_s. Soit v_{Γ_2} la valuation de $\mathcal{K}(C)$ associée au point générique de Γ_2. On peut supposer par example que $v_{\Gamma_2}(x) > 0$. Notons B la clôture intégrale de $R[x]$ dans $\mathcal{K}(C)$. Il est facile de voir (comme pour la proposition 4) que l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{y \in B \mid B = R[x] + R[x]y, \deg \mathrm{Tr}(y) \leqslant 3, \deg \mathrm{N}(y) \leqslant 6\}$$

est non-vide. Considérons $Y \to Y'$ la contraction de la composante Γ_2. Soit p' l'image de p dans Y'. Alors p' est un point singulier cuspidal de Y'_s, et la normalisation de Y'_s au point p' donne une courbe de genre arithmétique 1. Comme $\operatorname{Spec} B$ est un ouvert de Y' contenant p', on voit que x^4 ne divise pas $\overline{\mathrm{N}(y)}$ (réduction de $\mathrm{N}(y) \in R[x]$ modulo t) pour tout $y \in \mathcal{A}$. Si $\mathrm{Tr}(y) = a_0x^3 + Q\cdots + a_3$ et $\mathrm{N}(y) = b_0x^6 + \cdots + b_6$, alors on a

$$(yv^3)^2 + (a_0t^{6n} + \cdots + a_3v^3)(yv^3) = b_0t^{12n} + \cdots + b_6v^6 \tag{7}$$

Il suit que $0 \leqslant v_{\Gamma_2}(yv^3) \leqslant 3n$. On fixe un $y \in \mathcal{A}$ avec $m = v_{\Gamma_2}(yv^3)$ maximal. Soit D la clôture intégrale de $R[v]$ dans $\mathcal{K}(C)$. On va montrer que $z := t^{-m}yv^3$ engendre D sur $R[v]$.

Pour cela, il suffit de montrer que $z \notin R[v] + tD$ car on a déjà $D_K = K[v, z]$. Supposons le contraire. Comme $\mathrm{N}(z)$ est un polynôme en v de degré $\leqslant 6$, on peut écrire $z = f(v) + tu$, avec $u \in D$, $f(vv) \in R[v]$ et $\deg f(v) = \deg \bar{f}(v) \leqslant 3$. Quitte à translater y par une constante, on peut supposer que $\deg f(v) \leqslant 2$. On voit d'après l'équation (7) que v^2 divise $\bar{f}(v)$. On peut donc supposer que $f(v) = \alpha v^2$ avec $\alpha \in R^*$. Montrons que $m \geqslant 2n$. En effet, si $m < 2n$, il résulte de (7) que $f^2 + (t^{-m}a_3)v^3f \in v^5R[v] + tR[v]$, ce qui est impossible. Soit $y_1 = y - \alpha t^{m-2n}x$. Alors $y_1 \in \mathcal{A}$ et $v_{\Gamma_2}(y_1v^3) \geqslant m + 1$, ce qui contredit la maximalité de $v_{\Gamma_2}(yv^3)$. Par conséquent $D = R[v, z]$. De plus, le même raisonnement que ci-dessus montre que v^4 ne divise pas $\overline{\mathrm{N}(z)}$, donc $t^{3n-m}b_3 \in R^*$, ce qui montre finalement que $D = R[v, z]$ avec $z = t^{-3n}yv^3$.

En particulier, $\mathcal{O}_Y(U) = R[x, x^{-1}, y]$, $\mathcal{O}_Y(V) = R[v, v^{-1}, z]$ avec $xv = t^{2n}$, $z = t^{3n}x^{-3}y$. Notons $Q(x) = \mathrm{Tr}(y)$. En appliquant le lemme 2, on obtient

$$\mathrm{H}^0(U, \omega_{Y/S}) = \omega_2\mathcal{O}_Y(U), \quad \mathrm{H}^0(V, \omega_{Y/S}) = t^n\omega_1\mathcal{O}_Y(V)$$

où

$$\frac{\mathrm{d}x}{2y + Q(x)}, \quad \omega_2 = x\omega_1$$

Cela implique que $\{t^n\omega_1, \omega_2\}$ est une base de $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S})$, et que

$\{t^{2n}\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2\}$ est une base de $\mathrm{H}^0(Y, \omega_{Y/S}^{\otimes 2})$. Par conséquent, $\omega_{Y/S}$ est engendré par sections globales sur $C \cup U \cup V$ et, en utilisant le lemme 6, on trouve $c(X) = n$.

On constate que les trois propositions précédentes peuvent se résumer comme suit.

