CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN-PAUL PIER

De l'analyse de Fourier à l'analyse harmonique

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 2 (1992), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1992_2_2__1_0>

De l'analyse de Fourier à l'analyse harmonique

Jean-Paul Pier
Centre Universitaire de Luxembourg

Les premiers balbutiements de la théorie des séries de Fourier sont fort anciens. On peut les évoquer à propos des théories musicales de Pythagore et de l'astronomie de Ptolémée. Mais, comme l'affirme l'un des personnages les plus importants - et aussi l'un des plus pittoresques - de l'histoire de l'analyse harmonique, Norbert Wiener, on ne peut faire remonter l'étude antérieurement à Huyghens qui, le premier, a considéré des développements limités.

A partir de 1740, Daniel Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, puis essentiellement Fourier, motivés par des problèmes mathématiques soulevés par la physique, déploient des efforts qui conduisent au développement d'une fonction f de période 2π en une série trigonométrique convergente

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

à coefficients réels; la *forme complexe* de cette série est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

où $c_{\pm n} = \frac{1}{2}(a_n \mp ibn)$, $n \in \mathbb{N}$. Les *coefficients de Fourier* sont déterminés à l'aide des formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

La *transformée de Fourier* d'ordre m est

$$c_m = \mathfrak{F}f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx.$$

Une corde de longueur ℓ, fixée à ses extrémités, vibre conformément à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$u(x,t)$ représentant, à l'instant t, le déplacement transversal du point d'abscisse x par rapport à la position d'équilibre. En 1747, d'Alembert produit la solution de cette équation aux dérivées partielles sous la forme

$$u(x,t) = f(ct+x) - f(ct-x),$$

f étant une *fonction* arbitraire de période 2π. En 1753, Daniel Bernoulli examine des solutions particulières du type

$$\sin \frac{n\pi}{\ell}(ct+x) - \sin \frac{n\pi}{\ell}(ct-x),$$

soit encore

$$2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi}{\ell} ct$$

($n \in \mathbb{N}^*$). Comme les fonctions trigonométriques $\sin \frac{n\pi}{\ell} x$, $\cos \frac{n\pi}{\ell} x$ constituent les fonctions de période 2ℓ les plus simples, Daniel Bernoulli se demande si la solution la plus générale donnée par d'Alembert peut s'écrire à l'aide de la série trigonométrique

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x).$$

Le terme correspondant à $n = 1$ est la vibration fondamentale; les termes suivants correspondent aux *harmoniques*. Ainsi se pose le problème de la représentabilité d'une fonction au moyen d'une série trigonométrique. Tel est l'objet principal de l'analyse harmonique classique.

C'est le 21 décembre 1807 que, devant l'Académie des sciences de Paris, est lu le mémoire de Fourier sur la *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Dès l'année suivante, Poisson fait connaître l'essentiel de sa théorie, en particulier, la formule donnant le coefficient

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos \frac{2n+1}{2} \pi x\, dx$$

dans le développement

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos \frac{2n+1}{2} \pi x.$$

En 1822, Fourier publie son monumental ouvrage *Théorie analytique de la chaleur.* La température v d'une lame infiniment mince, repérée à l'aide des coordonnées (x,y) suit la loi $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Une solution en est de la forme $v(x,y) = e^{-mx} \cos my$; une solution plus générale est du type

$$v(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{2n+1}\, e^{-(2n+1)x} \cos(2n+1)y.$$

L'étude rigoureuse systématique des séries de Fourier est entamée par Dirichlet en 1822-1826 lors de son séjour à Paris. Il montre, entre autres, que la fonction f continue, monotone par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, admet une série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ convergeant vers $\frac{1}{2}\left(\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\right)$. La théorie générale des séries trigonométriques est inaugurée par Riemann en 1854.

Au sujet de la série de Fourier se poseront, d'une part la question de l'unicité du développement, d'autre part, celle de l'existence d'une limite pour les différents modes de convergence imaginables. Et, dans une large mesure, l'analyse harmonique abstraite est l'extension aux groupes localement compacts du puissant outil constitué par les séries de Fourier.

