CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

ANTOINE APPERT

Suite à l'article sur le meilleur terme primitif en topologie

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 10 (1989), p. 231-232

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__231_0>

Suite à l'article paru dans la présente Revue, 3, 1982, pp. 63-67, et intitulé "Sur le meilleur terme primitif en topologie" par Antoine APPERT.*

La terminologie sera celle de cet article. Le lecteur est prié de s'y reporter.

Nous avons appelé([10]) propriété cantorienne restreinte d'un ensemble E la propriété suivante:

p_4^0. Pour toute famille dénombrable monotone non vide $\mathfrak{F}$ de parties non vides de E il existe un point de E adhérent à tout ensemble de $\mathfrak{F}$.

Dans tout espace topgen nous appelons voisinage d'un point a tout ensemble E tel que a ne soit pas adhérent au complémentaire de E par rapport à l'espace.

Nous disons qu'une fonction numérique réelle (c'est-à-dire une fonction dont les valeurs sont des nombres réels) f définie sur un ensemble $E \subset$ un espace topgen P est semi-continue supérieurement (resp. continue) en un point $a \in E$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout point $x \in E \cap V_a$, on ait:

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \quad (\text{resp. } |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Les propriétés précédentes seront dites être vraies sur E si elles sont vraies en chaque point de E.

Nous posons:

S(resp. S_1) = classe des ensembles $E \subset$ un espace topgen P tels que toute fonction numérique réelle semi-continue supérieurement (resp. continue) sur E soit bornée supérieurement sur E et atteigne sa borne supérieure sur E

([10]) M.S., Chapitre III, §I, p. 67, et Mathematica, Cluj, XI, 1935, pp. 23 - 31, Mémoire reçu le 24 Novembre 1934. Définition d_{10}, p. 27. Comme nous l'avons indiqué dans Mathematica, Cluj, XI, 1935, pp. 229-246, Mémoire reçu le 29 Janvier 1935 (voir Définition d_{26}, p. 237, et remarque bas de la p. 238 et haut de la p. 239), notre définition ci-dessus de la propriété cantorienne restreinte reste équivalente à elle-même, dans tout espace $(\mathcal{V})$, quand on y remplace les mots "adhérent à tout ensemble de $\mathfrak{F}$ " par les mots "appartenant à tout ensemble de $\mathfrak{F}$ ou appartenant à tout dérivé d'un ensemble de $\mathfrak{F}$ ". Cette équivalence était déjà mentionnée dans tout espace $(\mathcal{V})$ vérifiant α , c'est-à-dire dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, dans notre premier Mémoire de Mathematica mentionné ci-dessus, pp. 26-27.

---

* Transmis par Gustave CHOQUET.

(resp. soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure sur E).

Nous avons énoncé([11]) en 1933 et démontré([12]) en 1934 que:

<u>Théorème</u> 1. Dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, c'est-à-dire dans tout espace topgen vérifiant axi_1, axi_2, axi_3 et axi_4, on a:

(classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte) $= S \subset S_1$.

Mais S_1 est en général plus étendue que S.

Envisageons d'autre part l'axiome suivant (voir M.S. Chapitre I, §III, p. 17:

axi_6. Si un point a est distinct d'un point b, alors a n'est pas adhérent à $\{b\}$.

Nous avons énoncé et démontré([13]) en 1935 que:

<u>Théorème</u> 2. Dans tout espace $(\mathcal{V})$ vérifiant axi_5 et axi_6, c'est-à-dire dans tout espace topgen vérifiant axi_1, axi_2, axi_3, axi_5 et axi_6, et en particulier dans tout espace $(\mathcal{L})$ de FRECHET(14), on a:

(classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte) $=$ S.

De par sa forme même, la propriété cantorienne restreinte p_4^0 EST Topologiquement intrinsèque. Il eût donc été préférable, contrairement à ce que nous avons fait dans M.S., Chapitre III, §I, p.66, ([15]), d'appeler, dans tout espace topgen, <u>ensembles</u> $\aleph_0$ - <u>compacts</u>, ou <u>ensembles dénombrablement compacts</u>, les ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte p_4^0.

([11]) Antoine APPERT, Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, 196, p. 1570, 22 Mai 1933, (séance du 15 Mai 1933).

([12]) Antoine APPERT, Thèse soutenue le 17 Mars 1934, Paris, Hermann, 1934, p. 104.

([13]) Antoine APPERT, Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, 201, P. 813, 4 Novembre 1935, (séance du 28 Octobre 1935).

([14]) Maurice FRECHET, <u>Les espaces abstraits</u>... Paris, 1928, p. 170.

([15]) Nous y avions défini, dans tout espace topgen, l'ensemble $\aleph_0$-compact comme étant l'ensemble possédant la propriété p_1^0, dite de Borel, dans la forme de laquelle le caractère topologiquement intrinsèque n'apparaît pas. Il se trouve (M.S., Ibid. p.68, Théorèmes 1 et 2) que, dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, p_1^0 équivaut à p_4^0, mais que, dans un espace $(\mathcal{V})$ quelconque, on peut seulement affirmer que p_1 ENTRAINE p_4 mais non toujours réciproquement. De même, dans M.S., Ibid. p.66, nous avions défini, dans tout espace topgen, l'ensemble compact comme étant l'ensemble vérifiant la propriété p_1, dite de Borel-Lebesgue, dans la forme de laquelle le caractère topologiquement intrinsèque n'apparaît pas. Il se trouve (M.S., Ibid., p.68, Théorèmes 1 et 2) que, dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, p_1 équivaut à p_4, mais que, dans un espace $(\mathcal{V})$ quelconque, on peut seulement affirmer que p_1 entraîne p_4 mais non toujours réciproquement. Il eût donc été préférable de définir, dans tout espace topgen, l'ensemble compact comme étant celui possédant la propriété p_4, dite propriété cantorienne généralisée, dont le caractère topologiquement intrinsèque est immédiatement évident. Ces remarques mettent une fois de plus en évidence le rôle simplificateur en topologie de l'axiome α c'est-à-dire de l'axiome axi_4 (A. APPERT, C.R. Acad. des Sc., Paris, 194, p.2277, 27 Juin 1932, Séance 20 Juin 1932).