THEOREME 1. *Soient $\pi: X \to Y$ la contraction des composantes irréductibles Γ de X_s telles que $\deg \omega_{X/S}|_\Gamma = 0$, Z le quotient de Y par l'involution hyperelliptique σ, $\tilde{Z} \to Z$ la désingularisation minimale de Z. On note d le nombre de composantes irréductibles de $\tilde{Z}_s$. Alors $\omega_{X/S}^{\otimes 2}$ est cohomologiquement plat sur S, d est impair et on a*

$$v(\Delta_{\min}) = -\mathrm{Art}(X/S) + \frac{d-1}{2}$$

Preuve. La platitude cohomologique a été démontrée dans les propositions ci-dessus cas par cas.

5. Détermination de Z en fonction du type géométrique de X

5.1. Type numérique et type géométrique de X

DEFINITION 2. Appelons un *type numérique* la donnée d'un triplet $(I, M, \mathbf{p})$, où I est un ensemble fini, $M = (a_{ij})_{i,j \in I} \in \mathrm{M}_{I \times I}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$. On identifie deux types numériques $(I, M, \mathbf{p})$ et $(J, N, \mathbf{q})$ s'il y a une bijection de I sur J qui envoie M sur N et $\mathbf{p}$ sur $\mathbf{q}$ par permutation des indices.

Soit X le modèle minimal de C sur S, on lui associe un type numérique de la façon suivante: I est un ensemble fini qui indexe les composantes irréductibles Γ_i de X_s; $M = (\Gamma_i \cdot \Gamma_j)_{i,j \in I}$ est la matrice d'intersection; et $\mathbf{p} = (p_a(\Gamma_i))_{i \in I}$. Notons que la multiplicité m_i de Γ_i est déterminée par M puisque le pgcd des m_i est égal à 1. En effet, le vecteur $(m_i)_{i \in I}$ engendre le noyau de l'application linéaire $\mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^I$ définie par M.

D'après un théorème de Deligne et Mumford ([De-Mu], Corollary 2.7), il existe une extension finie L de K et une courbe stable $\mathscr{C}$ sur R_L (clôture intégrale de R dans L) telle que $C \otimes_K L$ soit la fibre générique de $\mathscr{C}$. Pour abréger, on dira que la fibre spéciale $\mathscr{C}_s$ de $\mathscr{C}$ est *la réduction stable de C*. Cette courbe sur k ne dépend pas de L.

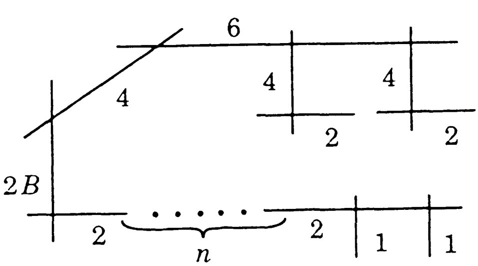
DEFINITION 3. On appelle *type géométrique* de X la donnée de son type numérique et la donnée du type de la réduction stable $\mathscr{C}_s$ de C. Dans le présent article, le type de la réduction stable $\mathscr{C}_s$ sera simplement le nombre de ses composantes irréductibles. Signalons toutefois que l'on peut déterminer complètement $\mathscr{C}_s$ en utilisant les invariants d'Igusa de C [Liu1].

Les types numériques provenant de modèles minimaux de courbes de genre 2 ont été classifiés par Ogg ([Og2] avec omission de trois cas); de même, les types géométriques ont été classifiés par Namikawa et Ueno lorsque car$(k) \neq 2, 3, 5$ ([Na-Ue]).

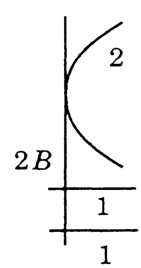
Dans tout ce qui suit, nous adoptons la notation d'Ogg. Il faut cependant ajouter quelques précisions supplémentaires. Chaque numéro dans la liste de [Og2] peut représenter soit un seul type numérique, soit une infinité de types numériques. Ce dernier cas se présente lorsqu'il ya une chaîne de droites de même multiplicité (par exemple les types [3], [13]). D'autre part le type numérique de X ne détermine pas entièrement la configuration de X_s. Par exemple si X est de type numérique [34], X_s a deux composantes Γ_1, Γ_2, elles peuvent se couper en un, deux ou trois points, les ordres de contact des points d'intersection sont seulement régis par l'égalité $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 3$.

On dira que X est de type numérique [0] si X_s est irréductible (donc intègre). Il faut ajouter aussi à la liste trois numéros manquants notés $[41_a]$, $[41_b]$ et $[41_c]$ ([Na-Ue], page 143).