Alors que, dès le XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Du Bois-Reymond a prouvé l'existence d'une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas partout, Lebesgue fournit d'autres exemples et formule les questions suivantes [9] :

Existe-t-il des fonctions continues dont la série de Fourier diverge partout ? Existe-t-il des fonctions continues dont la série de Fourier est convergente partout, sans être uniformément convergente dans aucun intervalle ?

Un premier résultat important concernant les coefficients de Fourier est constitué par le théorème dit de Riemann-Lebesgue affirmant que pour une fonction intégrable, ces coefficients tendent vers 0. Un autre représentant de cette gamme de propriétés est le théorème de

Fischer-Riesz [3] [15]. Soit (φ_n) une famille orthonormée dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$, i.e. $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$, $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) = 0$, $m \neq n$, $m,n \in \mathbb{N}^*$. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\varphi_n$ converge vers f dans $L^1_{\mathbb{R}} \cap L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ et $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ici se place le mémoire [13] dans lequel Plancherel fait prendre conscience de certains aspects essentiels de l'analyse de Fourier. Il considère dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ une suite orthonormée (φ_n) complète, i.e. maximale. A toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ convergente est associée la fonction f de $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ dont le coefficient de Fourier $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$ est a_n, $n \in \mathbb{N}^*$; de plus, on a la *formule de Plancherel*

$$\int_a^b f(x)^2dx = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2.$$

La théorie de l'analyse harmonique généralisée introduite par Wiener dans son travail de référence [20] de 1930 est le point d'aboutissement de recherches entreprises dès 1924 et motivées par l'étude du mouvement brownien. Ce dernier, comme toute turbulence, tout bruit, ou encore la lumière blanche, est dépourvu de périodicité; le phénomène ne peut se décrire à l'aide d'une série de Fourier classique.

Pour la lumière monochromatique, la vibration optique est donnée par deux composantes orthogonales qui sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence. Mais quelle analyse harmonique peut-on appliquer à la lumière polychromatique, la lumière blanche, composée de couleurs dont les longueurs d'onde constituent un spectre continu ? Si on veut appliquer l'analyse harmonique classique, deux possibilités se présentent : 1°) La fonction est un polynôme trigonométrique ou une limite de tels polynômes; soit $f : t \longmapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t}$. Alors, le spectre est constitué par un nombre fini ou dénombrable de raies brillantes, d'intensité $|c_j|^2$, équiréparties. Or, en lumière blanche, on observe une bande continue. 2°) Le théorème de Plancherel s'applique à $f \in L^2(\mathbb{R})$. Cependant, par dualité, il faudrait alors que $\lim_{t \to \pm\infty} \int_t^{t+h} |f(s)|^2 ds = 0$. C'est dire que l'énergie émise pendant une durée h tend à s'annuler quand le temps augmente; on entre en conflit avec l'hypothèse que, pendant la durée d'observation au moins, le soleil constitue un réservoir permanent. Wiener conclut à l'insuffisance de l'analyse harmonique classique.

Wiener arrive à formuler son problème de la manière suivante. Si K_1 et K_2 sont des fonctions telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_i(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_i(x) dx = 1$$

(i=1,2), sous quelle condition le fait que

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y) f(y) dy = 0$$

implique-t-il la relation

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) f(y) dy = 0 \ ?$$

Il aboutit à cette question-ci : Quand tout élément de $L^2(\mathbb{R})$ peut-il être approché par des combinaisons linéaires de fonctions translatées de $f \in L^2(\mathbb{R})$, i.e., l'orbite de f est-elle complète ? Wiener établit qu'une condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble des zéros réels de la *transformée de Fourier*

$$y \longmapsto \liminf_{a \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{ixy} dx$$

est de mesure nulle. Grâce au théorème de Plancherel, le fait découle d'un résultat plus général. Pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, la famille des fonctions

$$x \longmapsto e^{-ixy} g(x)$$

($y \in \mathbb{R}$) est complète si et seulement si l'ensemble des zéros de g est de mesure nulle. Wiener démontre ensuite la propriété correspondante dans $L^1(\mathbb{R})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions translatées de $f \in L^1(\mathbb{R})$ forment une famille complète dans $L^1(\mathbb{R})$ est que la *transformée de Fourier*

