

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

P. Y. LEDUC

## Radical et primitivité des catégories

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 10, n° 3 (1968), p. 347-350

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1968\\_\\_10\\_3\\_347\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_347_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RADICAL ET PRIMITIVITE DES CATEGORIES

par P.Y. LEDUC

*Extension aux catégories additives du théorème suivant : Le quotient d'un anneau par son radical est produit sous-direct d'anneaux primitifs.*

### 1. Introduction.

Dans [2] on dit qu'une catégorie additive  $\mathcal{P}$  est primitive lorsqu'il existe une famille  $(\theta_X)_{X \in \text{Ob } \mathcal{P}}$  de foncteurs additifs de  $\mathcal{P}$  vers  $Ab$  satisfaisant aux axiomes suivants :

(P1) Pour tout objet non-nul  $X$ ,  $\theta_X \neq 0$  et, dans la catégorie des foncteurs additifs de  $\mathcal{P}$  vers  $Ab$ ,  $0$  et  $\theta_X$  sont les seuls sous-objets de  $\theta_X$  ;

(P2) Pour tout couple  $(X, A)$  d'objets de  $\mathcal{P}$  et tout  $x : X \rightarrow A$ , si  $\theta_X(x) = 0$ , alors  $x = 0$ .

Puis on démontre que, si  $\mathcal{P}$  est une catégorie primitive, il existe un « corps dense »  $\mathcal{E}$  tel que  $\mathcal{P}$  s'identifie à une sous-catégorie « dense » de la catégorie des foncteurs additifs de  $\mathcal{E}$  vers  $Ab$ , ce qui généralise au cas des catégories le théorème de densité de Jacobson.

On peut alors se demander si le concept de radical [1] d'une catégorie est lié à celui de catégorie primitive de la « même manière » que dans le cas des anneaux.

### 2. Quelques remarques préliminaires.

Précisons tout d'abord que toutes les catégories considérées seront supposées petites (sauf, évidemment, la catégorie  $Ab$  des groupes abéliens) et additives (bien que l'existence de sommes directes ne soit pas requise).

On remarque, pour commencer, que la donnée d'un idéal à gauche  $\mathcal{I}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  équivaut à la donnée d'une famille  $(\Phi_X)_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}}$  où, pour chaque  $X$ ,  $\Phi_X$  est un sous-foncteur (dans la catégorie des foncteurs covariants additifs de  $\mathcal{C}$  vers  $Ab$  et de leur transformations naturelles) de  $M\mathcal{C}(X, -)$ . En fait,  $\Phi_X(A) = M\mathcal{C}(X, A) \cap \mathcal{I}$  pour chaque  $A$ .

Rappelons enfin que dans [2] il est démontré que le radical d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de  $\mathcal{C}$ , un idéal à gauche  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$  étant dit maximal lorsque,  $(\Phi_X)$  étant la famille de foncteurs correspondant,

1°) pour tout  $X$  et tout foncteur additif  $S$ ,

$$\Phi_X \leq S \leq M\mathcal{C}(X, -) \implies S = M\mathcal{C}(M, -),$$

où  $\leq$  est la relation «est un sous-foncteur de», et

2°)  $X$  non nul  $\implies \Phi_X < M\mathcal{C}(X, -)$ .

### 3. Construction de catégories primitives.

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal à gauche de  $\mathcal{C}$ . On définit l'idéal bilatère  $\mathcal{I} \div \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  en posant, pour chaque couple  $(X, A)$  d'objets de  $\mathcal{C}$ ,

$$M\mathcal{I} \div \mathcal{C}(X, A) = \{x \in M\mathcal{C}(X, A) \mid (\forall Y \in \text{Ob } \mathcal{C}) [xM\mathcal{C}(Y, X) \subseteq M\mathcal{I}(Y, A)]\}.$$

On vérifie aussitôt que la famille des  $M\mathcal{I} \div \mathcal{C}(X, A)$ ,  $(X, A)$  variant dans  $\text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{C}$ , définit bien un idéal bilatère de  $\mathcal{C}$ , et, d'autre part, que l'on a toujours  $\mathcal{I} \div \mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ .

PROPOSITION 1. Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal à gauche maximal d'une catégorie additive  $\mathcal{C}$ . La catégorie quotient  $\mathcal{C}/(\mathfrak{M} \div \mathcal{C})$  est primitive.

En effet, posons  $\mathcal{P} = \mathcal{C}/(\mathfrak{M} \div \mathcal{C})$  et soit  $\mathcal{D}$  l'image canonique de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathcal{P}$ . On définit un idéal à gauche  $\mathcal{D} : \mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  en posant, pour chaque couple  $(X, A)$ ,

$$M\mathcal{D} : \mathcal{P}(X, A) = \{x \in M\mathcal{P}(X, A) \mid xM\mathcal{P}(X, X) \subseteq M\mathcal{D}(X, A)\}$$

et on vérifie que cet idéal à gauche est nul. La conclusion résulte donc du fait suivant.