Enfin pour certains types numériques on va donner une notation différente, inspirée de [Na-Ue]. Soit E la fibre spéciale du modèle minimal d'une courbe elliptique. Soit $[\mathscr{K}]$ le symbole de Kodaira correspondant à E. On dira que X est de type numérique $[2\mathscr{K} - n]$, $n \geqslant 0$, si X_s peut être obtenue de la façon suivante: on prend $2E$, on ajoute à une composante de multiplicité 2 de $2E$ une chaîne de n droites de multiplicité 2, et on ajoute encore deux droites de multiplicité 1 à la dernière composante de cette chaîne. Par exemple on a



type $[2IV^* - n]$, $n \geqslant 1$



type $[2III\text{-}0]$

La composante notée B vérifie $B^2 = -3$. La notation $[2\mathscr{K} - n]$ est la même que celle de [Na-Ue] (excepté $[2I_0 - n]$, qu'ils notent

$[2I_0 - (n-1)]$), mais ici, ce symbole ne présume pas le type de réduction stable de C. L'ensemble des types $[2\mathscr{K} - n]$ correspond aux types [12], [15], [24_a], [24], [26], [27], [28], [31] et [32] dans la liste d'Ogg. Strictement parlant, la notation $[2\mathscr{K} - n]$ donne une classification plus fine de X_s que le type numérique, puisque par exemple $[2III - n]$ et $[2I_2 - n]$ ont le même type numérique.

5.2. Structure de Z

Soient X le modèle minimal de C, $\pi: X \to Y$ la contraction des composantes irréductibles Γ de X_s telles que $\deg \omega_{X/S}|_\Gamma = 0$, et Z le quotient de Y par l'involution hyperelliptique σ (voir (4.2)). On note $\tilde{Z} \to Z$ la désingularisation minimale de Z, d le nombre de composantes irréductibles de $\tilde{Z}_s$. Les propositions 7 et 8 sont indépendantes du §4. On commence par les cas où Z_s est réduit.

PROPOSITION 7. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Si X est de type numérique* [0]–[11], [19]–[23], [25], [29], [29_a], [33]–[38], [40]–[44], [41_a], [41_b], *ou* [41_c], *alors* Z_s *est intègre* (*donc lisse*);

(b) *Supposons X de type numérique* [13], [14] *ou* [39]. *Alors* Z_s *est réduit*, $d = 2n + 1$, *où* $n - 1 \geqslant 0$ *est le nombre de composantes dans la chaîne de droites de multiplicité* 1 *qui relie les deux composantes* Γ_1, Γ_2 *telles que* $\deg \omega_{X/S}|_{\Gamma_i} \neq 0$.

Preuve. (a) On doit distinguer plusieurs situations. Si X est de type numérique [0]–[11], Y_s est intègre, donc Z_s aussi. Dans les cas [19]–[23], [25], [29], [29_a], [33], [40]–[44], [41_a], [41_b] et [41_c], on utilise le lemme 4 avec $W = X$ et le fait que tout modèle régulier non lisse de $\mathbb{P}^1_K$ sur S comporte au moins un diviseur exceptionnel.

Si X est de type numérique [35], Y_s est constituée de deux composantes se coupant en deux ou trois points distincts. S'il y a deux points d'intersection, l'involution σ ne les permute pas car l'un est double ordinaire mais pas l'autre; s'il y en a trois, σ en laisse au moins un invariant. Il suit que σ permute les deux composantes de Y_s, car sinon Z_s aurait deux composantes qui se coupent en deux points, ce qui impliquerait que $p_a(Z_s) \geqslant 1$. Le même raisonnement vaut pour [37].

Il reste les cas [34], [36] et [38]. Il y a exactement deux composantes irréductibles Γ_1, Γ_2 dans X_s non contractées par π. Il suffit de montrer qu'elles sont permutées par σ. Supposons le contraire. Soit p_1 un point lisse de X_s appartenant à Γ_1, il se relève en un point rationnel de X_η et définit ainsi un section D_1 de X. Posons $D = D_1 + \sigma(D_1)$. Alors le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ coïncide avec $\omega_{X/S}$ sur X_η. Il existe donc un diviseur vertical V de X (i.e. à support dans X_s) tel que $\mathcal{O}_X(D+V) \simeq \omega_{X/S}$. Comme $D \cdot \Gamma_1 = 2$, $D \cdot \Gamma = 0$ si $\Gamma \neq \Gamma_1$, on peut vérifier à la main que dans les cas [34], [36], [38], il n'existe pas de tel diviseur V.

(b) On a Y_s réduit avec deux composantes irréductibles Γ_1, Γ_2. Ces deux composantes se coupent en un unique point double ordinaire d'épaisseur n dans Y. Comme $p_a(\Gamma_1) + p_a(\Gamma_2) = p_a(Y_s) = 2$ et $\Gamma_i \not\simeq \mathbb{P}^1_k$, on a $p_a(\Gamma_i) = 1$. Il suit que $\sigma(\Gamma_i) = \Gamma_i$. Par conséquent, Z_s est réduit avec deux composantes irréductibles qui se coupent en un point double ordinaire d'épaisseur $2n$ dans Z. Ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 5. Si X_s est semi-stable, alors Z_s est réduit. En combinant la proposition ci-dessus et le théorème 1, on retrouve les résultats de Saito ([Sa2], Proposition).