$$\hat{f} : y \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx$$

n'admet pas de zéros dans $\mathbb{R}$. Au cours de la démonstration Wiener prouve un lemme dont l'importance s'affirmera dans la suite : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ admet une série de Fourier absolument convergente qui ne s'annule en aucune valeur réelle, alors $\frac{1}{f}$ admet une série de Fourier absolument convergente. Plus généralement, Wiener montre que si $S \subset L^1(\mathbb{R})$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{{}_af : f \in S, a \in \mathbb{R}\}$ soit complet est l'absence de zéros réels communs aux transformées de Fourier des éléments de S. Ce résultat donnera lieu au *problème de Wiener* : Si $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, est-ce que f_2 est la limite d'une combinaison linéaire de fonctions translatées de f_1 dès que $\hat{f}_2$ s'annule partout où $\hat{f}_1$ s'annule ?

L'analyse harmonique abstraite apparaît avec la construction d'une mesure invariante sur un groupe localement compact. Le premier travail dû à Haar est présenté à l'Académie des sciences de Hongrie en 1932; une rédaction légèrement modifiée est publiée en 1933 [8]. Haar s'explique sur ses motivations : Le point de départ de la théorie de Lie sur les groupes continus relève de procédures de différentiation. D'un autre côté, la théorie généralisant l'analyse de Fourier, introduite par Hurwitz, développée notamment par Schur et Weyl, peut être considérée comme une théorie de l'intégration sur les groupes continus. Haar se demande s'il est possible de définir sur un groupe qui est une variété, une notion de volume pour laquelle il y a invariance par rapport à la loi de groupe. En fait, le problème est étudié dans une situation plus gobale; sur le groupe métrique, séparable et localement compact, Haar construit l'analogue de l'intégrale de Lebesgue. Une nouvelle démonstration est mise au point par von Neumann [11].

Entre 1938 et 1940 paraissent les premières monographies sur l'analyse harmonique, par Pontrjagin [14] et Weil [19]. Le travail de Pontrjagin, publié en plusieurs éditions successives, a pour titre *Groupes topologiques*. Le livre de Weil s'intitule *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Le traité de Pontrjagin consacre encore une large part aux groupes de Lie, mais privilégie déjà l'étude de groupes, de préférence à des groupes de transformation. Celui de Weil est plus général, plus abstrait.

Weil rédige une démonstration générale de l'existence - et aussi de l'unicité - d'une mesure invariante unilatéralement par translations sur le groupe localement compact G. Etendant des résultats dus à Volterra, à Weyl et Peter, Weil considère le produit de composition $*$ dans $L^1(G)$: Si $f,g \in L^1(G), f*g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy, x \in G$.

Pontrjagin étudie pour le groupe abélien localement compact G le groupe $\hat{G}$ des caractères, i.e., des homomorphismes continus χ de G dans le tore $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\hat{G}$ est à son tour un groupe abélien localement compact. Pontrjagin établit une version du théorème de dualité : $\hat{\hat{G}}$ est isomorphe à G. Weil explicite l'isomorphisme rigoureusement.

Weil se rend compte que les groupes abéliens localement compacts «forment le domaine naturel de l'analyse harmonique», théorie «qui s'est développée autour de l'intégrale classique de Fourier». Pour $f \in L^1(G)$, la transformée de Fourier est la fonction

$$\hat{f}\ (= \mathfrak{F}f) : \begin{array}{c} \chi \longmapsto \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx = \int_G \overline{\chi(x)}df(x). \\ \hat{G} \to \mathbb{C} \end{array}$$

Si $f,g \in L^1(G)$, $\mathfrak{F}(f*g) = \mathfrak{F}f\,\mathfrak{F}g$.

Un résultat frappant est l'existence d'une bijection entre le groupe dual $\hat{G}$ et l'ensemble des idéaux modulaires maximaux de l'algèbre de Banach commutative $L^1(G)$. Gelfand et Raĭkov [5] sont les premiers à établir ce fait, sous des hypothèses quelque peu restrictives, en complément de l'introduction des anneaux normés (algèbres de Banach) par Gelfand [4]. L'algèbre de Banach $L^1(G)$ est étudiée systématiquement par Segal [17] et Godement [6].