LEMME. Si  $\mathcal{P}$  est une catégorie qui possède un idéal à gauche maximal  $\mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{D} : \mathcal{P}$  soit nul, alors  $\mathcal{P}$  est primitive, et réciproquement.

En effet, par hypothèse, pour tout couple  $(X, A)$  et tout  $x \in M\mathcal{P}(X, A)$ , la condition  $xM\mathcal{P}(X, X) \subseteq M\mathcal{D}(X, A)$  entraîne  $x = 0$ . Posons donc, pour chaque couple  $(X, A)$ ,  $\theta_X(A) = M\mathcal{P}(X, A) / M\mathcal{D}(X, A)$ ; on voit alors que la famille  $(\theta_X)_{X \in Ob \mathcal{P}}$  de foncteurs de  $\mathcal{P}$  vers  $Ab$  vérifie la condition (P2). Quant à la condition (P1), elle résulte de la maximalité de  $\mathcal{D}$ . On démontre la réciproque de manière analogue.

**4. Produits sous-directs.**

Soient  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $\mathcal{O}$  un ensemble,  $(w_i : Ob \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{O})_{i \in I}$  une famille de bijections, et appelons produit au dessus de  $\mathcal{O}$  la sous-catégorie pleine de  $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$  dont les objets sont les familles  $(A_i)_{i \in I}$  telles que l'application  $i \rightarrow w_i(A_i)$  soit constante. Pour chaque  $j \in I$ , désignons par  $p_j$  la projection canonique du produit au-dessus de  $\mathcal{O}$  de  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{C}_j$ .

DEFINITION. Toute sous-catégorie  $\mathcal{R}$  du produit au-dessus de  $\mathcal{O}$  de  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ , telle que, pour chaque  $j \in I$ ,  $p_j$  restreinte à  $\mathcal{R}$  est surjective, est appelée un produit sous-direct de  $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$  au-dessus de  $\mathcal{O}$ .

PROPOSITION 2. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie dont le radical est nul et soit  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  la famille de ses idéaux à gauche maximaux.  $\mathcal{C}$  est produit sous-direct au-dessus de  $Ob \mathcal{C}$  de la famille des catégories  $\mathcal{C} / (\mathcal{M}_i \div \mathcal{C})$ ,  $i \in I$ .

Cela résulte immédiatement du fait que l'intersection des idéaux  $\mathcal{M}_i \div \mathcal{C}$  est nulle, celle des  $\mathcal{M}_i$  l'étant déjà par hypothèse.

Des propositions 1 et 2 découle le théorème suivant :

THEOREME. Toute catégorie additive  $\mathcal{C}$  dont le radical est nul est produit sous-direct au-dessus de  $Ob \mathcal{C}$  d'une famille de catégories primitives.

REMARQUE. Par définition, le radical  $\mathcal{J}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est le plus grand des idéaux  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$  tels que l'on ait

$$(P) \quad M_{\mathcal{J}}(A, A) = rad M_{\mathcal{C}}(A, A), \quad A \in Ob \mathcal{C}.$$

D'autre part, on voit que  $\text{rad}(\mathcal{C}/_{\text{rad}\mathcal{C}})$  est toujours nul et que  $F(\text{rad}\mathcal{C}) \subseteq \text{rad}\mathcal{C}'$  pour tout foncteur additif  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  vérifiant

$$FM_{\mathcal{C}}(A, B) = M_{\mathcal{C}'}(FA, FB), \quad (A, B) \in \text{Ob}\mathcal{C} \times \text{Ob}\mathcal{C}.$$

Bien sûr, il y a aussi un plus petit idéal  $\mathcal{I}_0$  satisfaisant à (P), mais de nombreux exemples montrent que ces deux idéaux ne coïncident pas toujours et que  $\mathcal{I}_0$  peut être nul sans que l'intersection des idéaux  $\mathcal{M}_i \dagger \mathcal{C}$  de la proposition 2 ne le soit. On voit donc qu'il est nécessaire, pour avoir les propriétés usuelles des radicaux, de prendre  $\mathcal{I}$  pour radical, et non pas un idéal plus petit.

### Références.

- [ 1 ] G.M. KELLY. *On the radical of a category*, J. Austral. Math. Soc., 4 ( 1964 ), 299 - 307 .
- [ 2 ] P.Y. LEDUC. *Catégories semi-simples et catégories primitives*. Can. J. Math. 20 ( 1968 ), 612-628 .