Les types numériques qui restent sont [16], [17], [18], [30] et $[2\mathscr{K} - n]$, $n \geqslant 0$. Rappelons que si $Z_s \simeq 2\mathbb{P}^1_k$, alors $\tilde{Z}_s$ possède exactement deux composantes de multiplicité 1.

PROPOSITION 8. *Supposons X de type numérique* [16], [17], [18], [30] *ou* $[2\mathscr{K} - n]$, $n \geqslant 0$. *Alors* $Z_s \simeq 2\mathbb{P}^1_k$. *De plus, on peut estimer d comme suit*:

(a) *Si X est de type numérique* [16], [17], [18], [30], *alors* $d = 3$;
(b) *Si X est de type numérique* $[2\mathscr{K} - n]$, *alors d est impair et* $3 \leqslant d \leqslant 2n+3$;
(c) *Supposons* $\mathrm{car}(k) \neq 2$ *et X de type numérique* $[2\mathscr{K} - n]$. *Si* $[\mathscr{K}] = [I_\nu]$, $\nu \geqslant 0$, *et si la réduction stable de C est une courbe irréductible, alors* $d = 3$. *Dans les autres cas, on a* $d = 2n + 3$.

Preuve. On démontre l'assertion sur Z_s en même temps que les propriétés (a), (b), (c). Il existe une unique composante Γ_0 de X_s telle que $\deg \omega_{X/S}|_{\Gamma \neq 0}$, donc Y_s et Z_s sont irréductibles.

Soit X' le modèle régulier de C sur S tel que $(X'_s)_{\text{réd}}$ soit semi-stable (i.e. ses composantes irréductibles sont lisses et ses points d'intersection sont doubles ordinaires) et qui soit minimal pour cette propriété. Alors σ agit sur X'.

(a) On utilise de nouveau le lemme 4 (avec $W = X'$) et les propriétés des modèles réguliers de $\mathbb{P}^1_K$ (voir (3.2)). On montre que $X/\langle\sigma\rangle$ a un unique point singulier et que Z en a deux, d'où $d = 3$.

(b) Notons $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ les composantes de X_s telles que Γ_i soit de multiplicité 2, $\Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i \neq \varnothing$, et $\Gamma_{i-2} \cap \Gamma_i = \varnothing$, $i \leqslant n$. Soit p un point d'intersection de Γ_0 avec une composante différente de Γ_1, ou un point singulier de Γ_0 (si cela existe), la même méthode que ci-dessus montre que l'image de p dans $X/\langle\sigma\rangle$ ainsi que l'image de $\pi(p)$ dans Z sont des points réguliers, et que si $n = 0$, σ permute les deux composantes de multiplicité 1.

Soit $m \leqslant n$ le plus grand entier tel que l'image de Γ_i dans $X/\langle\sigma\rangle$ soit une composante de multiplicité 2 pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$. En utilisant le lemme 4, on voit que $d = 2m + 3$. Par conséquent $3 \leqslant d \leqslant 2n + 3$.

(c) D'après (b), on a $d = 3$ si $n = 0$. On peut donc supposer $n \geqslant 1$. On va d'abord étudier le cas $[\mathscr{K}] \neq [I_v]$. Donc la normalisation de Γ_0 est $\mathbb{P}^1_k$ et homéomorphe à Γ_0. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, σ a deux points fixes sur Γ_i qui sont les points d'intersection de Γ_i avec les autres composantes, ou $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ plus le point singulier de Γ_0 si $[\mathscr{K}] = [II]$. Soit Γ'_i l'image de Γ_i dans $X/\langle\sigma\rangle$. Comme Γ_0 et Γ'_0 ont la même multiplicité, σ agit non trivialement sur Γ_0. Or cet automorphisme a au plus deux points fixes, donc Γ'_0 ne contient pas d'autre point singulier de $X/\langle\sigma\rangle$ que l'image de $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ éventuellement. Cela entraîne que Γ'_1 est nécessairement de multiplicité 2. On recommence le même raisonnement avec Γ_1. On montre ainsi de suite que Γ'_i est de multiplicité 2 pour tout $i \leqslant n$. D'où $d = 2n + 3$.