Plus généralement, pour l'algèbre de Banach $\mathfrak{M}^1(G)$ des mesures bornées sur le groupe abélien localement compact G, on introduit la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ en posant

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)}d\mu(x),$$

$\chi \in \hat{G}$. On parle de la transformée de Fourier-Stieltjes, en référence au procédé de Stieltjes systématisé dans la théorie de l'intégration de Daniell. Cette notion est utilisée par Henri Cartan et Godement [2].

Plusieurs résultats de Wiener sur $\mathbb{R}$ sont transposés au cas d'un groupe abélien localement compact G. Godement [7] établit un premier théorème fondamental. Si K est un compact de $\hat{G}$ et $f \in L^1(G)$ admet une transformée de Fourier ne s'annulant pas sur K, alors il existe $g \in L^1(G)$ vérifiant $\hat{g} = \frac{1}{\hat{f}}$ sur K. D'autre part, I étant un idéal fermé de $L^1(G)$, pour que $I = L^1(G)$ il faut et il suffit qu'à tout $\chi \in \hat{G}$ corresponde $f \in I$ tel que $\hat{f}(\chi) \neq 0$.

Godement définit encore le spectre de $\Phi \in L^\infty(G)$ comme étant l'ensemble des $\chi \in \hat{G}$ tels que $\hat{f}(\chi) = 0$ dès que $f * \Phi = 0, f \in L^1(G)$. C'est le plus petit sous-ensemble fermé F de $\hat{G}$ vérifiant la propriété suivante : Si U est un voisinage arbitraire de F, Φ est la limite faible de *polynômes trigonométriques* déterminés par des éléments de U.

L'analyse harmonique s'occupe de la détermination du spectre sp Φ de $\Phi \in L^\infty(G)$ au sens de Godement. Par contre, le problème de la synthèse harmonique s'avère être celui de la *récupération de Φ au moyen de caractères*, i.e., de la possibilité d'approximer Φ par une combinaison linéaire de caractères appartenant à sp Φ. C'est le point de départ de la transposition aux groupes abéliens localement compacts des théorèmes taubériens de Wiener, par Godement [6] et Beurling [1]. De même, le théorème spectral de Stone [18] est étendu à cette situation générale.

L'examen de la synthèse harmonique conduit à la notion suivante : Un sous-ensemble fermé E de $\hat{G}$ pour lequel il existe un unique idéal fermé I dans $L^1(G)$ tel que $E = \bigcap_{f \in L^1(G)} \operatorname{Ker} \hat{f}$ est dit de synthèse. Un premier exemple d'un ensemble qui n'est pas de synthèse est fourni par Schwartz [16] en 1948 dans $L^1(\mathbb{R}^3)$. Plus tard, Malliavin [10] déterminera de tels ensembles pour tout groupe abélien localement compact qui n'est pas compact.

Subsiste aussi la question concernant l'unicité du développement d'une fonction en série de Fourier, problème lié historiquement à l'introduction de la théorie des ordinaux par Cantor. Si une série trigonométrique converge vers 0, les coefficients en sont-ils nécessairement nuls ? On se propose de caractériser les ensembles fermés F tels que si une série trigonométrique converge vers 0 en dehors de F, il s'agit nécessairement de la fonction nulle. La mise en évidence de tels ensembles appelés ensembles d'unicité, comme celle d'ensembles de non-synthèse, s'inscrit dans le vaste programme de la détermination d'ensembles dits spéciaux en analyse harmonique.

Outre les groupes abéliens, les groupes compacts se prêtent assez directement à une étude du point de vue de l'analyse harmonique. Cependant, entre 1930 et 1950 d'importants travaux visent à décrire l'analyse harmonique de groupes localement compacts généraux. On se propose d'en examiner la structure et les propriétés via la considération d'algèbres de fonctions remarquables définies sur ces groupes.

La théorie des représentations des groupes ayant pris corps en algèbre, vers 1900, d'abord sur les groupes finis, les groupes compacts sont naturellement les premiers groupes topologiques à être dotés d'une telle théorie. Le pas initial dans cette direction est franchi par Weyl et Peter [12]. Ils appellent représentation d'un groupe de Lie compact tout homomorphisme continu dans le groupe des substitutions linéaires sur un espace vectoriel complexe de dimension n, i.e., dans un groupe de matrices carrées d'ordre n.

La transposition de cette procédure permet à Haar de représenter un groupe métrique, séparable, compact par des matrices orthogonales [8]. Weil rédige un exposé systématique de la théorie des représentations des groupes compacts, qui sont de dimension finie [19].

La théorie des représentations unitaires en dimension infinie, inaugurée par Wigner [21], prendra vraiment naissance avec l'étude de Gelfand et Raĭkov [5]. Si G est un groupe topologique et $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, une représentation unitaire est un homomorphisme $U : x \longmapsto U_x$ de G dans le groupe des applications linéaires continues isométriques sur $\mathcal{H}$ telles que, quel que soit $\xi \in \mathcal{H}$, $\|U_x\xi - U_y\xi\|$ converge vers 0 si x converge vers y dans G.

Les recherches s'orientent vers la représentation de groupes localement compacts particuliers. Les propriétés de ces images par des représentations fournissent des renseignements sur les groupes à étudier : Les images sont des reflets des groupes qu'on veut connaître.

On assiste ainsi à une double évolution en analyse harmonique. Alors qu'elle s'engage dans un processus d'abstraction, se manifeste en même temps le besoin de la *réalisation concrète* d'objets mathématiques abstraits à l'aide de représentants de la même catégorie qui sont plus élémentaires, plus familiers [P].

Bibliographie.

[1] Beurling, Arne. On the spectral synthesis of bounded functions. *Acta Math.* **81**, 225-238 (1949).

[2] Cartan, Henri, et Roger Godement. Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **64**, 79-99 (1947).

[3] Fischer, Ernest. Sur la convergence en moyenne. *C. R. Acad. Sci. Paris* **144**, 1022-1024 (1907).

[4] Gelfand, Izrail M. Normierte Ringe. *Mat. Sb.* **9**, 3-24 (1941).

[5] Gelfand, Izrail M., et D.A. Raĭkov. Irreducible unitary representations of locally bicompact groups. *Mat. Sb.* **13**, 301-316 (1943). Amer. Math. Soc. Trans. **36**, 1-15 (1964).

[6] Godement, Roger. Théorèmes taubériens et théorie spectrale. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **64**, 119-138 (1947).

[7] Godement, Roger. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **63**, 1-84 (1948).

[8] Haar, Alfred. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. *Ann. of Math.* **34**, 147-169 (1933).

[9] Lebesgue, Henri. *Leçons sur les séries trigonométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1906.

[10] Malliavin, Paul. Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **2**, 61-68 (1959).

[11] Neumann, John von. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen. *Compositio Math.* **1**, 106-114 (1934).

[12] Peter, F. et Hermann Weyl. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. *Math. Ann.* **97**, 737-755 (1927).

[13] Plancherel, Michel. Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par les intégrales définies. *Rend. Circ. Mat. Palermo 30*, 289-335 (1910).

[14] Pontrjagin, Lev S. *Groupes continus* (en russe). GITTL, Moscou, 1938. Trad. angl. : Topological groups. Princeton University Press, 1939. Deuxième édition : Topological groups. Gordon and Breach, New York, 1966.

[15] Riesz, Frigyes. Über orthogonale Funktionensysteme. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*; math.-phys. Kl. 116-122 (1907). Oeuvres complètes; tome 1, 389-396. Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[16] Schwartz, Laurent. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris* **227**, 424-426 (1948).

[17] Segal, Irving E. The group ring of a locally compact group, I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **27**, 348-352 (1941).

[18] Stone, Marshall H. *Linear transformations in Hilbert space*, III. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **16**, 172-175 (1930).

[19] Weil, André. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, 1940. Réédition : Hermann, Paris, 1953.

[20] Wiener, Norbert. Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* **55**, 117-258 (1930).

[21] Wigner, Eugene P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. of Math.* **40**, 149-204 (1939).

[P] Pier, Jean-Paul. L'analyse harmonique : son développement historique. Masson, Paris, 1990.