Supposons maintenant $[\mathscr{K}] = [I_v]$, $v \geqslant 0$. Alors C admet un modèle stable sur $R[t^{1/2}]$ (voir par exemple SGA 7 I, exp. I, 3.4). Plus précisément, soit Y' (resp. Z') la normalisation de $Y \otimes_R R[t^{1/2}]$ (resp. de $Z \otimes_R R[t^{1/2}]$), alors Y' est le modèle stable de C sur $R[t^{1/2}]$. D'après le lemme 5, on a $d = 3$ si et seulement si Z'_s est irréductible. Par conséquent, si la réduction stable Y'_s de C est irréductible, il en est de même pour Z'_s, d'où $d = 3$. Si Y'_s n'est pas irréductible, alors elle est réunion de deux courbes stables de genre arithmétique 1, donc σ laisse invariante chacune de ces composantes, donc Z'_s n'est pas irréductible. Il suit que Z n'a qu'un point singulier. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que $d = 2n + 3$.

REMARQUE 6. Les propositions 7, 8 et le théorème 1 montrent que si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, $c(X)$ est entièrement déterminé par le type géométrique de X et sa valeur est celle donnée par [Ue]. En fait $c(X)$ ne dépend que du type numérique de X lorsque celui-ci n'est pas de la forme $[2\mathscr{K} - n]$, $n \geqslant 1$. Si $\mathrm{car}(k) = 2$, cela reste vrai à condition que le type numérique de X ne soit pas de la forme $[2\mathscr{K} - n]$ avec $n \geqslant 1$.

EXEMPLE 1. Soit K l'hensélisé strict de $\mathbb{Q}_2$. On va exhiber une courbe C avec X de type numérique $[2\mathscr{K} - n]$, et $3 < d < 2n + 3$ (donc $1 < c(X) < n + 1$). Ce qui montrera que la proposition 8(c) n'est pas valable si $\mathrm{car}(k) = 2$.

Soient $a_0, a_1 \in R$. On pose $P(x) = (x^2 - 2)^3 + 16a_1x^2 + 16a_0$. On choisit a_0, a_1 de telle sorte que $P(x)$ soit séparable et que a_0 soit un carré dans $R/4R$. Soit C la courbe hyperelliptique sur K définie par l'équation $y^2 = P(x)$. Alors les calculs montrent que $d = 5$, donc $c(X) = 2$, et que X

est de type numérique $[2I_0 - 2]$ (resp. $[2II - 2]$) si $a_0 \in R^*$ (resp. si $a_0 \in 2R$ et $a_1 \in R^*$).

REMARQUE 7. En examinant (cas par cas suivant le type numérique de X) le quotient $X/\langle\sigma\rangle$, on constate que le nombre $c(X)$, calculé à l'aide du théorème 1, coïncide avec le nombre de points singuliers de $X/\langle\sigma\rangle$. Cela n'est sûrement pas un hasard, mais nous n'avons pas d'explication.

De plus, soit p un point singulier de $W := X/\langle\sigma\rangle$. Alors, le complété $\mathfrak{m}_p$-adique $\hat{\mathcal{O}}_{W,p}$ est isomorphe à l'un des anneaux suivants

$$\hat{R}[[U, V]]/(UV - t^2), \quad \hat{R}[[U, V]]/(U^2 - tV),$$
$$\hat{R}[[U, V, W]]/(UV - t, W^2 - tT),$$

où T est un élément inversible de $R[[U, V, W]]$. Notons que si $\mathrm{car}(k) = 0$, le nombre de Milnor d'une telle singularité est égal à 1.

6. Calcul effectif du discriminant minimal

6.1. Comparaison de $v(\Delta_0)$ et $v(\Delta_{\min})$

Rappelons que l'on note $v(\Delta_0)$ le plus petit discriminant des équations de C à coefficients dans R. On sait que $v(\Delta_0) \geqslant v(\Delta_{\min})$ (prop. 2(d)). Le théorème suivant précise leur relation.

THEOREME 2. *Avec la notation ci-dessus, on a l'égalité*

$$v(\Delta_0) = v(\Delta_{\min}) + 10c(X)$$

Preuve. Pour tout modèle normal propre W de C sur S, on notera simplement par ω le faisceau dualisant relatif $\omega_{W/S}$ s'il n'y a pas de confusion possible. Si W est localement d'intersection complète sur S, il y a un choix canonique de $\omega_{W/S}$ en utilisant le lemme 2.

Soit $(\mathscr{E}) : y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation de C à coefficients dans R (i.e. $Q, P \in R[x]$). Comme dans la preuve de la prop. 2(d), on peut supposer que $R[x, y]$ est la clôture intégrale de $R[x]$ dans $\mathscr{K}(C)$. La fonction rationnelle x induit un modèle $Z_0 \simeq \mathbb{P}^1_S$ de $\mathbb{P}^1_K$ sur S, la normalisation W de Z_0 dans C est localement d'intersection complète sur S (lemme 1) et contient $\mathrm{Spec}\, R[x, y]$ comme ouvert affine dense dans les fibres.

Soit $\varphi : \tilde{W} \to W$ la désingularisation minimale. On a

$$\mathrm{H}^0(X, \omega) = \mathrm{H}^0(\tilde{W}, \omega) \subset \mathrm{H}^0(W, \omega) = R\omega_1(\mathscr{E}) + R\omega_2(\mathscr{E})$$

Il résulte de (1.3) que

$$v(\Delta(\mathscr{E})) - v(\Delta_{\min}) = 10 \operatorname{long}_R(\mathrm{H}^0(W, \omega)/\mathrm{H}^0(\tilde{W}, \omega))$$

où long_R désigne la longeur sur R. Le faisceau $\omega_{\tilde{W}/S} \otimes (\varphi^* \omega_{W/S})^\vee$ étant inversible et trivial sur C, il existe un unique diviseur vertical V tel que

$$\omega_{\tilde{W}/S} = \varphi^* \omega_{W/S} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{W}}(-V)$$

Il vient de la définition de $\tilde{W}$ que $V \cdot \Gamma \leqslant 0$ pour toute composante Γ contenue dans le support de V. Il suit que $V \geqslant 0$. On a donc $\mathrm{H}^0(W, \omega)/\mathrm{H}^0(\tilde{W}, \omega) \simeq \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V)$, car $\mathrm{H}^1(\tilde{W}, \omega)$ est sans torsion sur R. Par suite

$$v(\Delta(\mathscr{E})) - v(\Delta_{\min}) = 10 \operatorname{long}_R \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V) \tag{8}$$

Si $c(X) = 0$, Z_s est intègre (théorème 1), le théorème résulte alors de la prop. 4. On va traiter le cas où $Z_s \simeq 2\mathbb{P}^1_k$ et $c(X) \geqslant 2$. La preuve dans les autres cas se fait de façon similaire.

Le type numérique de X est $[2\mathscr{K} - n]$, $n \geqslant 1$ (voir (5.1)). Notons Γ_0 la composante de X_s telle que $\deg \omega_{X/S}|_{\Gamma_0} = 1$. On peut écrire $X_s = 2E + 2\Gamma_1 + \cdots + 2\Gamma_n + \Gamma_{n+1} + \Gamma_{n+2}$, où E est la fibre spéciale du modèle minimal d'une courbe elliptique de type $[\mathscr{K}]$; $\Gamma_i \simeq \mathbb{P}^1_k$ pour $i \geqslant 1$; Γ_{n+1} et Γ_{n+2} ne rencontrent que Γ_n; et $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ forment une chaîne. Soit $m \leqslant n$ le plus grand entier tel que l'image Γ'_i de Γ_i dans $X/\langle\sigma\rangle$ soit de multiplicité 2 pour tout $i \leqslant m$. On a vu dans la preuve de la prop. 8(b) que $c(X) = m + 1$.

La composante Γ'_m contient un point singulier de $X/\langle\sigma\rangle$ dont l'image réciproque dans la désingularisation minimale est une droite Γ' de multiplicite 1. Le point générique de $(Z_0)_s$ induit une valuation discrète de $\mathscr{K}(\mathbb{P}^1_K)$. On peut voir que si $v(\Delta(\mathscr{E})) = v(\Delta_0)$, alors cette valuation correspond à Γ'_{m+1} ou à Γ'. Montrons que $\operatorname{long}_R \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V)$ est égale à $m + 1$ dans le premier cas, et à $m + 2$ dans le second. En fait, on va se restreindre au premier cas, le second se traite exactement de la même façon.

Supposons donc que $(Z_0)_s$ correspond à la composante Γ'_{m+1}. On a $\tilde{W} = X$, $V = \Gamma_m + 2\Gamma_{m-1} + \cdots + m\Gamma_1 + (m + 1)E$. De la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_X(-V) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_V \to 0$$

on déduit que

$$\operatorname{long}_R \mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V) = [(m + 2)/2] + \operatorname{long}_R \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X(-V))_{\mathrm{tors}} \tag{9}$$

car $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$ est sans torsion. Soit D' (resp. D'_∞) l'adhérence du point

$\{x = 0\} \in \mathbb{P}^1_K$ (resp. $\{x = \infty\} \in \mathbb{P}^1_K$) dans $X/\langle\sigma\rangle$. Ce sont des diviseurs de Cartier. Soit D (resp. D_∞) l'image réciproque de D' (resp. de D'_∞) dans X. Alors on a $\varphi^*\omega_{W/S} \simeq \mathcal{O}_X(D)$, $\omega_{X/S} \simeq \mathcal{O}_X(D - V) \simeq \mathcal{O}_X(D_\infty - V_\infty)$, où $V_\infty = \Gamma_{m-1} + \cdots + (m-1)\Gamma_1 + mE$. Il suit que $V \sim D - D_\infty + V_\infty$. De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$

tensorisée par $\mathcal{O}_X(D_\infty - V_\infty)$, on déduit la suite exacte

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D_\infty - V_\infty)) \xrightarrow{\rho} \mathrm{H}^0(D, \mathcal{O}_D) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(-V)) \to \mathrm{H}^1(X, \omega)$$

où ρ est la restriction à D. On a

$$\mathrm{H}^0(D, \mathcal{O}_D) = R + Ry, \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D_\infty - V_\infty)) \subset \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_X(D_\infty)) = K + Kx$$

Soit v_{Γ_i} (resp. $v_{\Gamma'_i}$) la valuation de $\mathcal{K}(C)$ (resp. de $\mathcal{K}(\mathbb{P}^1_K)$) associée au point générique de Γ_i (resp. de Γ'_i). Il est facile de voir que pour tout $i \leqslant m$, $v_{\Gamma'_i}(x) = -1$. Il suit que pour tout $i \leqslant m$, on a $v_{\Gamma_i}(x) = -1$ et $v_{\Gamma_i}(t) = 2$. Cela montre que

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D_\infty - V_\infty)) = t^{[(m+1)/2]}R + t^{[(m+2)/2]}Rx$$

Comme $\mathrm{H}^1(X, \omega)$ est sans torsion sur R, on a $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(-V))_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathrm{Coker}\,\rho)_{\mathrm{tors}}$. D'autre part, $\rho(t^{[(m+2)/2]}x) = 0$, donc $\mathrm{long}_R\, \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(-V))_{\mathrm{tors}} = [(m+1)/2]$. Il suit de l'identité (9) que $\mathrm{long}_R\, \mathrm{H}^0(V, \mathcal{O}_V) = m + 1 = c(X)$. D'après la relation (8), on a $v(\Delta(\mathscr{E})) - v(\Delta_{\min}) = 10c(X)$.

REMARQUE 8. On peut voir que si Z_s est irréductible, il y a une unique équation $(\mathscr{E})$ de C (dans le sens de la prop. 2(b)) à coefficients dans R telle que $v(\Delta(\mathscr{E})) = v(\Delta_0)$. Si Z_s a deux composantes irréductibles, il y a $c(X) + 1$ classes de telles équations.

6.2. Calcul effectif de $v(\Delta_{\min})$

Supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Alors il existe un algorithme qui, à partir d'une équation hyperelliptique de C, donne le type géométrique de X [Liu2].

Si C a réduction stable après une extension modérément ramifiée de K (par exemple lorsque $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3, 5$), alors les entiers $v(\Delta_{\min})$, $-\mathrm{Art}(X/S)$ sont donnés dans la table d'Ueno [Ue] (respectivfement notés d_x et δ_x). Nous avons vérifié les valeurs de $\mathrm{Art}(X/S)$ en utilisant la prop. 1 (le conducteur de Swan δ étant nul). Pour le type géométrique [3]-[$III^* - II_0$], la valeur correcte de $-\mathrm{Art}(X/S)$ est 7 au lieu de 8; pour le type géométrique [2]-$[II - II - m]$, les valeurs correctes sont $v(\Delta_{\min}) = 2m + 4$, $-\mathrm{Art}(X/S) = m + 4$.

Supposons $\mathrm{car}(k) = 5$. Un algorithme permet de savoir s'il faut une extension sauvagement ramifiée de K pour réaliser la réduction stable de C ([Liu2], §5.1). Supposons que cela est le cas. Alors on aboutit à une équation de C de la forme

$$(\mathscr{E}) : z^2 = b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6$$

avec $b_0 \in tR$, $b_1 \in R^*$, $1 \leqslant v(b_6) \leqslant 9$ et $v(b_6) \neq 5$ (op. cit., prop. 5.1(b)). On a $v(\Delta_{\min}) = v(\Delta(\mathscr{E})) - 10e$, avec $e = 0$ si $v(b_6) \leqslant 4$; $e = 1$ si $v(b_6) = 6$, et $e = 2$ dans les trois cas restants. Comme on a $c(X) = 1$ si $v(b_6) = 7$ et $c(X) = 0$ sinon, on connaît alors explicitement la valeur de $\mathrm{Art}(X/S)$.

Lorsque $\mathrm{car}(k) = 3$, on a un algorithme analogue pour déterminer $\mathrm{Art}(X/S)$ en utilisant les parties (5.2) et §6 de [Liu2]. Les résultats sont trop longs pour être exposés ici.

EXEMPLE 2. Supposons $\mathrm{car}(K) = 0$ et $\mathrm{car}(k) = 5$. Soit C la courbe propre lisse sur K définie par une équation affine $(\mathscr{E}) : y^2 = x^5 + t$. Alors C a potentiellement bonne réduction. Le modèle minimal X est de type numérique [0]. D'après ce qui précède, on a $-\mathrm{Art}(X/S) = v(\Delta_{\min}) = v(\Delta(\mathscr{E})) = 4 + 5v(5)$. Ce qui implique que le conducteur de Swan vaut $\delta = 5v(5)$ en utilisant la prop. 1.

REMARQUE 9. Supposons maintenant que C est une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ définie par une équation affine $y^2 + Q(x)y = P(x)$. On peut encore définir le discriminant Δ de cette équation. Soient $\omega_i = (2y + Q(x))^{-1} x^{i-1}\, dx$, $1 \leqslant i \leqslant g$. Alors il est facile de voir que

$$\Delta^g \cdot (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_g)^{\otimes 4(2g+1)} \in (\det \mathrm{H}^0(C, \Omega^1_{C/K}))^{\otimes 4(2g+1)}$$

est un élément (notons-le par ω) indépendant de l'équation choisie. En général (si $g \geqslant 3$), il n'existe pas d'équation de C comme ci-dessus telle que $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ soit une base de $\mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S})$ sur R (où X est le modèle minimal de C sur S). En revanche, soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $t^{-d}\omega$ soit une base de $(\det \mathrm{H}^0(X, \omega_{X/S}))^{\otimes 4(2g+1)}$ sur R, alors on doit avoir $d \geqslant 0$. Si $g = 2$, on a $d = 2v(\Delta_{\min})$. On peut aussi se demander s'il est encore possible de comparer d avec $\mathrm{Art}(X/S)$.

Signalons que P. Lockhart [Loc] a étudié, pour une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 1$ ayant un point de Weierstrass rationnel, le discriminant minimal, c'est-à-dire le plus petit discriminant possible des équations $y^2 + Q(x)y = P(x)$, avec $P, Q \in R[x]$, $\deg Q(x) \leqslant g$, $\deg P(x) = 2g + 1$ et P unitaire.

References

[Ar] M. Artin: Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, *Am. J. Math.* 84 (1962) 485–496.

[Ar-Wi] M. Artin and G. Winters: Degenerate fibres and stable reduction of curves, *Topology* 10 (1971) 373–383.

[Bl] S. Bloch: De Rham cohomology and conductors of curves, *Duke Math. J.* 54 (1987) 295–308.

[B-L-R] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud: *Néron Models*, Ergeb. Math., 21, Springer-Verlag, 1990.

[De-Mu] P. Deligne and D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* 36 (1969) 75–109.

[Do] I. Dolgačev: On the purity of the degeneration loci of families of curves, *Invent. Math.* 8 (1969) 34–54.

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné: *Elements de Géometrie Algébrique*, Publ. Math. IHES.

[Ig] J. I. Igusa: Arithmetic variety of moduli for genus two, *Ann. Math.* 72 (1960) 612–649.

[La] S. Lang: *Introduction to Arakelov Theory*, Springer-Verlag, 1988.

[Lip] J. Lipman: Rational singularities, *Publ. Math.* 36 (1969) 195–279.

[Liu1] Q. Liu: Courbes stables de genre deux et leur schéma de modules, *Math. Ann.* 295 (1993) 201–222.

[Liu2] Q. Liu: Modèles minimaux des courbes de genre deux, à paraître dans J. Reine Angew. Math. 453 (1994)

[Loc] P. Lockhart: On the discriminant of hyperelliptic curve, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc. (1994)

[Na-Ue] Y. Namikawa and K. Ueno: The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two, *Manuscripta Math.* 9 (1973) 143–186.

[Og1] A. P. Ogg: Elliptic curves and wild ramification. *Am. J. Math.* 89 (1967) 1–21.

[Og2] A. P. Ogg: On pencils of curves of genus two, *Topology* 5 (1966) 355–362.

[Ra] M. Raynaud: Spécialisation du foncteur de Picard, *Publ. Math. IHES* 38 (1970) 27–76.

[Sa1] T. Saito: Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces, *Duke Math. J.* 57 (1988) 151–173.

[Sa2] T. Saito: The discriminants of curves of genus 2, *Comp. Math.* 69 (1989) 229–240.

[Se] J.-P. Serre: Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques, *Séminaire DPP* 19 (1969–1970).

[Se-Ta] J.-P. Serre and J. Tate: Good reduction of abelian varieties, *Ann. Math.* 88 (1968) 492–517.

[Ue] K. Ueno: Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of Masayaoshi Nagata. II. Kinokuniya, Tokyo (1987) pp. 749–770.